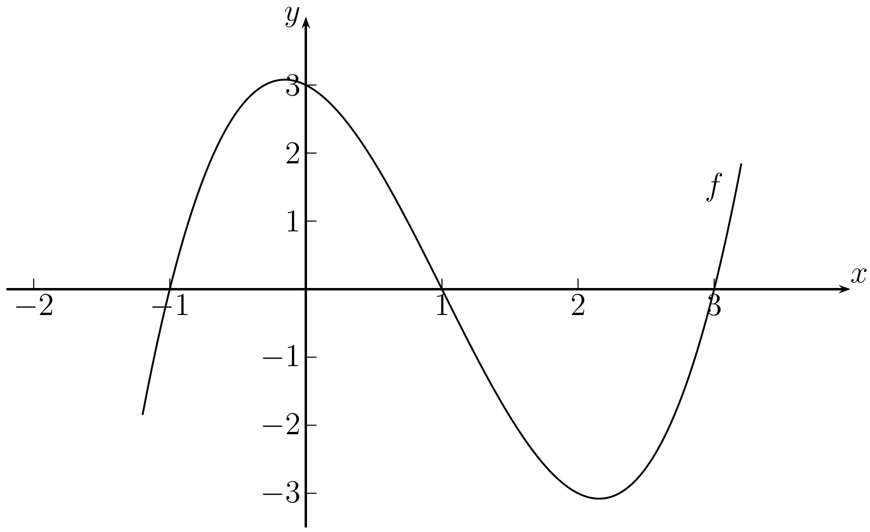
HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f dritten Grades.
F ist eine Stammfunktion der Funktion f.
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



1.1 Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr, falsch oder ohne weitere Informationen nicht entscheidbar ist.

Aussage	wahr	falsch	nicht entscheidbar
Die Ableitungsfunktion f' hat genau drei Nullstellen.			
$f''(0) = 0$			
Die Funktion F hat genau vier Nullstellen.			

(3 P)

1.2 Aussage: „Der Graph der Funktion f' verläuft im Intervall $[0; 1]$ unterhalb der x-Achse.“
Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	*(Tabelle unten)* 3 P
1.2	Die Aussage ist wahr. An jeder Stelle des Intervalls $[0\,;\,1]$ hat der Graph von f eine negative Steigung, d.h. die Funktion f' hat dort einen negativen Funktionswert. Daher verläuft der Graph der Funktion in diesem Intervall unterhalb der x-Achse. 2 P

Aussage	wahr	falsch	nicht entscheidbar
Die Ableitungsfunktion f' hat genau drei Nullstellen.		X	
$f''(0) = 0$		X	
Die Funktion F hat genau vier Nullstellen.			X

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Gegeben sind die auf der Menge der reellen Zahlen definierten Funktionen f und g mit

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+1} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

2.1 Zeigen Sie, dass $g'(x) = f(x)$ ist.

(2 P)

2.2 Berechnen Sie den Wert von $\int\limits_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$g'(x) = \frac{\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot 2x = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot x = x \cdot \sqrt{x^2+1} = f(x)$ 2 P
2.2	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = g(\sqrt{3}) - g(0) = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ 3 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Punkten $A(1\,|\,2\,|\,3)$, $B(-1\,|\,4\,|\,1)$ und $C(5\,|\,6\,|\,3)$.

3.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC einen rechten Winkel bei A hat.

(2 P)

3.2 Bestimmen Sie alle Punkte $S_x(x\,|\,1\,|\,2)$, die vom Punkt A den Abstand $d = \sqrt{27}$ haben.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 + 8 = 0$ ist $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, und das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei A. 2 P
3.2	Mit $\overrightarrow{AS_x} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ folgt $\begin{array}{lrcl} & \lvert\overrightarrow{AS_x}\rvert & = & \sqrt{27} \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 & = & 27 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 & = & 25 \\ \Leftrightarrow & x-1=5 & \vee & x-1=-5 \\ \Leftrightarrow & x=6 & \vee & x=-4. \end{array}$ Damit sind die möglichen Punkte $S_6(6\,|\,1\,|\,2)$ und $S_{-4}(-4\,|\,1\,|\,2)$. 3 P

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Geraden g und h durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

4.1 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Richtungsvektoren der Geraden g und h orthogonal zueinander sind.

(2 P)

4.2 Geben Sie $b, c \in \mathbb{R}$ so an, dass sich die Geraden g und h schneiden.

(1 P)

4.3 Zeigen Sie: Wenn $b \neq 1$ ist, dann besitzen die Geraden g und h unabhängig von der Wahl der Parameter a und c keinen gemeinsamen Punkt.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	Wegen $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = -2a - 1 \Leftrightarrow a = -0{,}5$ sind die Richtungsvektoren von g und h für $a = -0{,}5$ orthogonal zueinander. 2 P
4.2	$b = 1$ und $c = 9$ 1 P
4.3	Aus $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ folgt $1 = b$. Da die Vektorgleichung für $b \neq 1$ keine Lösung hat, haben die Geraden g und h für $b \neq 1$ keine gemeinsamen Punkte. 2 P

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben seien die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ sowie eine Kugel $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 8$.

5.1 Zeigen Sie, dass es genau eine Gerade der Geradenschar gibt, die durch den Punkt $P(4\,|\,5\,|\,15)$ verläuft.

(2 P)

5.2 Die Gerade g_1 hat mit der Kugel K mindestens den Punkt $Q(3\,|\,4\,|\,5)$ gemeinsam. Untersuchen Sie, ob g_1 eine Tangente an K ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)
5.1	Wegen $\begin{pmatrix}4\\5\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 3 \wedge a = 4$ liegt P auf g_4 und auf keiner anderen Geraden der Schar. 2 P
5.2	g_1 ist genau dann Tangente an K, wenn der Vektor $\overrightarrow{MQ}$ orthogonal zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ der Geraden g_1 ist. $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ Daher ist g_1 eine Tangente an K. 3 P

HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

Für den Schulgarten wurden zehn Tulpenzwiebeln gekauft. Sie wurden zufällig einer Mischung entnommen, von der bekannt ist, dass sie zu 30 % aus der Sorte „China Pink“ besteht.

6.1 Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass mehr als eine und weniger als vier Zwiebeln der Sorte „China Pink“ gekauft wurden. Verwenden Sie zur Modellierung eine binomialverteilte Zufallsgröße X.

(2 P)

6.2 Eine der drei Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X aus 6.1 dar.
Geben Sie die richtige Abbildung an.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

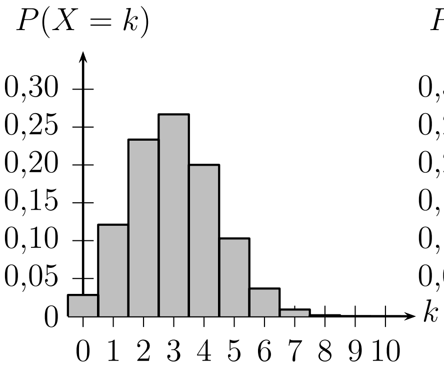


Abb. 1

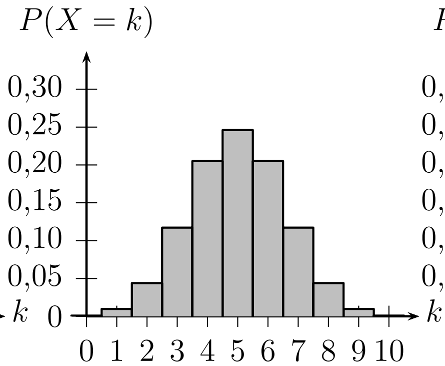


Abb. 2

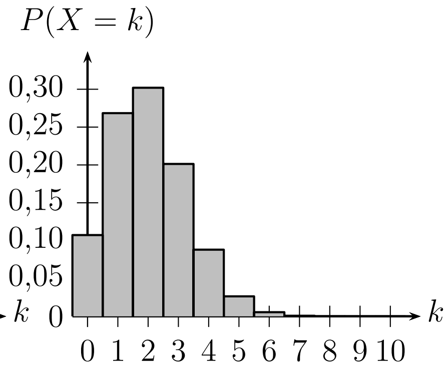


Abb. 3

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)
6.1	$\binom{10}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8 + \binom{10}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7$ 2 P
6.2	Die Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. $E(X) = 10 \cdot 0{,}3 = 3$ Abbildung 2 gehört zu einer Zufallsgröße, deren Erwartungswert größer als 3 ist. Abbildung 3 gehört zu einer Zufallsgröße, deren Erwartungswert kleiner als 3 ist. 3 P

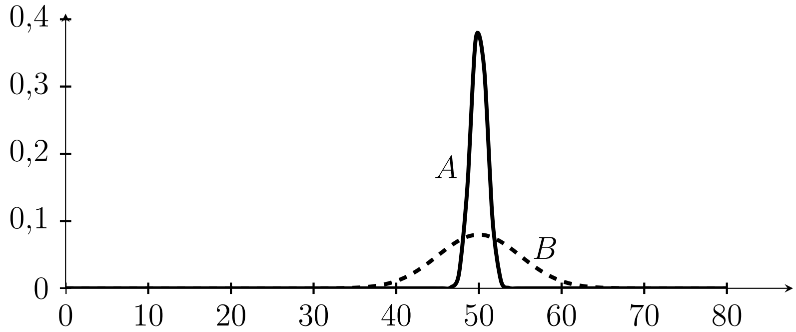
HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Beim Wurf einer idealen Münze treten die Ergebnisse W (Wappen) und Z (Zahl) auf. Die Münze wird 100-mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft das Ergebnis W eintritt.

7.1 Begründen Sie, dass es möglich ist, das Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch eine Gaußsche Glockenkurve anzunähern.

