Aufgabe 1 CAS

Bei der Untersuchung der Population einer Tierart wurden Daten zu Beginn der Beobachtung und jeweils am Jahresende über einen Zeitraum von 24 Jahren erfasst.

Folgende Werte sollen zu einer kurzen Auswertung genutzt werden:
Zu Beginn der Messung wurden 400 Tiere gezählt, der höchste Wert lag nach 8 Jahren bei 2100 Tieren. Danach sank die Population bis zum Ende des 14. Jahres auf eine Minimalzahl von 1600 Tieren, um dann wieder auf einen Maximalwert am Ende des 17. Jahres zu steigen.

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, die die Population in Abhängigkeit von der Zeit gemäß den oben angegebenen Daten modelliert, und fertigen Sie eine Skizze der Funktion an. (6 P)

Arbeiten Sie im Folgenden mit

$$f(t) = -0{,}0466 \cdot t^5 + 2{,}3167 \cdot t^4 - 40{,}07 \cdot t^3 + 265{,}2 \cdot t^2 - 340 \cdot t + 400$$

weiter, wobei t die Anzahl der Jahre nach dem Beobachtungsbeginn angibt.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung der oben angegebenen Funktion f die niedrigste vorkommende Population innerhalb der ersten 17 Jahre. Berechnen Sie den Beobachtungszeitpunkt in diesem Zeitraum, an dem die Population am schnellsten zunimmt. (10 P)

c) Für das Intervall $[18; 24]$ wurde eine Ersatzfunktion g mit $g(t) = -8{,}9713 \cdot t^2 + 166{,}6976 \cdot t + 1566{,}7456$ festgesetzt.

Die Funktion g beschreibt die zeitliche Entwicklung der Population besser als die Funktion f.
Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.

Untersuchen Sie die Problematik des Übergangs von der Funktion f zur Funktion g an der Stelle $t = 18$ im Sachzusammenhang. (9 P)

Die rasante Abnahme der Population am Ende des Beobachtungszeitraumes wurde durch das Auftreten eines neuen Virusstammes verursacht.

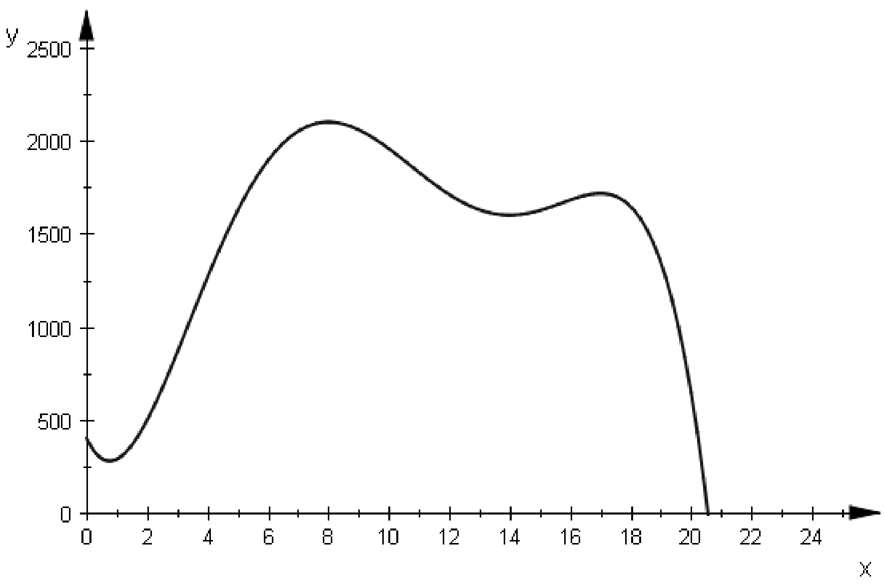
Die zeitlichen Änderungsraten der Viruskonzentration in einem Tierkörper können mittels der Funktionenschar f_k mit der Gleichung

$$f_k(t) = \frac{k}{t^2 - 4t + k}$$

beschrieben werden, wobei der Parameter k von der körperlichen Konstitution des Tieres abhängt und größer als 4 ist. Die Variable t gibt hier die Zeit in Stunden an.

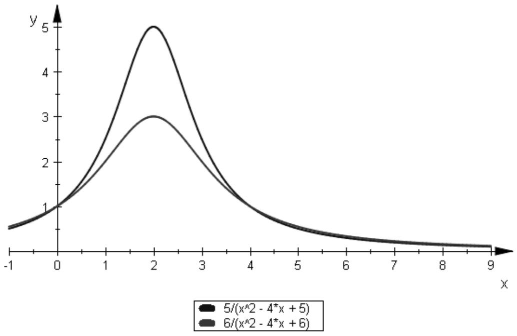
d) Begründen Sie, dass der Zeitpunkt, an dem die maximale Änderungsrate der Virenkonzentration erreicht wird, unabhängig vom Individuum, d.h. unabhängig von k, ist.

Weisen Sie nach, dass es 2 Zeitpunkte gibt, an denen die Änderungsraten der Virenkonzentration für alle Individuen unabhängig von k gleich sind, und geben Sie diese Zeitpunkte an. (5 P)