(3 P)

7.2 Einer der beiden Graphen A und B ist die in 7.1 genannte Gaußsche Glockenkurve. Entscheiden Sie, welcher der beiden Graphen dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}5$. $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 > 3$ Die Laplace-Bedingung ist erfüllt, d.h. das Histogramm der Binomialverteilung kann durch eine Gaußsche Glockenfunktion angenähert werden. 3 P
7.2	B ist die Gaußsche Glockenkurve aus 7.1, da $\sigma(X) = 5$ (Abstand der Wendestellen zum Erwartungswert) ist und die zu der Glockenkurve A gehörende Standardabweichung deutlich kleiner als 5 ist. 2 P

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Ein Volleyballverein nimmt mit 15 Spielern an einem Freizeitturnier teil. Sechs Spieler sind Spezialisten im Abblocken, fünf Spieler können besonders gut aufschlagen und vier Spieler haben sich auf das Schmettern spezialisiert.

8.1 Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit berechnen kann, dass bei vier zufällig auszuwählenden Spielern mindestens zwei Spezialisten im Schmettern dabei sind.

(3 P)

8.2 Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Viererteams mit zwei Spezialisten im Abblocken, einem Spezialisten für Aufschläge und einem Spezialisten für Schmetterbälle.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}}{\binom{15}{4}}+\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{11}{1}}{\binom{15}{4}}+\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{11}{0}}{\binom{15}{4}}$$ 3 P
8.2	$$\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 5\cdot 4=300$$ 2 P

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	<table><tr><th>Aussage</th><th>wahr</th><th>falsch</th><th>nicht entscheidbar</th></tr><tr><td>Die Ableitungsfunktion f' hat genau drei Nullstellen.</td><td></td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>$f''(0) = 0$</td><td></td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Die Funktion F hat genau vier Nullstellen.</td><td></td><td></td><td>X</td></tr></table> 3 P
1.2	Die Aussage ist wahr. An jeder Stelle des Intervalls $[0\,;\,1]$ hat der Graph von f eine negative Steigung, d.h. die Funktion f' hat dort einen negativen Funktionswert. Daher verläuft der Graph der Funktion in diesem Intervall unterhalb der x-Achse. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$g'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot 2x = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot x = x \cdot \sqrt{x^2+1} = f(x)$ 2 P
2.2	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = g(\sqrt{3}) - g(0) = \dfrac{4^{\frac{3}{2}}}{3} - \dfrac{1^{\frac{3}{2}}}{3} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$ 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 + 8 = 0$ ist $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, und das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei A. 2 P
3.2	Mit $\overrightarrow{AS_x} = \begin{pmatrix} x-1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ folgt $\begin{array}{lrcl} & \lvert\overrightarrow{AS_x}\rvert & = & \sqrt{27} \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 & = & 27 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 & = & 25 \\ \Leftrightarrow & x-1=5 & \vee & x-1=-5 \\ \Leftrightarrow & x=6 & \vee & x=-4. \end{array}$ Damit sind die möglichen Punkte $S_6(6 \mid 1 \mid 2)$ und $S_{-4}(-4 \mid 1 \mid 2)$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	Wegen $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = -2a - 1 \Leftrightarrow a = -0{,}5$ sind die Richtungsvektoren von g und h für $a = -0{,}5$ orthogonal zueinander. 2 P
4.2	$b = 1$ und $c = 9$ 1 P
4.3	Aus $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -3 \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ folgt $1 = b$. Da die Vektorgleichung für $b \neq 1$ keine Lösung hat, haben die Geraden g und h für $b \neq 1$ keine gemeinsamen Punkte. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)
5.1	Wegen $\begin{pmatrix}4\\5\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 3 \wedge a = 4$ liegt P auf g_4 und auf keiner anderen Geraden der Schar. 2 P
5.2	g_1 ist genau dann Tangente an K, wenn der Vektor $\overrightarrow{MQ}$ orthogonal zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ der Geraden g_1 ist. $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ Daher ist g_1 eine Tangente an K. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)
6.1	$\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^8 + \binom{10}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^7$ 2 P
6.2	Die Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. $E(X) = 10\cdot 0{,}3 = 3$ Abbildung 2 gehört zu einer Zufallsgröße, deren Erwartungswert größer als 3 ist. Abbildung 3 gehört zu einer Zufallsgröße, deren Erwartungswert kleiner als 3 ist. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}5$. $\sigma(X) = \sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 > 3$ Die Laplace-Bedingung ist erfüllt, d.h. das Histogramm der Binomialverteilung kann durch eine Gaußsche Glockenfunktion angenähert werden. 3 P
7.2	B ist die Gaußsche Glockenkurve aus 7.1, da $\sigma(X) = 5$ (Abstand der Wendestellen zum Erwartungswert) ist und die zu der Glockenkurve A gehörende Standardabweichung deutlich kleiner als 5 ist. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{2}}{\binom{15}{4}}+\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{11}{1}}{\binom{15}{4}}+\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{11}{0}}{\binom{15}{4}}$$ 3 P
8.2	$$\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 5\cdot 4=300$$ 2 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Da beim Ablauf von chemischen Prozessen die Temperatur eine wichtige Rolle spielt, kommen computergesteuerte Öfen zum Einsatz. Bei dem Programm A wird der Zeitraum von 0 bis 60 Minuten nach Programmstart betrachtet. Für diesen Zeitraum wird der Temperaturverlauf in Abhängigkeit von der Zeit durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades vorgegeben.
Das Programm startet bei einer Anfangstemperatur von $84\,^\circ\mathrm{C}$ und nach 30 Minuten beträgt die Temperatur $84{,}75\,^\circ\mathrm{C}$. Ferner ist bekannt, dass 5 Minuten nach Programmstart die Temperatur $\frac{2009}{24}{}^\circ\mathrm{C}$ beträgt und die Änderungsrate der Temperatur zu diesem Zeitpunkt den Wert Null hat.

a) a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen die Funktion f mit

$$f(t) = -\frac{1}{3000}\,t^3 + \frac{3}{200}\,t^2 - \frac{1}{8}\,t + 84.$$

Dabei steht t für die in Minuten gemessene Zeit nach dem Programmstart.
$f(t)$ gibt die Ofentemperatur in Grad Celsius an.

a2) Berechnen Sie sowohl die maximale als auch die minimale Temperatur in den 60 Minuten und skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[0;60]$.

a3) Berechnen Sie die größte Änderungsrate der Temperatur.

(15 P)

b) b1) Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur in den ersten 60 Minuten.

b2) Bestimmen Sie c mit $0 < c \leq 60$ so, dass

$$\int_0^c \frac{1}{c} \cdot f(t)\,dt = 82$$

ist, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(6 P)

c) Bei einem Programm A^* wird der Temperaturverlauf durch eine Funktion f^* beschrieben. Das Programm A^* ist mit dem Programm A in den ersten 30 Minuten identisch. Anschließend wird die dann vorliegende Änderungsrate der Temperatur konstant gelassen.

c1) Ergänzen Sie Ihre Skizze aus Teilaufgabe a) durch den Graphen für die Funktion f^*.

c2) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f^* für das Intervall $[30\,;\,60]$.
Berechnen Sie für das Programm A^* die Temperatur 60 Minuten nach dem Start.

c3) Es sei F eine Stammfunktion von f. Begründen Sie, dass der Term

$$\frac{F(30)-F(0)}{60}+\frac{f^*(30)+f^*(60)}{4}$$

die Durchschnittstemperatur für das Programm A^* im Intervall $[0;60]$ angibt.

(10 P)

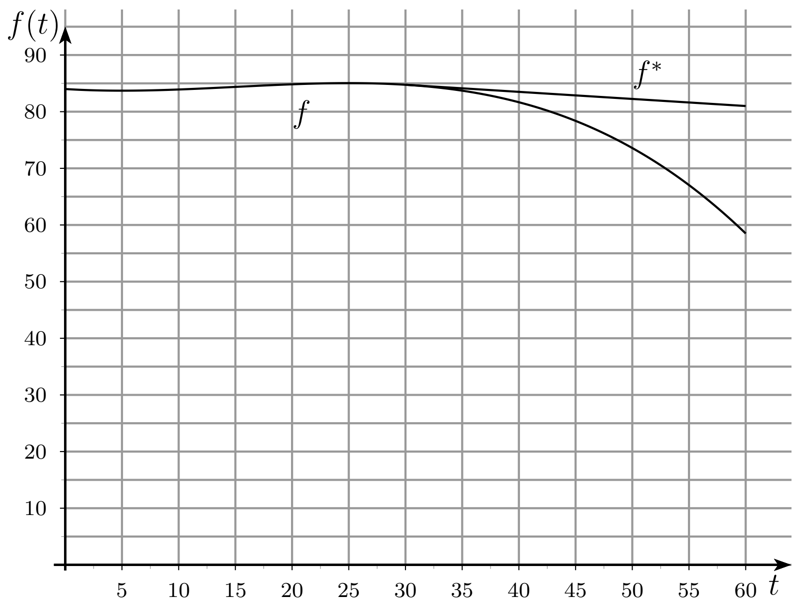
d) Betrachten Sie nun wieder das Programm A.

d1) Berechnen Sie ein fünfminütiges Zeitintervall, in welchem die Temperatur um genau $2\,^\circ\mathrm{C}$ sinkt.

d2) Bestimmen Sie den Zeitabschnitt, in dem die Änderungsrate der Temperatur größer als $0{,}01\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$ ist.

d3) Bestimmen Sie alle Zeitpunkte im Intervall $[0;60]$, zu denen die dazugehörige Änderungsrate der Funktion f nicht noch einmal zu einem anderen Zeitpunkt in diesem Intervall auftritt.