Aufg.	Erwartete Leistung	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Aus dem Text ergeben sich folgende 6 Bedingungen: Der Graph von f enthält die Punkte $P(0\,\vert\,400)$, $Q(8\,\vert\,2100)$ und $R(14\,\vert\,1600)$ und hat an den Stellen 8, 14 und 17 Extremwerte. Damit gilt $f(0)=400$, $f(8)=2100$, $f(14)=1600$, $f'(8)=0$, $f'(14)=0$ und $f'(17)=0$.	3		
	Da der Term einer ganzrationale Funktion 5. Grades 6 Koeffizienten hat, kann man für f folgenden Ansatz verwenden: $f(t)=a_5\,t^5+a_4\,t^4+a_3\,t^3+a_2\,t^2+a_1\,t+a_0$.	1		
	CAS liefert die Lösung $a_5=-\frac{14305}{306936}$, $a_4=\frac{90295}{38976}$, $a_3=-\frac{8199785}{204624}$, $a_2=\frac{162824905}{613872}$, $a_1=-\frac{621265}{1827}$, $a_0=400$.	1		
		1		

b)	Die niedrigste vorkommende Anzahl der Population entspricht dem minimalen Funktionswert von *f*. Notwendig für das Vorliegen eines Minimums von *f* an der Stelle t_E ist $f'(t_E) = 0$.	1		
	CAS liefert als Näherungswerte für die Lösungen dieser Gleichung $t_{E1} \approx 0{,}8;\ t_{E2} \approx 8;\ t_{E3} \approx 14;\ t_{E4} \approx 17$.	1		
	Der Vergleich der zugehörigen Funktionswerte liefert das gesuchte Minimum. $f(0{,}8) \approx 278,\ f(8) \approx 2099,\ f(14) \approx 1603,\ f(17) \approx 1727$ Das gesuchte Minimum ist 278 zum Zeitpunkt $t_{E_1} \approx 0{,}8$.	2		
	(Alternativ kann mit einer hinreichenden Bedingung argumentiert werden.)			
	Die höchste Zunahme der Population entspricht dem maximalen Funktionswert von f'. Diese liegt an einem Wendepunkt des Graphen von *f* vor. Notwendig für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle t_W ist $f''(t_W) = 0$. CAS liefert für diese Gleichung folgende Näherungen als Lösungen $t_{W1} \approx 3{,}37;\ t_{W2} \approx 10{,}73;\ t_{W3} \approx 15{,}73$.	2		
	Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist $f''(t_W) = 0$ und $f'''(t_W) \neq 0$. Es werden die 3. Ableitungen an den Stellen obiger Kandidaten für Wendestellen mit CAS berechnet: $f'''(3{,}37) \approx -84{,}8 < 0;\ f'''(10{,}73) \approx 34{,}3 > 0;$ $f'''(15{,}73) \approx -57{,}6 < 0.$ Da der Zeitpunkt der höchsten Zunahme gesucht ist, sind zwei Funktionswerte von f' an den Stellen 3,37 und 15,73 zu vergleichen. Wegen $f'(3{,}37) \approx 406{,}8$ und $f'(15{,}73) \approx 61{,}8$ ist zum Zeitpunkt $t_W = 3{,}37$ die höchste Zunahme zu verzeichnen. Am linken Rand des Intervalls liegt keine positive Steigung vor. Am rechten Rand beträgt die Steigung nur $f'(17) \approx 3{,}5$. Ein Randmaximum ist nicht vorhanden.		4	

c)	Die Funktion f beschreibt den Sachverhalt im Intervall [18; 24] nicht richtig, weil der Graph rechts von der Nullstelle 20,58 in den 4. Quadranten übergeht. Damit nimmt die Funktion negative Werte an, die Anzahl der Tiere kann aber nicht negativ sein.		2	
	Die Funktionswerte der Funktion g sind im gesamten Intervall positiv und beschreiben wie f eine Abnahme der Population, die jedoch deutlich langsamer erfolgt.		2	
	Mittels CAS werden die Funktionswerte $f(18)$ und $g(18)$ berechnet. Man erhält 1660,5904 bzw. 1660,6012. Die Werte stimmen annähernd überein. Da die Population nur ganzzahlige Werte annehmen kann, beschreiben beide Funktionen den Sachverhalt an der Stelle 18 adäquat.		2	
	Da die mit CAS ermittelten Werte der 1. Ableitungen $f'(18) \approx -156,2704$ und $g'(18) \approx -156,2692$ ebenfalls annähernd gleich sind, beschreiben beide Funktionen die gleiche Änderungsrate zu diesem Zeitpunkt. Die 2. Ableitungen $f''(18) \approx -225,25$ und $g''(18) \approx -17,94$ stimmen nicht überein, so dass sich die Änderungsrate der Population zum Zeitpunkt $t = 18$ sprunghaft verändern müsste. Dieser Sprung lässt die Funktion g ebenfalls als ungeeignet erscheinen.			3

<table>
<tr><td>d)</td><td>


(*Die Skizze ist nur zur Veranschaulichung angegeben, sie ist nicht verlangt.*)
Notwendig für das Vorliegen eines Maximums von f_k an der Stelle t_E ist $f_k'(t_E) = 0$.
CAS liefert die Ableitung $f_k'(t) = k\dfrac{-2t+4}{\left(t^2-4t+k\right)^2}$.
Der Zähler wird nur bei t = 2 Null und der Nenner ist stets positiv, da er als $((t-2)^2+k-4)^2$ geschrieben werden kann und k > 4 vorausgesetzt ist.
Wenn ein Maximum existiert, dann liegt es an der Stelle 2, und zwar unabhängig von k.

Zum Nachweis gemeinsamer Punkte setzt man die Funktionsterme $f_a(t)$ und $f_b(t)$ für $a,b > 4$ gleich.
CAS liefert die Lösungen t = 0, t = 4 und für den Fall $a - b$ = 0 die Identität der Funktionen.
Die Zeitpunkte 0 und 4 sind parameterunabhängig.
</td><td></td><td>3

2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>12</td><td>15</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 2 CAS

Eine Firma produziert verschiedene Energiesparlampen, die aus einem Glaskörper und einem Metallsockel bestehen. Die Formen der Glaskörper können durch Rotation von Funktionsgraphen um die x-Achse beschrieben werden. Dazu betrachtet man die Funktionenschar mit den Gleichungen

$$f_k(x) = 5\cdot(k\cdot x-1)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\text{ , } k>0,7$$

zwischen der jeweiligen Nullstelle x_k der Graphen und x = 8.

a) Um einen ersten Eindruck von den Formen zu bekommen, skizzieren Sie den Graphen zu f_k im Intervall $[x_k;8]$ für mehrere k. Geben Sie die Bedeutung des Parameters k an. (4 P)

b) Berechnen Sie für jedes k die Höhe des zum Graphen von f_k gehörenden Glaskörpers.