(9 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Aus den an die Funktion zu stellenden Bedingungen $f(5) = \frac{2009}{24}$; $f'(5) = 0$; $f(0) = 84$; $f(30) = 84{,}75$	2		
folgt $f(t) = -\frac{1}{3000}\,t^3 + \frac{3}{200}\,t^2 - \frac{1}{8}\,t + 84.$	2		
Gesucht sind die globalen Extrema von f im Intervall $[0; 60]$. Notwendig für eine Extremstelle t von f ist $f'(t) = 0$. $f'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 5 \vee t = 25$	2		
Wegen $f(0) = 84$, $f(5) = \frac{2009}{24} \approx 83{,}7083$, $f(25) = \frac{2041}{24} \approx 85{,}0417$ und $f(60) = 58{,}5$ liegen an der Stelle $t = 25$ das globale Maximum und an der Stelle $t = 60$ das globale Minimum von f im Intervall $[0; 60]$ vor.	2		
Die maximale Temperatur beträgt also ca. $85{,}04\,°\mathrm{C}$ und die minimale Temperatur $58{,}5\,°\mathrm{C}$.	1		
	2		
Die Stelle, an der die Änderungsrate der Temperatur am größten ist, ist entweder eine Wendestelle von f oder eine Randstelle des Intervalls $[0; 60]$. Notwendig für eine Wendestelle t von f ist $f''(t) = 0$. $f''(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 15$		2	
Wegen $f'(0) = -0{,}125$, $f'(15) = 0{,}1$ und $f'(60) = -\frac{77}{40} \approx -1{,}925$ beträgt die größte Änderungsrate $0{,}1\,°\mathrm{C}$ pro Minute.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe b) Es ist $\frac{1}{60}\cdot\int\limits_0^{60} f(t)\,dt = 80{,}25.$ Die Durchschnittstemperatur in den ersten 60 Minuten beträgt $80{,}25\,°\mathrm{C}$.		3	
$\int\limits_0^c \frac{1}{c}\cdot f(t)\,dt = 82$ liefert $c \approx 54{,}33$. Wegen $\int\limits_0^c \frac{1}{c}\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{c}\cdot\int\limits_0^c f(t)\,dt$ beträgt die Durchschnittstemperatur im Intervall $[0\,;\ 54{,}33]$ etwa $82\,°\mathrm{C}$.		3	
Teilaufgabe c) *Skizzieren des Graphen der Funktion f^* (siehe oben)*	1		
Da die Änderungsrate konstant bleibt, ist f^* eine lineare Funktion mit $f^*(t) = f'(30)\cdot(t-30)+f(30) = -\frac{1}{8}\cdot t + 88{,}5$. Wegen $f^*(60) = 81$ beträgt bei Programm A^* die Temperatur 60 Minuten nach dem Programmbeginn $81\,°\mathrm{C}$.		2 1	
Die Fläche unter dem Graphen zu f^* im Intervall $[30; 60]$ ist ein Trapez. Es gilt $\int\limits_{30}^{60} f^*(t)\,dt = A_{\text{Trapez}} = \frac{f^*(30)+f^*(60)}{2}\cdot 30.$ Damit wird die Durchschnittstemperatur für das Programm A^* über dem Intervall $[0; 60]$ angegeben durch $\frac{1}{60}\cdot\int\limits_0^{60} f^*(t)\,dt = \frac{1}{60}\cdot\left(\int\limits_0^{30} f(t)\,dt + \int\limits_{30}^{60} f^*(t)\,dt\right)$ $= \frac{1}{60}\cdot\left(F(30)-F(0)+\frac{f^*(30)+f^*(60)}{2}\cdot 30\right)$ $= \frac{F(30)-F(0)}{60}+\frac{f^*(30)+f^*(60)}{4}.$			2 1 3

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe d) Sei t der Beginn des fünfminütigen Zeitintervalls. Dann gilt $f(t+5)-f(t)=-2$. $f(t+5)-f(t)=-2$ $\Leftrightarrow t=\frac{-5(\sqrt{717}-15)}{6}\approx -9{,}814 \vee t=\frac{5(\sqrt{717}+15)}{6}\approx 34{,}814$ Der 5-Minuten-Abschnitt, in dem die Temperatur um genau $2\,°\mathrm{C}$ sinkt, beginnt etwa $34{,}8$ Minuten nach dem Programmstart.		3	
$f'(t)>0{,}01$ führt zu $5{,}513<t<24{,}487$. Damit ist von ungefähr $5{,}5$ Minuten bis $24{,}5$ Minuten nach Programmstart die Änderungsrate der Temperatur größer als $0{,}01\,°\mathrm{C}$ pro Minute.		2	
Es gilt $f'(a)=f'(b)\Leftrightarrow a=30-b\vee a=b$. Damit tritt für alle $t\in[0\,;\,30]\setminus\{15\}$ die dazugehörige Änderungsrate der Funktion f noch einmal zu einem anderen Zeitpunkt im Intervall auf. Die gesuchten Zeitpunkte, zu denen die dazugehörigen Änderungsraten der Funktion f nicht noch einmal zu einem anderen Zeitpunkt im Intervall auftreten, sind also $t=15$ und $30<t\leq 60$.			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Ein Stadtteil benötigt täglich elektrische Energie. Für einen bestimmten Tag ist jedem Zeitpunkt t eine bis dahin an diesem Tag benötigte Energiemenge zugeordnet, die in der Einheit MJ (Megajoule) angegeben wird. Die zugehörige Änderungsrate wird als Leistung bezeichnet und in der Einheit $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$ (Megajoule pro Stunde) angegeben.
Die Leistung an dem betrachteten Tag soll mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades modelliert werden.
Dabei gibt $t \in [0\,; 24]$ die seit Mitternacht vergangene Zeit in h (Stunden) und $f(t)$ die Leistung in $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$ an.

a) Es ist bekannt, dass die Leistung um 0 Uhr, um 6 Uhr und um 24 Uhr jeweils $4480\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$ beträgt.
Um den Funktionsterm $f(t)$ zu bestimmen, werden außerdem folgende Bedingungen verwendet:

$$\begin{array}{lrcr} (1) & f(20) & = & 8960 \\ (2) & f'(6) & = & 810 \end{array}$$

Für den Funktionsterm der Funktion f wird der Ansatz

$$f(t) = a \cdot t \cdot (t-6) \cdot (t-24) \cdot (t-b) + 4480$$

gewählt.

a1) Erläutern Sie die Bedeutung der Bedingungen (1) und (2) im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie die Parameter a und b.
[zur Kontrolle: $f(t) = 0{,}25 \cdot t^4 - 16{,}5 \cdot t^3 + 306 \cdot t^2 - 1296 \cdot t + 4480$]

a2) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f über dem Intervall $[0\,; 24]$.

a3) Um einen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vierten Grades eindeutig zu bestimmen, benötigt man in der Regel fünf Bedingungen.
Erläutern Sie, inwiefern der oben gewählte Ansatz für den Funktionsterm bereits drei Bedingungen berücksichtigt.

(9 P)

b) b1) Berechnen Sie die maximale und die durchschnittliche Leistung während des betrachteten Tages.

b2) Aus Gründen der Netzstabilität soll der Betrag der Änderungsrate der Leistung einen Wert von $1300\,\mathrm{MJ/h^2}$ nicht überschreiten.
Untersuchen Sie, ob diese Vorgabe durch den modellierten Leistungsverlauf eingehalten wird.

b3) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem der Stadtteil an dem im Modell betrachteten Tag eine Energiemenge von $63\,610\,\mathrm{MJ}$ benötigt.

b4) Zu den Zeiten, zu denen die Leistung einen Wert von $8960\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$ übersteigt, wird zur Deckung des Bedarfes Energie von einem externen Energieanbieter hinzugekauft.
Berechnen Sie die nach dem vorliegenden Modell hinzuzukaufende Energiemenge.

(21 P)

c) Gegeben ist nun eine Funktion h mit

$$h(t) = 10300 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01 \cdot (t-15{,}5)^2} + 550.$$

c1) Der Graph von h ist achsensymmetrisch zu der durch $t = 15{,}5$ gegebenen Geraden. Beschreiben Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe des Funktionsterms $h(t)$.

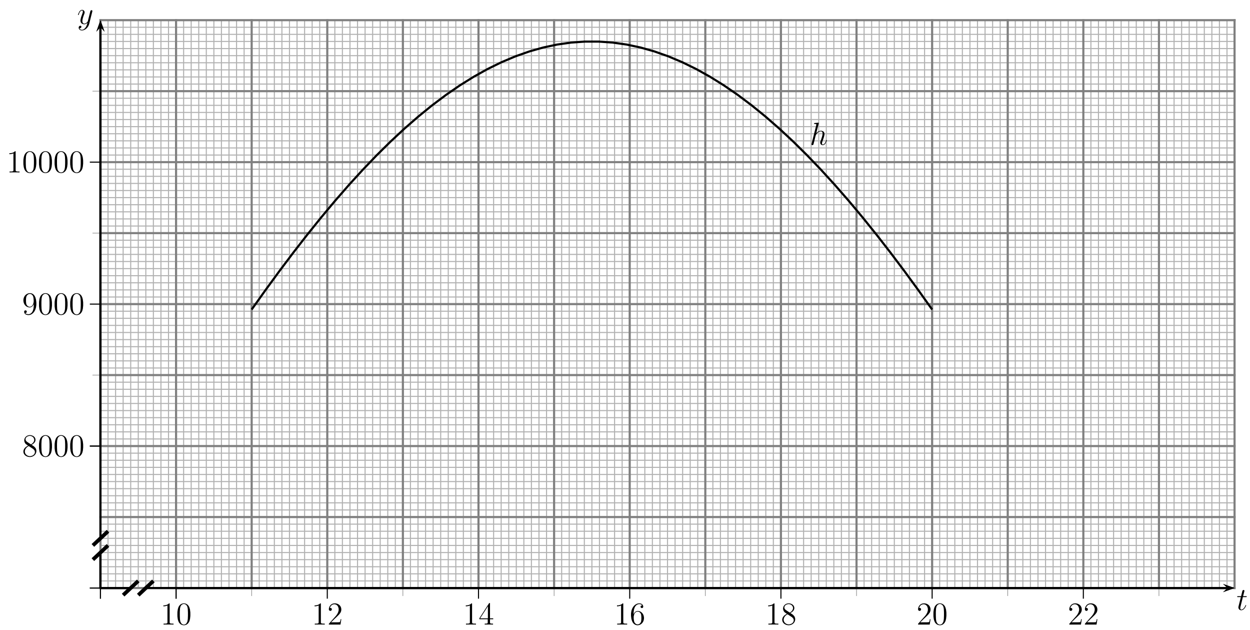
Für jedes a mit $a \geq 0$ ist durch $g_a(t) = h(15{,}5 - a)$ die zur t-Achse parallele Gerade g_a gegeben. Außerdem sei $k(a) = \int\limits_{15{,}5-a}^{15{,}5+a} h(t) - g_a(t)\,\mathrm{d}t$.