Jeder Graph der Schar hat einen Punkt, bei dem der Radius des Glaskörpers maximal wird.

Bestimmen Sie diesen Radius für jedes k.

Verbindet man die zugehörigen Punkte der Graphen, so entsteht eine neue Kurve. Bestimmen Sie deren Funktionsgleichung.

Ermitteln Sie die oder den Parameter k, für die oder den der maximale Radius 5 beträgt.

Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktionenschar f_k. Die hinreichende Bedingung muss nicht überprüft werden. (11 P)

c) Das Modell „Birne" wird durch die Rotation des Graphen zu f_1 um die x-Achse beschrieben.

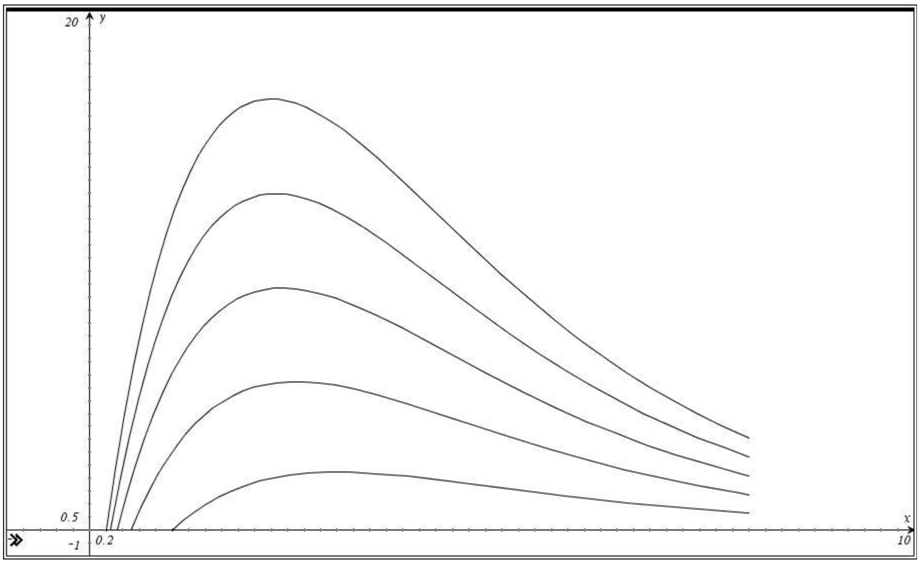
Der Glaskörper dieses Modells soll mit einem besonderen Gas gefüllt werden. Berechnen Sie das Volumen (ohne Maßeinheiten, die Glasdicke ist zu vernachlässigen). (2 P)

d) Bestimmen Sie den Punkt am Graphen zu f_1 im Intervall $[x_1; 8]$, der die vom Betrag her größte Steigung aufweist. (5 P)

e) Das Modell „Birne" soll mit einer Spezialbeschichtung versehen werden. Für die Bestimmung des zu beschichtenden Oberflächeninhalts ist es einfacher, den Graphen von f_1 durch den einer ganzrationalen Funktion zu nähern.

Geben Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion an, deren Graph sich im Intervall $[x_1; 8]$ dem Graphen zu f_1 annähert.

Begründen Sie Ihren Ansatz und beurteilen Sie die Qualität Ihrer Näherung. (8 P)

Aufg.	**Erwartete Leistung**	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)				
	In dieser Skizze durchläuft k die ganzzahligen Werte von 1 bis 5. Andere Werte von k können gewählt werden.	2		
	Mit steigendem *k* liegen die Nullstelle und das Maximum weiter links und das Maximum liegt höher. *Im Kontext der Aufgabe kann man alternativ sagen:* *Je größer k, desto höher und breiter ist der Glaskörper.*		2	
b)	Maximale Höhe: Die maximale Höhe ist der Abstand zwischen der Nullstelle der Funktion f_k und 8. $5(kx-1)\,e^{-\frac{1}{2}x}=0$. Da $e^{-\frac{1}{2}x}\neq 0$ gilt, betrachtet man $k\,x-1=0$, also $x=\frac{1}{k}$. Die maximale Höhe ist somit $8-\frac{1}{k}$.	2		

	Maximaler Radius: Der maximale Radius befindet sich an der Stelle, an der die Funktion f_k ihr Maximum besitzt. $f_k'(x) = 5 \cdot \left(-\frac{k \cdot x}{2} + k + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ $f_k''(x) = 5 \cdot \left(\frac{k \cdot x}{4} - k - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ Es muss $f_k'(x_E) = 0$ gelten. Mittels CAS ergibt sich $f_k'(x_E) = 0$ für $x_E = \frac{2 \cdot k + 1}{k} = 2 + \frac{1}{k}$. Es ist $f_k''\left(\frac{2 \cdot k + 1}{k}\right) = \frac{-5 \cdot k}{2} \cdot e^{-1-\frac{1}{2 \cdot k}} < 0$, da der Exponentialterm und k größer als 0 sind. Daher beträgt der maximale Radius $f_k\left(\frac{2 \cdot k + 1}{k}\right) = 10 \cdot k \cdot e^{-1-\frac{1}{2 \cdot k}}$.	1 1 1 1		
	Lage der Hochpunkte: Alle Hochpunkte liegen an den Stellen $x_{k,E} = 2 + \frac{1}{k}$. Damit gilt $k = \frac{1}{x_{k,E} - 2}$. Eingesetzt in f_k ergibt sich die Ortskurve h mit $h(x) = 5\left(\left(\frac{1}{x-2}\right)x - 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 5 \cdot \left(\frac{2}{x-2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$	1	1	
	Der maximale Radius von 5 wird erreicht für $5 = 10 \cdot k \cdot e^{\frac{-1}{2 \cdot k} - 1}$. Dies entspricht $k \approx 1{,}796$.		2	
	Wendestelle: Es muss $f_k''(x_{k,W}) = 0$ gelten. Mittels CAS ergibt sich $f_k''(x_{k,W}) = 0$ für $x_{k,W} = \frac{4 \cdot k + 1}{k} = 4 + \frac{1}{k}$.	1		