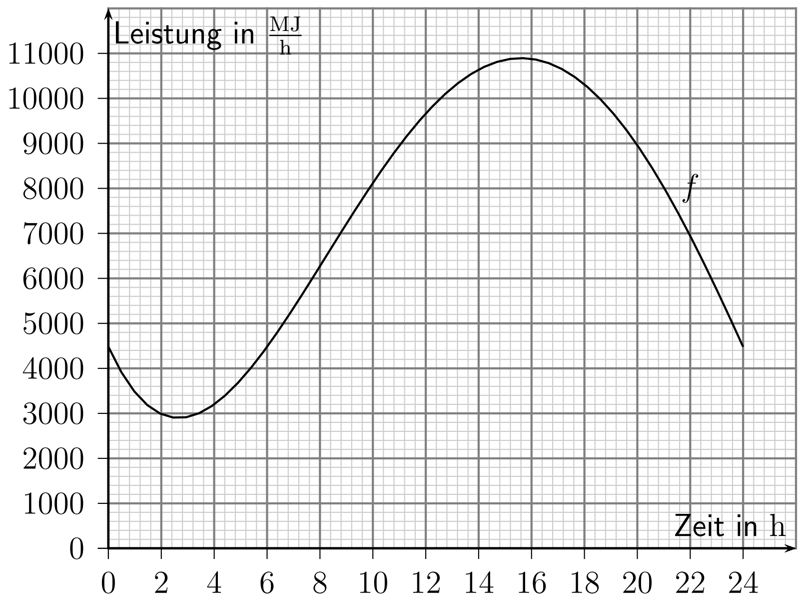
c2) Zeichnen Sie in der Abbildung unten die Gerade g_2 ein und veranschaulichen Sie den Wert $k(2)$.

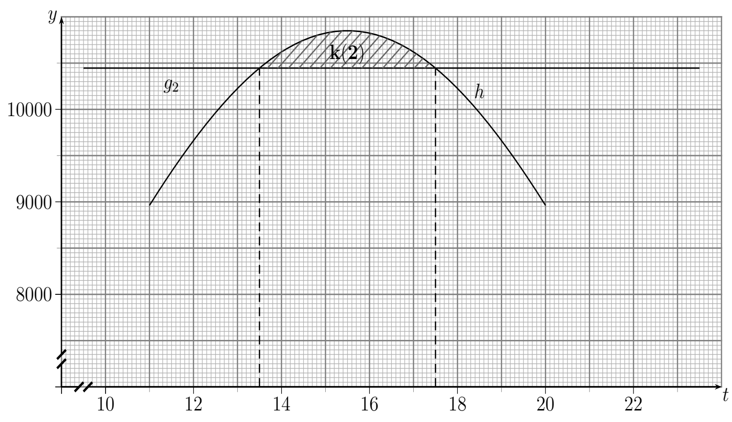
c3) Gegeben ist die Gleichung $k(a) = 1700$. Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichung auf eine Nachkommastelle genau.

c4) Geben Sie konkret eine Reihenfolge von Verschiebungen, Spiegelungen, Streckungen bzw. Stauchungen an, durch die der Graph der Funktion d mit $d(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ in den Graphen von h überführt werden kann.

(10 P)



Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Die Bedingung (1) beschreibt, dass die Leistung um 20 Uhr $8960\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$ beträgt. Die Bedingung (2) beschreibt, dass die Änderungsrate der Leistung um 6 Uhr $810\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}^2}$ beträgt. Mit $f(t) = a \cdot t \cdot (t-6) \cdot (t-24) \cdot (t-b) + 4480$ folgt aus den beiden Bedingungen $\left\lvert \begin{array}{rcl} f(20) & = & 8960 \\ f'(6) & = & 810 \end{array} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{rcl} a & = & 0{,}25 \\ b & = & 36 \end{array} \right\rvert.$	1 1 3		
	2		
Durch den Ansatz $f(t) = a \cdot t \cdot (t-6) \cdot (t-24) \cdot (t-b) + 4480$ ist sichergestellt, dass $f(0) = f(6) = f(24) = 4480$ ist. Damit beträgt die Leistung um $0\,\mathrm{Uhr}$, um $6\,\mathrm{Uhr}$ und um $24\,\mathrm{Uhr}$ jeweils $4480\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$.		2	
Teilaufgabe b) Notwendig für eine Extremstelle t von f ist $f'(t) = 0$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 2{,}6587 \vee t \approx 15{,}6064 \vee t \approx 31{,}2349$ Weil zusätzlich $f(0) = f(24) = 4480$ und $f(2{,}6587) \approx 2900$ sowie $f(15{,}6064) \approx 10896$ gilt, liegt ungefähr an der Stelle $15{,}6064$ ein globales Maximum von f. Die maximale Leistung beträgt ca. $10\,896\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$. $\frac{1}{24}\int\limits_0^{24} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{36224}{5} = 7244{,}8$ Die durchschnittliche Leistung beträgt im Verlauf des Tages ca. $7245\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{h}}$.	2 2 1	3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Den größten Betrag hat die Änderungsrate der Leistung zu einem Zeitpunkt, der einer Wendestelle $t \in [0\,;\,24]$ der Funktion f oder einem der Ränder des Intervalls $[0\,;\,24]$ entspricht. Notwendig für eine Wendestelle t von f ist $f''(t) = 0$. Innerhalb des Intervalls $[0\,;\,24]$ ist $f''(t) = 0$ ungefähr an der Stelle $8{,}2386$ erfüllt. Weil zusätzlich $f'(0) = f'(24) = -1296$ und $f'(8{,}2386) \approx 945$ gilt, bleibt der Betrag der Änderungsrate der Leistung stets kleiner als $1300\,\mathrm{MJ/h^2}$. Die Vorgabe wird eingehalten.		1 2 2	
$\int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t = 63610 \Leftrightarrow s \approx 12{,}0000$ Dem Modell zufolge benötigt der Stadtteil bis 12 Uhr eine Energiemenge von $63\,610\,\mathrm{MJ}$.		3	
$f(t) = 8960 \Leftrightarrow t \approx -2{,}1883 \vee t \approx 11{,}0145 \vee t = 20 \vee t \approx 37{,}1738$ Da das Maximum der Funktion f ungefähr an der Stelle $15{,}6064$ vorliegt, verläuft der Graph von f ungefähr in dem Intervall $[11{,}0145\,;\,20]$ oberhalb der durch $y = 8960$ gegebenen Geraden. $\int_{11{,}0145}^{20} f(t) - 8960\,\mathrm{d}t \approx 11468$ Die Stadtwerke müssen nach dem Modell eine Energiemenge von ca. $11\,468\,\mathrm{MJ}$ hinzukaufen.		1	4
Teilaufgabe c) Der Graph der Funktion h ist genau dann achsensymmetrisch zu der durch $t = 15{,}5$ gegebenen Geraden, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ $h(15{,}5 - t) = h(15{,}5 + t)$ gilt.			2
		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die Lösung der Gleichung $k(a) = 1700$ ist näherungsweise durch $a \approx 2{,}3$ gegeben. *Diese Näherungslösung kann auch mit Hilfe einer Intervallschachtelung ermittelt werden.*		2	
Um den Graphen der Funktion d auf den Graphen der Funktion h abzubilden, führe man z.B. die folgenden Abbildungen durch: • Streckung in t-Richtung mit dem Faktor 10 $[d_1(t) = d(0{,}1t) = e^{-0{,}01\cdot t^2}]$ • Verschiebung um $15{,}5$ Einheiten in positive t-Richtung $[d_2(t) = d_1(t - 15{,}5) = e^{-0{,}01\cdot(t-15{,}5)^2}]$ • Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 10300 $[d_3(t) = 10300 \cdot d_2(t) = 10300 \cdot e^{-0{,}01\cdot(t-15{,}5)^2}]$ • Verschiebung um 550 Einheiten in positive y-Richtung $[g(t) = d_3(t) + 550 = 10300 \cdot e^{-0{,}01\cdot(t-15{,}5)^2} + 550]$ *Die Angabe der Terme wird nicht verlangt.*			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 1: Analysis

Auf einer $4\,\mathrm{km}$ langen Teststrecke wird die von einem Fahrzeug benötigte Kraftstoffmenge in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke gemessen.
Die so gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3}\,x^4 - \frac{8}{3}\,x^3 + 6\,x^2 + 40\,x \qquad ; \qquad 0 \leq x \leq 4.$$

Dabei gibt x die zurückgelegte Strecke in km und $f(x)$ die hierfür benötigte Kraftstoffmenge in ml an. Die Änderungsrate der Kraftstoffmenge wird im Folgenden als *Kraftstoffverbrauchsrate* bezeichnet und in der Einheit $\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{km}}$ angegeben.

a) a1) Berechnen Sie die für die gesamte Testfahrt benötigte Kraftstoffmenge.

a2) Berechnen Sie die mittlere Kraftstoffverbrauchsrate bei der betrachteten Testfahrt und die Kraftstoffverbrauchsrate an der Stelle $2{,}5\,\mathrm{km}$.

a3) Zu Beginn des Tests befinden sich $5\,\mathrm{l}$ Kraftstoff im Tank. Das Tankwarnsignal leuchtet auf, sobald sich nur noch $4{,}9\,\mathrm{l}$ Kraftstoff im Tank befinden.
Ermitteln Sie die Stelle, an der das Tankwarnsignal aufleuchtet.

(8 P)

b) b1) Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung f'' der Funktion f durch die Gleichung

$$f''(x) = 4\,(x-1)(x-3)$$

dargestellt werden kann.

b2) Bestimmen Sie die größte Kraftstoffverbrauchsrate bei der hier betrachteten Testfahrt.

(9 P)

Bei weiteren Testfahrten wird jeweils die Kraftstoffverbrauchsrate direkt ermittelt. Die gewonnenen Messpunkte liegen jeweils auf Graphen, die durch Funktionen der Schar g_a mit

$$g_a(x) = \frac{4}{3}a \cdot x^3 - 8\,a \cdot x^2 + 12\,e^{(a-\frac{1}{a})} \cdot x + 40 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 4 \qquad ; \quad 0 < a \leq 1$$

beschrieben werden können. Dabei gibt x die zurückgelegte Strecke in km und $g_a(x)$ die Kraftstoffverbrauchsrate in $\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{km}}$ an.

c) c1) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion $g_{0,8}$ mit der Schrittweite 0,5 und zeichnen Sie den Graphen.

c2) Untersuchen Sie, ob es ein a gibt, so dass $f'(x) = g_a(x)$ für alle $x \in [0\,;\,4]$ gilt.

(8 P)

d) Für jedes a wird während der Fahrt über die gesamte Teststrecke eine bestimmte Kraftstoffmenge benötigt. Diese Kraftstoffmenge wird mit $M(a)$ bezeichnet.

d1) Veranschaulichen Sie die Kraftstoffmenge $M(0{,}8)$ in Ihrer Skizze aus Teilaufgabe c) und berechnen Sie den Wert $M(0{,}8)$.

d2) Leiten Sie die Gleichung

$$M(a) = -\frac{256}{3} \cdot a + 96 \cdot e^{(a-\frac{1}{a})} + 160$$

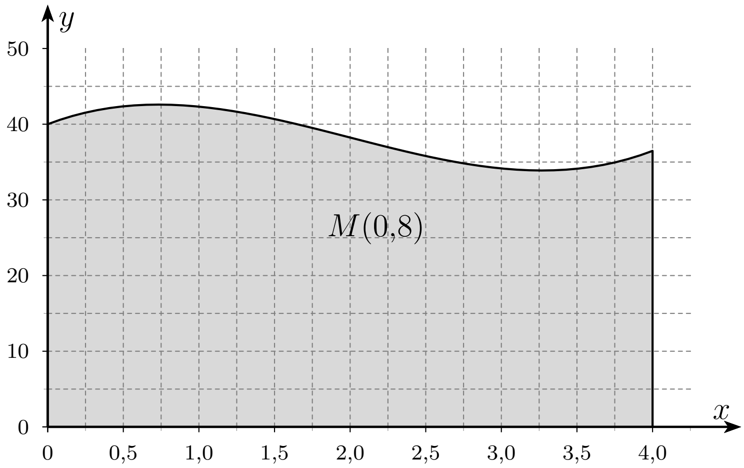
her.

d3) Ermitteln Sie eine lokale Minimalstelle der Funktion M.

(15 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) $f(4) = \dfrac{512}{3} \approx 170{,}67$ Die für die gesamte Strecke benötigte Kraftstoffmenge beträgt ca. $171\,\mathrm{ml}$.	1		
$\frac{f(4)-f(0)}{4} = \dfrac{128}{3} \approx 42{,}67$ Die mittlere Kraftstoffverbrauchsrate auf der Teststrecke beträgt ca. $43\,\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{km}}$. $f'(2{,}5) = \frac{245}{6} \approx 40{,}83$ An der Stelle $2{,}5\,\mathrm{km}$ beträgt die Kraftstoffverbrauchsrate ungefähr $41\,\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{km}}$.	2 2		
Das Signal leuchtet genau dann auf, wenn die benötigte Kraftstoffmenge $100\,\mathrm{ml}$ beträgt. $f(x) = 100 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 + 40x = 100$ Im Intervall $[0;4]$ ist $x \approx 2{,}29$ eine Lösung dieser Gleichung. Ungefähr an der Stelle $2{,}29\,\mathrm{km}$ leuchtet das Tankwarnsignal auf.		3	
Teilaufgabe b) $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x + 40$ $f''(x) = 4x^2 - 16x + 12$ Andererseits gilt $4(x-1)(x-3) = 4(x^2-4x+3) = 4x^2-16x+12 = f''(x)$.	2	2	
Zu ermitteln ist das globale Maximum von f' im Intervall $[0;4]$. Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f' ist $f''(x) = 0$. $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4(x-1)(x-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \vee x = 3$ Da zusätzlich $f'(0) = 40$, $f'(1) = \frac{136}{3} \approx 45{,}33$, $f'(3) = 40$ und $f'(4) = \frac{136}{3} \approx 45{,}33$ gilt, beträgt die größte Kraftstoffverbrauchsrate ungefähr $45{,}33\,\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{km}}$.		2 3	
Teilaufgabe c) (Tabelle siehe unten)	2		

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	40	42,36	42,32	40,68	38,24	35,80	34,15	34,11	36,47

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
	3		
Aus $\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x + 40 = \frac{4}{3}a \cdot x^3 - 8\,a \cdot x^2 + 12\,e^{(a-\frac{1}{a})} \cdot x + 40$ ergibt sich $a = 1$ als möglicher Kandidat. Mit diesem Wert gilt $g_1(x) = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot x^3 - 8 \cdot 1 \cdot x^2 + 12\,e^{(1-\frac{1}{1})} \cdot x + 40 = f'(x)$.			3
Teilaufgabe d) *Die benötigte Kraftstoffmenge muss als Fläche unter dem Graphen markiert werden.* $M(0{,}8) = \int_0^4 g_{0,8}(x)\,dx$ $= \int_0^4 \frac{4}{3} \cdot 0{,}8 \cdot x^3 - 8 \cdot 0{,}8 \cdot x^2 + 12 \cdot e^{0,8-\frac{1}{0,8}} \cdot x + 40\,dx$ $\approx 152{,}95$ Für $a = 0{,}8$ beträgt die bei der gesamten Testfahrt benötigte Kraftstoffmenge ungefähr $153\,\mathrm{ml}$.		4	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
$M(a) = \int_0^4 g_a(x)\,dx$ $= \int_0^4 \frac{4}{3}\cdot a\cdot x^3 - 8\cdot a\cdot x^2 + 12\cdot e^{a-\frac{1}{a}}\cdot x + 40\,dx$ $= \left[\frac{1}{3}\cdot a\cdot x^4 - \frac{8}{3}\cdot a\cdot x^3 + 6\cdot e^{a-\frac{1}{a}}\cdot x^2 + 40\cdot x\right]_0^4$ $= \frac{1}{3}\cdot a\cdot 4^4 - \frac{8}{3}\cdot a\cdot 4^3 + 6\cdot e^{a-\frac{1}{a}}\cdot 4^2 + 40\cdot 4 - 0$ $= \frac{256}{3}\cdot a - \frac{512}{3}\cdot a + 96\cdot e^{a-\frac{1}{a}} + 160$ $= -\frac{256}{3}\cdot a + 96\cdot e^{a-\frac{1}{a}} + 160$		2	3
$M'(a) = -\frac{256}{3} + 96\cdot(1+\frac{1}{a^2})\cdot e^{a-\frac{1}{a}}$ Notwendig für eine lokale Extremstelle a von M ist $M'(a)=0$. $M'(a) = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{256}{3} + 96\cdot\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\cdot e^{a-\frac{1}{a}} = 0$ Eine Lösung dieser Gleichung ist $a \approx 0{,}400$. Da zusätzlich $M''(0{,}400) \approx 250{,}55 > 0$ gilt, liegt ungefähr an der Stelle $0{,}400$ ein lokales Minimum der Funktion M vor.		2	4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Ein Stadtteil benötigt täglich elektrische Energie. Für einen bestimmten Tag ist jedem Zeitpunkt t eine bis dahin an diesem Tag benötigte Energiemenge zugeordnet, die in der Einheit GJ (Gigajoule) angegeben wird. Die zugehörige Änderungsrate wird als Leistung bezeichnet und in der Einheit $\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}}$ (Gigajoule pro Stunde) angegeben.
Die Leistung an dem betrachteten Tag kann durch die Funktion f mit

$$f(t) = -0{,}05\,t^3 + 1{,}5\,t^2 - 7{,}65\,t + 20 \qquad ; \qquad 0 \le t \le 24$$

annähernd beschrieben werden.
Dabei gibt t die seit Mitternacht vergangene Zeit in h (Stunden) und $f(t)$ die Leistung in $\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}}$ an.

a) a1) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion f mit der Schrittweite 2 und zeichnen Sie den Graphen von f.

a2) Berechnen Sie die maximale Leistung an diesem Tag.

a3) Aus Gründen der Netzstabilität darf die Änderungsrate der Leistung einen Wert von $7{,}4\,\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}^2}$ nicht überschreiten. Untersuchen Sie, ob dies an diesem Tag passiert ist.

(14 P)

b) b1) Ermitteln Sie die durchschnittliche Leistung an diesem Tag.

b2) Der Energieversorger des Stadtteils kann eine Leistung von bis zu $57{,}8\,\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}}$ aus eigenen Kraftwerken bereitstellen. In der Zeit, in der eine höhere Leistung benötigt wird, muss die zusätzliche Energiemenge von einem externen Anbieter bezogen werden. Veranschaulichen Sie in Ihrer Zeichnung die Energiemenge, die der Energieversorger an diesem Tag vom externen Anbieter bezogen hat, und berechnen Sie diese Energiemenge.

(9 P)

Gegeben sei die Funktion g mit $g(t) = -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(t-17)}\right) + 83$.

c) c1) An einem anderen Tag kann die Leistung zwischen 14:00 Uhr und 20:00 Uhr durch $g(t)$ mit $14 \le t \le 20$ beschrieben werden. Weisen Sie nach, dass die maximale Leistung in diesem Zeitraum um 17:00 Uhr vorlag.

c2) Zeigen Sie mit Hilfe einer Rechnung, dass der Graph der Funktion g achsensymmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $t = 17$ ist.