c)	Es ist das Rotationsvolumen von der Nullstelle bis zur Sockelstelle bei Rotation um die x-Achse zu bestimmen. $V=\pi\cdot\int_{\frac{1}{k}}^{8}\left(f_k(x)\right)^2\,dx$ Für $k = 1$ ergibt sich $V=25\cdot\left(2\cdot e^7-65\right)\cdot e^{-8}\cdot\pi\approx 56{,}07$. Das Rotationsvolumen beträgt ca. 56.	2		
d)	Um die betragsmäßig größte Steigung zu ermitteln, muss die Wendestelle betrachtet werden. Aus b) entnimmt man $x_{k,W}=\frac{4\cdot k+1}{k}=4+\frac{1}{k}$. Für $k = 1$ folgt $x_{1,W}=5,\quad f_1\left(x_{1,W}\right)=20\cdot e^{-\frac{5}{2}},\quad f_1'\left(x_{1,W}\right)=-5\cdot e^{-\frac{5}{2}}$. Die betragsmäßig größte Steigung kann aber auch am Rand des Intervalls vorhanden sein. $\left\lvert f_1'(1)\right\rvert=\left\lvert 5\cdot e^{-\frac{1}{2}}\right\rvert\approx 3{,}03$ $\left\lvert f_1'\left(x_{1,W}\right)\right\rvert=\left\lvert -5\cdot e^{-\frac{5}{2}}\right\rvert\approx 0{,}41$ $\left\lvert f_1'(8)\right\rvert=\left\lvert -\frac{25}{2}\cdot e^{-4}\right\rvert\approx 0{,}23$ Im Punkt (1|0) ist mit 3,03 die Steigung dem Betrage nach am größten.		1 1	3

e)	Um eine gute Näherung zu gewährleisten, sollten der Schnittpunkt mit der x-Achse und der Sockelanschlusspunkt (bei $x = 8$) auch auf dem Graphen der Näherungsfunktion liegen. Der Extrempunkt des Graphen zu f_1 soll auch Extrempunkt des Graphen der Näherungsfunktion sein. Entsprechendes soll für den Wendepunkt gelten. Daher bietet sich eine ganzrationale Funktion 5. Grades an.		2	
	Eine Parabel kann nur den ersten Teil bis zum Maximum befriedigend nähern (siehe auch entsprechende Nicht-CAS-Aufgabe), mit Funktionen 3. Grades ist entweder nur der Wendepunkt oder der Sockelanschlusspunkt gut genähert, entsprechende Ansätze sind aber mit Teilpunkten zu bewerten. Allgemeiner Ansatz $p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + g$ Bedingungen			
	Sockelstelle $p(8) = f_1(8) = 35 \cdot e^{-4} \approx 0{,}641$		1	
	Nullstelle $p(1) = f_1(1) = 0$		1	
	Extremum $p(3) = f_1(3) = 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 2{,}231$ $p'(3) = f_1'(3) = 0$		1	
	Wendepunkt $p(5) = f_1(5) = 20 \cdot e^{-\frac{5}{2}} \approx 1{,}642$ $p''(5) = f_1''(5) = 0$		1	
	Mittels CAS erhält man folgende Lösung für dieses Gleichungssystem $p(x) = 0{,}001129 \cdot x^5 - 0{,}033243 \cdot x^4 + 0{,}395417 \cdot x^3$ $-2{,}35578 \cdot x^2 + 6{,}59146 \cdot x - 4{,}59899.$ *Setzt man die gerundeten Werte ein, erhält man leicht abweichende Lösungen.*		1	
	Der Graph zu p nähert sich dem zu f_1 im vorgegebenen Intervall sehr gut an. *Mittels des Funktionenplotters kann man sich sehr schnell von der Güte der Näherung überzeugen; eine Skizze oder zumindest Anmerkung wird hier erwartet.*		1	
		12	15	3

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar f_k (mit $k > 0$) durch die Funktionsgleichung:

$$f_k(t) = 20 \cdot e^{kt} - \frac{1}{10} \cdot e^{3kt} = 20 \cdot e^{kt} - \frac{1}{10} \cdot (e^{kt})^3 \ ; t \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie für jedes k den Graphen zu f_k auf Wendepunkte.

Skizzieren Sie für $k = 0{,}1$ den zugehörigen Graphen im I. Quadranten. Legen Sie dazu eine geeignete Einteilung für jede Achse fest.

(Zur Kontrolle: Wendepunkte $W_k\left(\frac{\ln\left(\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}\right)}{k} \middle| 83{,}81\right)$) (12 P)

b) Im Wendepunkt werde die Tangente an den Graphen von $f_{0,1}$ gelegt.

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Wendetangente und der t-Achse.

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von der Wendetangente, dem Funktionsgraphen und der positiven t-Achse zwischen der Nullstelle der Tangente und der Nullstelle des Funktionsgraphen begrenzt wird.

Erläutern Sie Ihr Vorgehen. (12 P)

c) Der Graph zu $f_{0,1}$ stellt die Entwicklung einer Kultur von Hefepilzen im Verlauf der Zeit t dar, wobei t die Zeit in Tagen und $f_{0,1}(t)$ die Masse der Hefekultur in Gramm angibt. Die Hefekultur wurde zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ angesetzt.

Beschreiben Sie den Verlauf der Entwicklung dieser Hefekultur.

Bestimmen Sie außerdem

- den Zeitpunkt t_1, an dem sich die Hefepilze am stärksten vermehren;
- den Zeitpunkt t_2, ab dem keine lebenden Hefepilze mehr vorhanden sind. (3 P)

d) Jedes Gramm der in c) eingeführten Hefekultur erzeugt pro Tag 2 Gramm Alkohol.