(12 P)

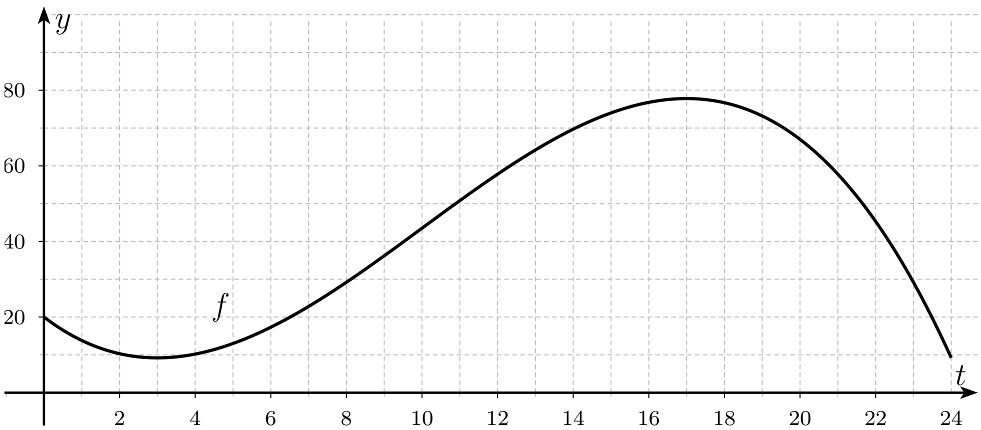
d) Geben Sie eine Reihenfolge von konkreten Verschiebungen, Spiegelungen, Streckungen / Stauchungen an, durch die der Graph der Funktion h mit $h(t) = e^t + e^{-t}$ in den Graphen von g überführt werden kann.

(5 P)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung
Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe a)

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td></tr>
<tr><td>y</td><td>20</td><td>10,3</td><td>10,2</td><td>17,3</td><td>29,2</td><td>43,5</td><td>57,8</td><td>69,7</td><td>76,8</td><td>76,7</td><td>67</td><td>45,3</td><td>9,2</td></tr>
</table>



</td><td>2

3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Zu bestimmen ist das globale Maximum der Funktion f im Intervall $[0; 24]$.
$f'(t) = -0{,}15t^2 + 3t - 7{,}65$
Notwendig für eine lokale Extremstelle t von f ist $f'(t) = 0$.
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}15t^2 + 3t - 7{,}65 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 17$
Weil zusätzlich $f(0) = 20$, $f(3) = 9{,}2$, $f(17) = 77{,}8$ und $f(24) = 9{,}2$ gilt, liegt an der Stelle 17 ein globales Maximum vor.
Die maximale Leistung an diesem Tag beträgt $77{,}8\,\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}}$.

</td><td>1
2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Die größte Änderungsrate der Leistung liegt an den Wendestellen oder an den Rändern des Intervalls $[0; 24]$ vor.
$f''(t) = -0{,}3t + 3$
Notwendig für eine Wendestelle t von f ist $f''(t) = 0$.
$f''(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 10$
Weil zusätzlich $f'(0) = -7{,}65$, $f'(10) = 7{,}35$ und $f'(24) = -22{,}05$ gilt, wird die größte Änderungsrate der Leistung an der Stelle 10 angenommen.
Wegen $f'(10) = 7{,}35$ hat die größte Änderungsrate der Leistung den Wert $7{,}4\,\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}^2}$ an diesem Tag nicht überschritten.

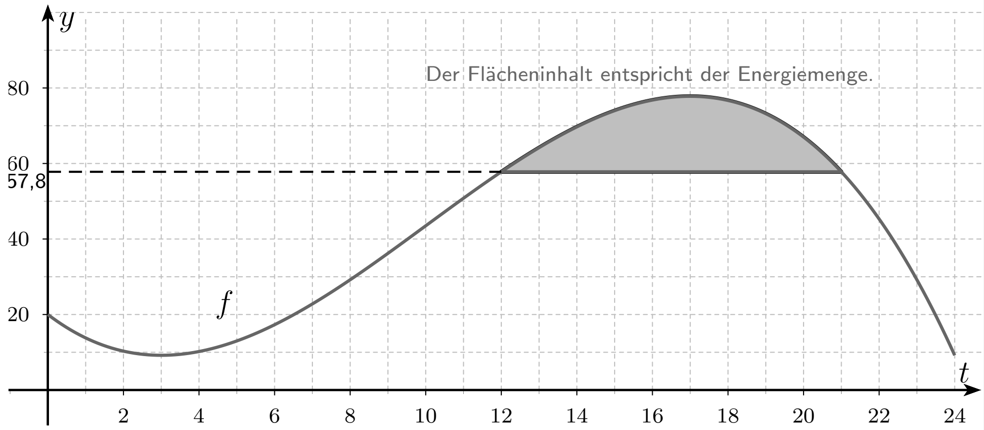
</td><td></td><td>2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe b)

$$\frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} f(t)\,dt = \frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} -0{,}05t^3 + 1{,}5t^2 - 7{,}65t + 20\,dt = 43{,}4$$

Die durchschnittliche Leistung an diesem Tag beträgt $43{,}4\,\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{h}}$.

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

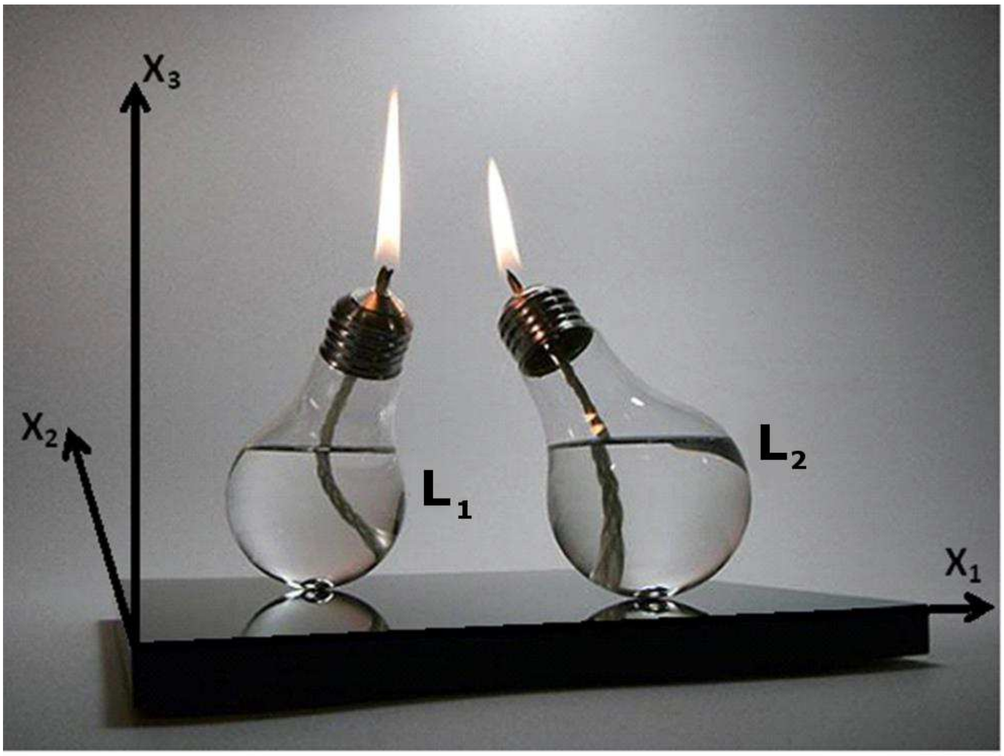
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
		1	
$f(t) = 57{,}8$ $\Leftrightarrow\ -0{,}05t^3 + 1{,}5t^2 - 7{,}65t + 20 = 57{,}8$ $\Leftrightarrow\ t = 12 \lor t = 21 \lor t = -3$		2	
Es folgt $\int_{12}^{21} f(t) - 57{,}8\, dt = \int_{12}^{21} -0{,}05t^3 + 1{,}5t^2 - 7{,}65t + 20 - 57{,}8\, dt \approx 118{,}46.$ Die Energiemenge, die an diesem Tag von dem Anbieter bezogen wurde, beträgt ungefähr $118{,}5\,\mathrm{GJ}$.		3	
Teilaufgabe c) $g'(t) = -0{,}3 \cdot (1{,}1 \cdot e^{1{,}1\cdot t-18{,}7} + (-1{,}1) \cdot e^{-1{,}1\cdot t+18{,}7})$ $= -0{,}33 \cdot (e^{1{,}1\cdot t-18{,}7} - e^{-1{,}1\cdot t+18{,}7})$	2		
Notwendig für eine lokale Extremstelle t von g ist $g'(t) = 0$. $g'(t) = 0$ $\Leftrightarrow\ 0{,}33\,(e^{1{,}1\cdot t-18{,}7} - e^{-1{,}1\cdot t+18{,}7}) = 0$ $\Leftrightarrow\ e^{1{,}1\cdot t-18{,}7} - e^{-1{,}1\cdot t+18{,}7} = 0$ $\Leftrightarrow\ e^{1{,}1\cdot t-18{,}7} = e^{-1{,}1\cdot t+18{,}7}$ $\Leftrightarrow\ 1{,}1 \cdot t - 18{,}7 = -1{,}1 \cdot t + 18{,}7$ $\Leftrightarrow\ t = 17$ *Durch die Lösung der Gleichung $g'(t) = 0$ mit der „Solve-Funktion“ des Taschenrechners wird nicht gezeigt, dass es keine weiteren Lösungen geben kann. Hierzu sind weitere Überlegungen notwendig.*		3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Weil zusätzlich $g(14) \approx 74{,}86$, $g(17) = 82{,}4$ und $g(20) \approx 74{,}86$ gilt, gibt es an der Stelle 17 ein globales Maximum. Daher war die Leistung um 17:00 Uhr maximal.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g ist genau dann achsensymmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $t = 17$, wenn $g(17+t) = g(17-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
$$\begin{aligned} g(17+t) &= -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(17+t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(17+t-17)}\right) + 83 \\ &= -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot t} + e^{-1{,}1\cdot t}\right) + 83 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} g(17-t) &= -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(17-t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(17-t-17)}\right) + 83 \\ &= -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(-t)} + e^{-1{,}1\cdot(-t)}\right) + 83 \\ &= -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot t} + e^{-1{,}1\cdot t}\right) + 83 \\ &= g(17+t) \end{aligned}$$</td><td></td><td></td><td>2
3</td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe d)

Streckung in t-Richtung mit dem Faktor $\frac{10}{11}$
$[h_1(t) = h(1{,}1t) = e^{1{,}1\cdot t} + e^{-1{,}1\cdot t}]$
Verschiebung in t-Richtung um 17 Einheiten nach rechts
$[h_2(t) = h_1(t-17) = e^{1{,}1\cdot(t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(t-17)}]$
Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $0{,}3$
$[h_3(t) = 0{,}3 \cdot h_2(t) = 0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(t-17)}\right)]$
Spiegelung an der x-Achse
$[h_4(t) = -h_3(t) = -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(t-17)}\right)]$
Verschiebung in y-Richtung um 83 Einheiten nach oben
$[g(t) = h_4(t) + 83 = -0{,}3 \cdot \left(e^{1{,}1\cdot(t-17)} + e^{-1{,}1\cdot(t-17)}\right) + 83]$
Die Angabe der Terme wird nicht verlangt.
</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>12</td><td>18</td><td>10</td></tr>
</table>

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Der abgebildete Dekorationsgegenstand besteht aus zwei Öllampen in Glühlampenform, die auf einer Kunststoffplatte befestigt sind.