Berechnen Sie die im gesamten Zeitraum vom Ansetzen der Hefekultur bis zum völligen Aussterben der Hefepilze erzeugte Alkoholmasse. (3 P)

Aufg	Erwartete Leistung	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Für die Funktionsgleichungen der Ableitungen erhält man $f_k(t) = 20\,e^{kt} - \frac{1}{10}\,e^{3kt}$, $f_k'(t) = 20k\,e^{kt} - \frac{3}{10}k\,e^{3kt}$, $f_k''(t) = 20k^2\,e^{kt} - \frac{9}{10}k^2\,e^{3kt}$, $f_k'''(t) = 20k^3\,e^{kt} - \frac{27}{10}k^3\,e^{3kt}$.	3		
	Notwendig für einen Wendepunkt bei t_W ist $f_k''(t_W) = 0$. Mit $20k^2 \cdot e^{kt_W} - \frac{9}{10}k^2 \cdot e^{3kt_W} = k^2 \cdot e^{kt_W} \cdot \left(20 - \frac{9}{10}\left(e^{kt_W}\right)^2\right) = 0$ folgt $k^2 \cdot e^{kt_W} = 0$ oder $20 - \frac{9}{10}\left(e^{kt_W}\right)^2 = 0$. Da alle Funktionswerte der e-Funktion, ebenso wie k, positiv sind, verbleibt $20 - \frac{9}{10}\left(e^{kt_W}\right)^2 = 0$. Damit folgt $\left(e^{kt_W}\right)^2 = \frac{200}{9}$, also $e^{kt_W} = -\frac{\sqrt{200}}{3}$ oder $e^{kt_W} = \frac{\sqrt{200}}{3}$. Da e^{kt} stets positiv ist, erhält man als einzige Lösung $t_W = \frac{ln\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)}{k} = \frac{ln\left(\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}\right)}{k}$.	3		

Hinreichend für einen Wendepunkt bei t_W ist $f_k''(t_W) = 0$ und $f_k'''(t_W) \neq 0$.

$$f_k'''\left(\frac{ln\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)}{k}\right) = 20k^3\frac{\sqrt{200}}{3} - \frac{27}{10}k^3\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)^3 = -40\cdot\frac{\sqrt{200}}{3}k^3$$

$\approx -188{,}56\,k^3 \neq 0$ (weil $k > 0$)

Wegen

$$f_k\left(\frac{ln\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)}{k}\right) = 20\cdot\frac{\sqrt{200}}{3} - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)^3 = \frac{160}{27}\cdot\sqrt{200} \approx 83{,}81$$

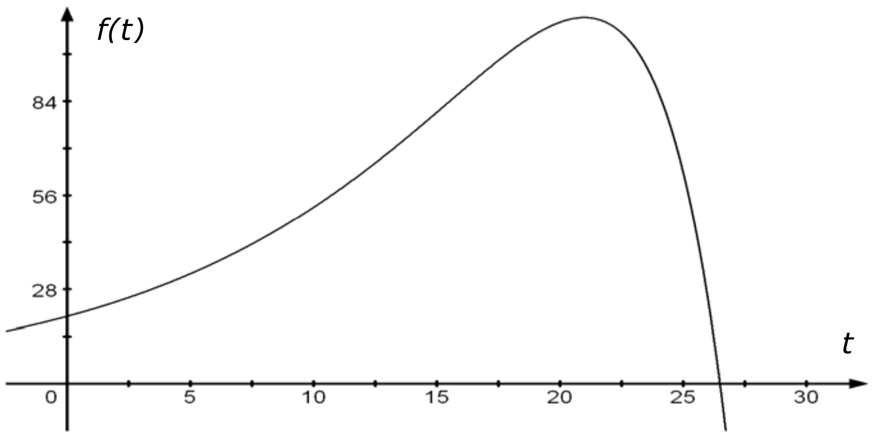
sind $W_k\left(\frac{ln\left(\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}\right)}{k}\middle|\,83{,}81\right)$ die gesuchten Wendepunkte. 3

Skizze für $k = 0{,}1$:

$W_{0,1}(15{,}51|83{,}81)$, wie zuvor berechnet mit $k = 0{,}1$.

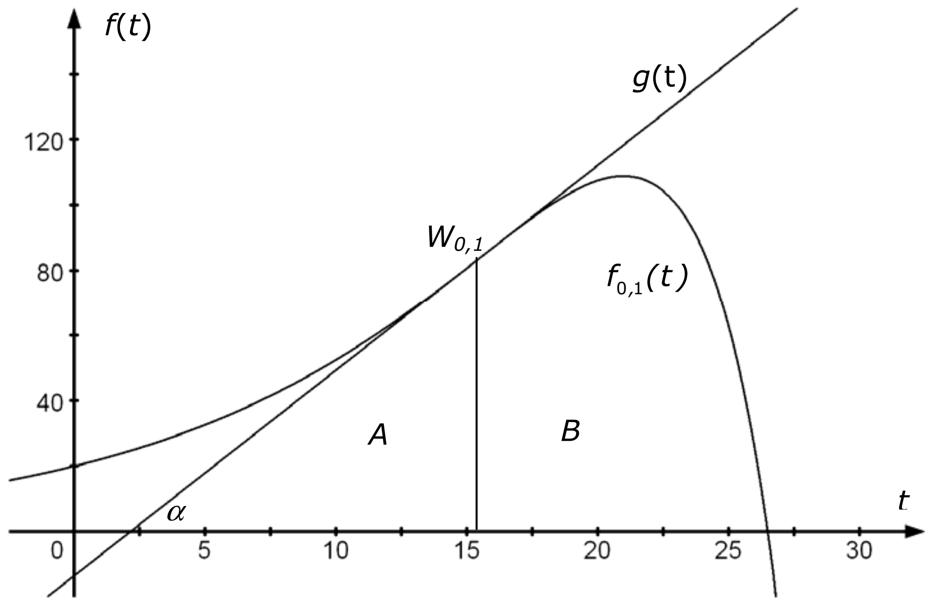
Wertetabelle (*zum Beispiel*):