Für die Erstellung eines Computermodells wurde die Oberfläche der Grundplatte in die x_1x_2-Ebene eines Koordinatensystems gemäß der Abbildung gelegt.
Eine Längeneinheit entspricht $1\,\mathrm{cm}$ in der Realität.

Die unteren Teile der Lampen L_1 und L_2 werden durch die Kugeln

K_1 mit Mittelpunkt $M_1(6 \mid 10 \mid 3)$ und Radius $r_1 = 3$ und

K_2 mit Mittelpunkt $M_2(16 \mid 4 \mid 3)$ und Radius $r_2 = 3$ modelliert.

Die Austrittspunkte der Dochte werden mit D_1 bzw. D_2 bezeichnet.
Der Punkt D_2 hat die Koordinaten $D_2(13{,}5 \mid 9 \mid 7)$.

Die Geraden g_1 bzw. g_2 sind die Symmetrieachsen der Lampen L_1 bzw. L_2.
Die Gerade g_1 verläuft durch M_1 und D_1, die Gerade g_2 verläuft durch M_2 und D_2.

Eine Geradengleichung von g_1 lautet $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) a1) Der Ursprung ist O. Zeigen Sie, dass das Dreieck OM_1M_2 nicht gleichschenklig, aber rechtwinklig mit rechtem Winkel bei M_1 ist.

a2) Zeigen Sie, dass sich die Symmetrieachsen der Lampen nicht schneiden.

a3) Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebene H, die die Gerade g_1 enthält und parallel zur Geraden g_2 ist.

a4) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A, der auf dem kugelförmigen Teil des Glaskörpers der Lampe L_1 und auf der Symmetrieachse g_1 liegt.

(18 P)

b) Der Dekorationsgegenstand soll um einen Spiegel ergänzt werden. Der Spiegel soll sich in der Ebene E befinden, die den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat und den Punkt $P(0\,|\,12\,|\,0)$ enthält.

b1) Bestimmen Sie den Schnittwinkel φ der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene.

b2) Es gibt einen Punkt Q auf dem kugelförmigen Teil der Lampe L_1, der der Ebene E am nächsten liegt. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes Q.

(9 P)

c) Gegeben ist die Ebene F mit $F: 3\,x_1 + 5\,x_2 = 68$, in der M_1 und M_2 liegen.
Ferner ist h die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$ verläuft und parallel zur x_3-Achse ist.

c1) Begründen Sie, dass die Gerade h in der Ebene F liegt.

c2) Dreht man die Ebene F um die Drehachse h um einen Winkel α, so erhält man eine Ebene T, die Tangentialebene an K_1 und K_2 ist.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt als senkrechte Projektion auf die x_1x_2-Ebene und berechnen Sie einen möglichen Drehwinkel α.

c3) Für einen Punkt $B(b_1\,|\,b_2\,|\,3)$ gelten folgende Bedingungen

i. $(b_1 - 16)^2 + (b_2 - 4)^2 = 9$

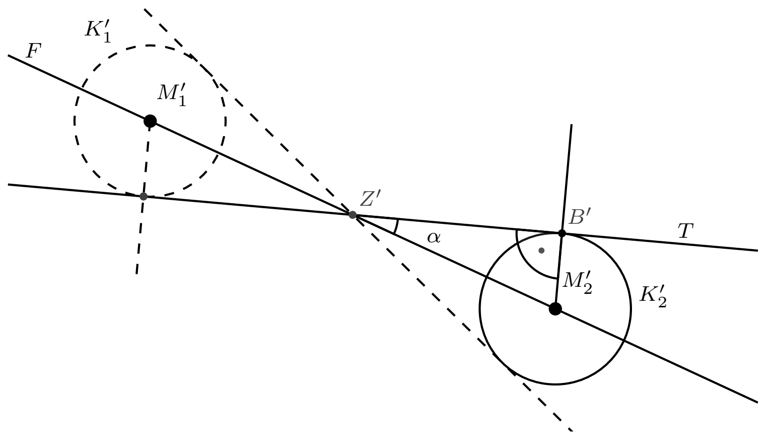
ii. $(b_1 - 16) \cdot (b_1 - 11) + (b_2 - 4) \cdot (b_2 - 7) = 0$

Begründen Sie, dass der Punkt B in einer Tangentialebene an K_2 liegt, die die Gerade h enthält.

(13 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Es gilt $\lvert\overrightarrow{OM_1}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{145}$, $\lvert\overrightarrow{OM_2}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}16\\4\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{281}$ und $\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}10\\-6\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{136}$. Das Dreieck ist nicht gleichschenklig, da alle Seitenlängen verschieden sind.	3		
Mit $\overrightarrow{M_1O} \circ \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}-6\\-10\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}10\\-6\\0\end{pmatrix} = 0$ folgt, dass das Dreieck einen rechten Winkel bei M_1 besitzt.	2		
Es ist $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}16\\4\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2{,}5\\5\\4\end{pmatrix}$.	1		
$g_1 \cap g_2 : \begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\4\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2{,}5\\5\\4\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{rcl} r + 2{,}5\,s & = & 10 \\ -2\,r - 5\,s & = & -6 \\ r - 4\,s & = & 0 \end{array}\right\rvert$ Dieses LGS besitzt keine Lösung. Die Geraden schneiden sich daher nicht.	3		
Ein Normalenvektor der Ebene H ist senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren von g_1 und g_2. Es ist $\begin{pmatrix}-2{,}5\\5\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\6{,}5\\0\end{pmatrix} = 6{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Die Ebene H mit $H: 2\,x_1 + 1\,x_2 = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 10 = 22$ ist diejenige Ebene, die die Gerade g_1 enthält und parallel zur Geraden g_2 verläuft.		4	
Mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ der Geraden g_1 gilt für die Schnittpunkte A_1 und A_2 der Kugel K_1 mit der Geraden g_1 $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OM_1} - 3 \cdot \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$ und $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OM_1} + 3 \cdot \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Da der Punkt A die kleinere x_3-Koordinate der beiden Schnittpunkte haben muss, ist A_1 der gesuchte Punkt A.		1	
$\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}4{,}78\\12{,}45\\1{,}78\end{pmatrix}$ Der Punkt A hat ungefähr die Koordinaten $A(4{,}78 \mid 12{,}45 \mid 1{,}78)$.		2	
Teilaufgabe b) Der Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene. Damit gilt für den Schnittwinkel φ $\cos(\varphi) = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{1}{3}$. Daraus folgt $\varphi \approx 70{,}53°$.	3		
Eine Koordinatenform von E ist $E: -2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 2 \cdot 12 = 24$.		1	
Die Gerade m mit $m: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ verläuft durch den Mittelpunkt M_1 und ist zur Ebene E orthogonal. $m \cap E:$ $-2 \cdot (6 - 2\,s) + 2 \cdot (10 + 2\,s) + (3 + s) = 24$ $\Leftrightarrow\ 9\,s + 11 = 24$ $\Leftrightarrow\ s = \frac{13}{9}$ Der Schnittpunkt S der Geraden m und der Ebene E ist $S(\frac{28}{9} \mid \frac{116}{9} \mid \frac{40}{9})$.		3	
Wegen $\lvert\overrightarrow{M_1S}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix}-\frac{26}{9}\\ \frac{26}{9}\\ \frac{13}{9}\end{pmatrix} \right\rvert = \frac{13}{3}$ ist $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM_1} + 3 \cdot \frac{3}{13}\,\overrightarrow{M_1S} = \begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\12\\4\end{pmatrix}$. Der Punkt auf der Lampe ist $Q(4 \mid 12 \mid 4)$.		2	

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
Wegen $\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ ist h parallel zu F.
Da mit M_1 und M_2 auch der Mittelpunkt Z der Verbindungsstrecke $\overline{M_1M_2}$ in der Ebene F liegt, liegt auch die Gerade h in der Ebene F.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>

Das Dreieck ZM_2B ist rechtwinklig. Mit $|\overrightarrow{M_2B}| = r = 3$ und $|\overrightarrow{ZM_2}| = \frac{1}{2}\sqrt{136} = \sqrt{34}$ gilt für den Winkel α daher $\sin(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0{,}51$ und damit $\alpha \approx 30{,}96°$.</td><td></td><td></td><td>3
3</td></tr>
<tr><td>Es gilt $(b_1 - 16)^2 + (b_2 - 4)^2 = 9 \Leftrightarrow |\overrightarrow{M_2B}|^2 = 3^2$.
Der Punkt B liegt daher auf der Kugel K_2.

$Z(11\,|\,7\,|\,3)$ ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke $\overline{M_1M_2}$.
$(b_1 - 16)\cdot(b_1 - 11) + (b_2 - 4)\cdot(b_2 - 7) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_2B} \circ \overrightarrow{ZB} = 0$

Daher ist die Gerade t, die durch die Punkte Z und B verläuft, eine Tangente an der Kugel K_2 mit dem Berührpunkt B. Da sowohl M_2 als auch B die x_3-Koordinate 3 haben, ist der Vektor $\overrightarrow{M_2B}$ parallel zur x_1x_2-Ebene.
B ist daher auch Berührpunkt einer Tangentialebene, die die senkrecht zu der x_1x_2-Ebene verlaufende Gerade h enthält.</td><td></td><td></td><td>1

1

2</td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>12</td><td>18</td><td>10</td></tr>
</table>

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

Eine Fluglinie bietet täglich den Flug ZA2017 an, bei dem ein Flugzeug eingesetzt wird, das bis zu 120 Passagiere befördern kann.

a) Der heutige Flug ZA2017 ist voll besetzt, 40 Passagiere sind weiblich. Jeder Passagier hat entweder ein veganes oder aber ein nichtveganes Mittagessen bestellt. Dabei haben 55 % der weiblichen Passagiere das vegane Essen und 75 % der männlichen Passagiere das nichtvegane Gericht bestellt.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

a2) Bestimmen Sie, wie viele vegane Mittagessen auf diesem Flug ausgegeben werden.

a3) Ein zufällig ausgewählter Passagier hat ein veganes Gericht bestellt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weiblich ist.