T	0	5	10	15	20	25	26,5
$f_{0,1}(t)$	19,9	32,5	52,4	80,6	107,4	62,8	-0,48



3

b)



Die Größe des Schnittwinkels mit der t-Achse ergibt sich aus der Steigung der Wendetangente, also der Steigung des Graphen im Wendepunkt. Diese ist für $k = 0,1$

$$f'_{0,1}\left(\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)}{0,1}\right) = 20\cdot 0,1\cdot\frac{\sqrt{200}}{3} - \frac{3}{10}\cdot 0,1\cdot\left(\frac{\sqrt{200}}{3}\right)^3 \approx 6,29\,.$$ 1

Die Größe des Schnittwinkels beträgt dann
$\alpha \approx \arctan(6,29) \approx 80.97°$. 1

Wegen der gewählten Skalierung der Achsen erscheint der Winkel kleiner.

Da die Wendetangente g durch den Wendepunkt verläuft und die Steigung von 6,29 hat, muss
$g(15,51) \approx 6,29 \cdot 15,51 + b \approx 83,81$ gelten, also ist
$b \approx -13,75$, d.h. die Gleichung der Wendetangente lautet
$g(t) \approx 6,29 \cdot t - 13,75$.

Mit $6,29 \cdot t - 13,75 = 0$ erhält man

$$t = \frac{13,67}{6,29} \approx 2,17.$$

Also schneidet die Wendetangente bei etwa 2,17 die t-Achse. 2

	Da am Wendepunkt die Steigung der Graphen am größten ist, verläuft die Tangente links vom Wendepunkt (also für $t < t_W$) unterhalb des Graphen und rechts vom Wendepunkt (also für $t > t_W$) oberhalb des Graphen.		1	
	Das gesuchte Flächenstück kann daher in zwei Teilflächen zerlegt werden, wobei die linke Teilfläche ein Dreieck ist. Für die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks gilt $A \approx \frac{1}{2} \cdot (t_W - 2{,}17) \cdot f_{0,1}(t_W)$, also $A \approx \frac{1}{2} \cdot (15{,}51 - 2{,}17) \cdot 83{,}81 \approx 559{,}01$.		2	
	Um den Inhalt der rechten Teilfläche zu ermitteln, benötigt man die Nullstelle der Funktion $f_{0,1}$. Es gilt $20\, e^{0,1 \cdot t_N} - \frac{1}{10}\left(e^{0,1 \cdot t_N}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow e^{0,1 \cdot t_N} \cdot \left(20 - \frac{1}{10}\left(e^{0,1 \cdot t_N}\right)^2\right) = 0$. Da die Funktionswerte der e-Funktion stets positiv sind, findet man wie in Teilaufgabe a) nur eine Lösung, und zwar wegen $e^{0,1 \cdot t_N} = \sqrt{200}$ $t_N = \frac{\ln\left(\sqrt{200}\right)}{0{,}1} \approx 26{,}49$.		2	
	Die Maßzahl B des Flächeninhalts der rechten Teilfläche ergibt sich nun durch das bestimmte Integral $\int_{15,51}^{26,49} f_{0,1}(t)\,dt$. Eine Stammfunktion von $f_{0,1}$ mit $f_{0,1}(t) = 20\, e^{0,1 \cdot t} - \frac{1}{10}\, e^{0,3 \cdot t}$ ist die Funktion $F_{0,1}$ mit $F_{0,1}(t) = 200\, e^{0,1 \cdot t} - \frac{1}{3}\, e^{0,3 \cdot t}$.		1	
	Dann ist $B = \int_{15,51}^{26,49} f_{0,1}(t)\,dt = \left[200\, e^{0,1 \cdot t} - \frac{1}{3}\, e^{0,3 \cdot t}\right]_{15,51}^{26,49}$ $= \left(200\, e^{0,1 \cdot 26,49} - \frac{1}{3}\, e^{0,3 \cdot 26,49}\right) - \left(200\, e^{0,1 \cdot 15,51} - \frac{1}{3}\, e^{0,3 \cdot 15,51}\right)$ $\approx 977{,}35$. Wegen A+B $\approx$ 1536,36 beträgt der gesuchte Flächeninhalt ca. 1536,36 Flächeneinheiten.		2	

	Durch unterschiedliche Rundungen sind Ergebnis-abweichungen erlaubt. *Es sind andere Lösungswege möglich und zu erwarten. Die Gesamtpunktzahl darf jedoch nicht überschritten werden.* *Werden andere Flächen betrachtet, ist angemessen zu bepunkten.*			
c)	Die Hefe vermehrt sich zunächst schnell. Das Wachstum verzögert sich dann. Anschließend ist die Zahl der Hefepilze rückläufig, bis die Hefekultur schließlich vollständig abstirbt. - Der Zeitpunkt t_1 ist die Wendestelle, also $t_1 \approx 15{,}51$ (Tage). - Der Zeitpunkt t_2 ist die Nullstelle der Funktion. Wie in Teilaufgabe b) ermittelt wurde, ist $t_2 \approx 26{,}49$ (Tage). Nach 26,5 Tagen sind keine lebenden Hefepilze mehr vorhanden.		1 2	
d)	Die gesuchte Alkoholmasse m_{Alk} in Gramm ist bestimmt durch $2 \cdot \int_0^{26{,}49} f_{0{,}1}(t)\, dt$. Das (dimensionslos geschriebene) Integral ergibt $\int_0^{26{,}49} f_{0{,}1}(t)\,dt = \left[200\, e^{0{,}1 \cdot t} - \frac{1}{3}\, e^{0{,}3 \cdot t}\right]_0^{26{,}49}$ $= \left(200\, e^{0{,}1\,\cdot\,26{,}49} - \frac{1}{3}\, e^{0{,}3\,\cdot\,26{,}49}\right) - \left(200\, e^{0} - \frac{1}{3}\, e^{0}\right) \approx 1686$. Die gesamte produzierte Alkoholmasse ist dann $m_{Alk} \approx 3372$ g Alkohol. *Aufgrund von Rundungen können geringfügig abweichende Werte auftreten.* *Andere Lösungswege sind ebenfalls zu erwarten und erlaubt.*			3
		12	15	3

Aufgabe 2

Eine Firma produziert verschiedene Energiesparlampen, die aus einem Glaskörper und einem Metallsockel bestehen. Die Formen der Glaskörper können durch Rotation von Funktionsgraphen um die x-Achse beschrieben werden. Dazu betrachtet man die Funktionenschar mit den Gleichungen

$$f_k(x) = 5 \cdot (k \cdot x - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{für } k > 0{,}7$$

zwischen der jeweiligen Nullstelle x_k der Graphen und $x = 8$.
Verwenden Sie im Folgenden ohne Nachweis

$$f_k'(x) = 5 \cdot \left(-\frac{k \cdot x}{2} + k + \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}.$$

a) Zeichnen Sie den Graphen zu f_1 im Intervall $[1; 8]$. (3 P)

b) Berechnen Sie für jedes k die Höhe des zum Graphen von f_k gehörenden Glaskörpers.

Jeder Graph der Schar hat einen Punkt, bei dem der Radius des Glaskörpers maximal wird.

Bestimmen Sie diesen Radius für jedes k.

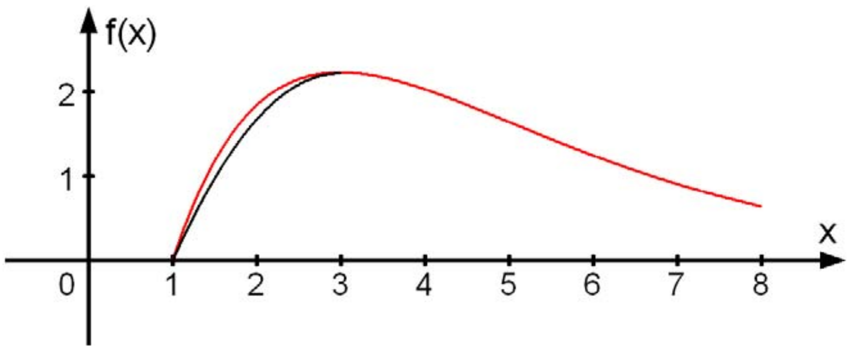
Verbindet man die zugehörigen Punkte der Graphen, so entsteht eine neue Kurve. Bestimmen Sie deren Funktionsgleichung. (11 P)

c) Das Modell „Birne" wird durch die Rotation des Graphen zu f_1 um die x-Achse beschrieben.
Der Glaskörper dieses Modells soll mit einem besonderen Gas gefüllt werden. Berechnen Sie das Gasvolumen (ohne Maßeinheiten, die Glasdicke ist zu vernachlässigen).

(*Zur Kontrolle:* $\int (f_1(x))^2 \, dx = (-25) \cdot (x^2 + 1) \cdot e^{-x} + C$) (10 P)

d) Die Lichtabstrahlfläche des Modells „Birne" wird durch die Rotation des Graphen zu f_1 von seiner Nullstelle bis zum Hochpunkt beschrieben. Sie soll mit einer Beschichtung versehen werden. Für die Berechnung der benötigten Mengen für diese Beschichtung ist es einfacher, den Graphen von f_1 in diesem Intervall durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion anzunähern.

Stellen Sie den konkreten Ansatz (inklusive der Zahlenwerte) zur Bestimmung einer Parabelgleichung zweiter Ordnung für eine solche Näherung auf, ohne die Lösung zu errechnen.
Eine Näherung des Graphen zu f_1 durch eine Gerade ist gröber, aber noch einfacher zu berechnen. Beschreiben Sie ein solches Verfahren, durch das näherungsweise die Größe der Abstrahlfläche des Modells „Birne" berechnet werden kann, und führen Sie die Rechnung durch. (6 P)