(9 P)

b) Die Fluglinie geht davon aus, dass bei den Flügen ZA2017 durchschnittlich 6 % der gebuchten Flüge von den Kunden nicht angetreten werden.
Sie hat daher den morgigen Flug überbucht und genau 125 Buchungen angenommen.
Sollten mehr Bucher (Personen, die diesen Flug gebucht haben) zum Abflug erscheinen als Sitzplätze zur Verfügung stehen, so werden denjenigen Buchern, die nicht befördert werden können, die Flugkosten erstattet und zusätzlich 900 Euro Entschädigung gezahlt.

Die Zufallsgröße Z gibt im Folgenden die Anzahl der zum Abflug erschienenen Bucher an. Gehen Sie davon aus, dass Z binomialverteilt ist.

b1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Flugzeug nicht voll besetzt sein wird.

b2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 8 % der Bucher nicht erscheinen werden.

b3) Bestimmen Sie die durchschnittlich zu erwartende Höhe an Entschädigungszahlungen pro Flug.

b4) Begründen Sie anhand eines Beispiels, warum die Annahme einer Binomialverteilung für die Zufallsgröße Z kritisch zu betrachten ist.

(15 P)

c) Da die Fluglinie bei Flug ZA2017 in den zurückliegenden Wochen häufig Fluggäste wegen Überbuchungen abweisen und Entschädigungen auszahlen musste, vermutet das Management, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bucher den von ihm gebuchten Flug nicht antritt, niedriger als 6 % ist. Dazu sollen 1250 Buchungen ausgewertet werden.
Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest, der das Ziel hat, die Vermutung des Managements auf einem Signifikanzniveau von 5 % zu untermauern.

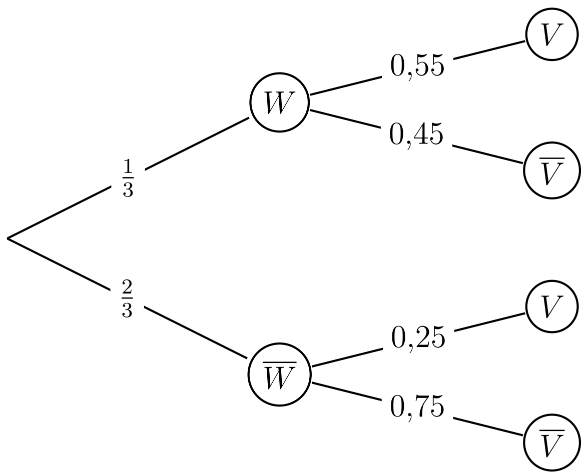
(9 P)

d) Bei der Durchführung des Tests haben von den 1250 Buchern 55 den Flug nicht angetreten. Aus diesem Stichprobenergebnis soll nun die „Nichtantrittswahrscheinlichkeit“ abgeschätzt werden.

d1) Geben Sie das Kriterium an, das eine Zahl p erfüllen muss, damit sie im 95 %-Konfidenzintervall zum Stichprobenergebnis 55 liegt.

d2) Bestimmen Sie zu dem Testergebnis die untere Grenze des 95 %-Konfidenzintervalls auf 3 Nachkommastellen genau.

(7 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) W: „Die Person ist weiblich." V: „Die Person hat ein veganes Essen bestellt."  *Es sind auch Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten möglich.*	4		
$0{,}55 \cdot 40 + 0{,}25 \cdot 80 = 42$ Es werden 42 vegane Gerichte ausgegeben.	2		
$P_V(W) = \frac{P(W \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}55}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}55 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}25} = \frac{11}{21} \approx 0{,}524 = 52{,}4\,\%$		3	
Teilaufgabe b) Z ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 125$ und $p = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Flugzeug nicht voll besetzt ist, beträgt $P(Z \leq 119) \approx 0{,}767 = 76{,}7\,\%$.	3		
8 % von 125 = 10 $P(Z = 115) \approx 0{,}087$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 115 Passagiere die Reise antreten werden (weil genau 10 Bucher nicht erscheinen), beträgt ca. 8,7 %.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Die Zufallsgröße Y gebe die Höhe der bei einem Flug anfallenden Entschädigungszahlungen in Euro an.		1	
Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y: Den möglichen Werten von Y sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. $$\begin{array}{lclcl} P(Y=0) & = & P(Z \leq 120) & \approx & 0{,}8757 \\ P(Y=900) & = & P(Z=121) & \approx & 0{,}0704 \\ P(Y=1800) & = & P(Z=122) & \approx & 0{,}0362 \\ P(Y=2700) & = & P(Z=123) & \approx & 0{,}0138 \\ P(Y=3600) & = & P(Z=124) & \approx & 0{,}0035 \\ P(Y=4500) & = & P(Z=125) & \approx & 0{,}0004 \end{array}$$		3	
$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \cdot P(Y=0) + 900 \cdot P(Y=900) + 1800 \cdot P(Y=1800) \\ &\quad +2700 \cdot P(Y=2700) + 3600 \cdot P(Y=3600) \\ &\quad +4500 \cdot P(Y=4500) \approx 180{,}25 \end{aligned}$$ Die zu erwartende Höhe der Entschädigungszahlung pro Flug beträgt ungefähr 180,25 Euro.		2	
Die Modellierung durch eine n-stufige Bernoulli-Kette, bei der die Trefferwahrscheinlichkeit auf jeder Stufe gleich bleiben muss, ist beispielsweise aus folgendem Grund kritisch zu betrachten: Falls eine Gruppe von Buchern mit Hilfe eines Zubringerfluges zum Flug ZA2017 gebracht wird, so kann die Wahrscheinlichkeit, dass eine einzelne Person aus dieser Gruppe zum Abflug erscheint, nicht als dieselbe angenommen werden wie für eine Person, die auf andere Art und Weise zum Abflug anreist.			3

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe c) X_p sei eine mit den Parametern p und $n = 1250$ binomialverteilte Zufallsgröße. X_p gebe die Anzahl der nicht wahrgenommenen Flüge bei 1250 Buchungen an.	2		
Weil die Hypothese $H_1 : p < 0{,}06$ gestützt werden soll, wird $H_0 : p \geq 0{,}06$ als Nullhypothese gewählt.	1		
Wenn sehr wenige Passagiere ihren Flug nicht antreten, wird H_0 verworfen. Es wird also ein linksseitiger Test durchgeführt. Der Verwerfungsbereich ist $\{0; 1; \ldots; k\}$ mit einer geeigneten Zahl k.		2	
Gesucht ist die größte natürliche Zahl k, für die die Ungleichung $P(X_p \leq k) \leq 0{,}05$ erfüllt ist. Wenn p größer als 0,06 ist, gilt $P(X_p \leq k) < P(X_{0,06} \leq k)$. Aus $P(X_{0,06} \leq 60) \approx 0{,}0387$ und $P(X_{0,06} \leq 61) \approx 0{,}0506$ ergibt sich $k = 60$.		3	
Wenn also höchstens 60 der 1250 Passagiere den Flug nicht antreten, kann man davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Flug nicht angetreten wird, kleiner als 6 % ist. Damit wird die Vermutung des Managements gestützt.		1	
Teilaufgabe d) Das 95 %-Konfidenzintervall enthält alle Wahrscheinlichkeiten p_0, für die die Hypothese $H : p = p_0$ bei einem zweiseitigen Test bei einem Testergebnis von 55 auf dem Signifikanzniveau von 5 % nicht verworfen (also beibehalten) wird. *Alternativ: Das 95 %-Konfidenzintervall enthält alle Wahrscheinlichkeiten p_0, mit denen das Testergebnis 55 verträglich ist in dem Sinne, dass das Histogrammrechteck für $X_{p_0} = 55$ vollständig innerhalb der symmetrisch um den Erwartungswert gelegenen 95 %-Umgebung der Verteilung X_{p_0} liegt. Dabei ist X_{p_0} binomialverteilt mit den Parametern $n = 1250$ und $p = p_0$.*			3

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Die kleinste Wahrscheinlichkeit p_{min} des 95 %-Konfidenzintervalls ist die Wahrscheinlichkeit, für die $P(X_{p_{min}} \leq 55) = 0{,}975$ gilt. Durch systematisches Probieren mit dem TR erhält man:			

p	$P(X_p \leq 55)$
0,035	0,96087
0,034	0,97519
0,0341	0,97398

	I	II	III
Damit liegt die Untergrenze des 95 %-Konfidenzintervalls etwa bei 0,034.			4

Alternativ: (Aufstellen einer Gleichung für die untere Intervallgrenze nach Näherung von X_p durch die Normalverteilung):

$$\begin{aligned} P(X_{p_{min}} \leq 55) &= 0{,}975 \\ \Phi\left(\tfrac{55{,}5-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}975 \\ \tfrac{55{,}5-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0{,}975) \approx 1{,}96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 55{,}5 &\approx \mu + 1{,}96\sigma = 1250 \cdot p_{min} + 1{,}96\sqrt{1250 \cdot p_{min} \cdot (1 - p_{min})} \\ p_{min} &\approx 0{,}0343 \end{aligned}$$

Für dieses p ist die Laplace-Bedingung wegen
$\sigma = \sqrt{1250 \cdot 0{,}0343 \cdot (1 - 0{,}0343)} \approx 6{,}435 > 3$
erfüllt, so dass die Näherung gerechtfertigt ist.

Dabei kann die Gleichung mit Hilfe des TR gelöst werden. Die Abweichung zum obigen Ergebnis ist durch die Näherung begründet.

	I	II	III
Punktsummen	12	18	10