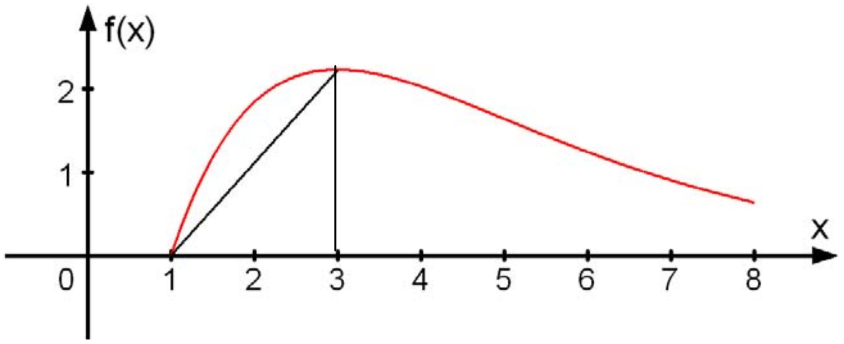
<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg.</th><th rowspan="2">Erwartete Leistung</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Wertetabelle (zum Beispiel):
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$f_1(x)$</td><td>0</td><td>1,84</td><td>2,23</td><td>2,03</td><td>1,64</td><td>1,24</td><td>0,91</td><td>0,64</td></tr>
</table>
Das Schaubild zeigt zusätzlich den Parabelteil aus d), dessen Zeichnung nicht verlangt wird.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Maximale Höhe:
Die maximale Höhe ist der Abstand zwischen der Nullstelle x_k der Funktion f_k und 8, also $8 - x_k$.
Bestimmung der Nullstelle:
$5 \cdot (kx_k - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x_k} = 0$.
Da $e^{-\frac{1}{2}x_k} \neq 0$ ist, folgt $(k \cdot x_k - 1) = 0$, also $x_k = \frac{1}{k}$.
Die maximale Höhe ist somit $8 - \frac{1}{k}$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Maximaler Radius:
Der maximale Radius befindet sich an der Stelle, an der die Funktion f_k ihr Maximum besitzt.
$f_k'(x) = 5 \cdot \left(-\frac{k \cdot x}{2} + k + \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ lt. Aufgabenstellung</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Notwendig für einen Extrempunkt bei x_E ist $f_k'(x_E) = 0$. $5 \cdot \left(-\frac{k \cdot x_E}{2} + k + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x_E}{2}} = 0$ liefert wegen $e^{-\frac{x_E}{2}} \neq 0$ $-\frac{k \cdot x_E}{2} + k + \frac{1}{2} = 0$ $\frac{k \cdot x_E}{2} = k + \frac{1}{2}$ $x_E = 2 + \frac{1}{k}$	2		
	Hinreichend für einen Extrempunkt bei x_E ist $f_k'(x_E) = 0$ und $f_k''(x_E) \neq 0$. Es wird dazu die zweite Ableitung gebildet. $f_k'(x) = \left(\frac{(-5) \cdot k \cdot x}{2} + 5k + \frac{5}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ lt. Aufgabenstellung $f_k''(x) = \left(\frac{(-5) \cdot k}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{(-5) \cdot k \cdot x}{2} + 5k + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ $= \left(\frac{5 \cdot k \cdot x}{4} - 5k - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$	2		
	$f_k''\left(2 + \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{5k \cdot (2 + \frac{1}{k})}{4} - 5k - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{-\frac{2+\frac{1}{k}}{2}}$ $= \left(\frac{5k}{2} + \frac{5}{4} - 5k - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{-1-\frac{1}{2k}} = \left(-\frac{5k}{2}\right) \cdot e^{-1-\frac{1}{2k}} < 0,$ weil $k > 0$ und $e^{-1-\frac{1}{2k}} > 0$ sind. Damit liegt das Maximum an der Stelle $x_E = 2 + \frac{1}{k}$.	2		
	Es gilt $f_k\left(2 + \frac{1}{k}\right) = 5 \cdot \left(k\left(2 + \frac{1}{k}\right) - 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{k}\right)} = 10k \cdot e^{-1-\frac{1}{2k}}$. Also beträgt der maximale Radius $10k \cdot e^{-1-\frac{1}{2k}}$.	1		

	Lage der Hochpunkte: Alle Hochpunkte liegen an der Stelle $x_E = 2 + \frac{1}{k}$. Damit gilt $k = \frac{1}{x_E - 2}$. Eingesetzt in f_k ergibt sich die Ortskurve h mit $h(x) = 5 \cdot \left(\left(\frac{1}{x-2}\right) \cdot x - 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 5 \cdot \left(\frac{2}{x-2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.		2	
c)	Das Rotationsvolumen errechnet sich nach der Formel $V = \pi \cdot \int_1^8 (f_1(x))^2 \, dx$ mit $(f_1(x))^2 = \left(5 \cdot (x-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = 25 \cdot (x-1)^2 \cdot e^{-x}$ Man berechnet zunächst $\int (x-1)^2 \cdot e^{-x} dx$ und wählt dazu $u(x) = (x-1)^2; \quad v'(x) = e^{-x};$ $u'(x) = 2 \cdot (x-1); \quad v(x) = (-1) \cdot e^{-x}$. Dies ergibt $\int (x-1)^2 \cdot e^{-x} dx$ $= \int u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx$ $= \left[(x-1)^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x}\right] - 2 \int (x-1) \cdot (-1)\, e^{-x} dx$ $= \left[(x-1)^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x}\right] + 2 \int (x-1)\, e^{-x} dx$.		1 2	

	Es bleibt $2\int(x-1)\, e^{-x}dx$ zu berechnen. Man wählt $s(x)=(x-1);\ t'(x)=e^{-x};\ s'(x)=1;\ t(x)=(-1)\cdot e^{-x}$ und erhält $2\int(x-1)\cdot e^{-x}dx = 2\cdot\int s(x)\cdot t'(x)dx$ $= 2\cdot[s(x)\cdot t(x)] - 2\cdot\int s'(x)\cdot t(x)dx$ $= 2\cdot[(x-1)\cdot(-1)\cdot e^{-x}] - 2\int(-1)\, e^{-x}dx$ $= (-2)\cdot[(x-1)\cdot e^{-x}] + 2\int e^{-x}dx$ $= (-2)\cdot[(x-1)\cdot e^{-x}] + 2[(-1)\cdot e^{-x}] + C$ $= (-2)\cdot x\cdot e^{-x} + C.$		1 2	
	Damit gilt $\int(x-1)^2\cdot e^{-x}dx = [(x-1)^2\cdot(-1)\cdot e^{-x}] - 2\cdot x\cdot e^{-x} + C$ $= (-x^2+2x-1-2x)\cdot e^{-x} + C$ $= (-x^2-1)\cdot e^{-x} + C$ $= (-1)\cdot(x^2+1)\cdot e^{-x} + C.$ Also ist $\int 25\cdot(x-1)^2\cdot e^{-x}dx = (-25)\cdot(x^2+1)\cdot e^{-x} + C.$		2	
	Es folgt für das Volumen $V = \pi\int_1^8 25\cdot(x-1)^2\cdot e^{-x}dx$ $= \pi\cdot(-25)\cdot\left[(x^2+1)\cdot e^{-x}\right]_1^8$ $\approx 17{,}85\cdot\pi$. Die Maßzahl für das Rotationsvolumen beträgt $17{,}85\cdot\pi\approx 56{,}07$.		2	

<table>
<tr>
<td>d)</td>
<td>Die Funktionsgleichung lautet
$p(x) = ax^2 + bx + c$, mit $p'(x) = 2ax + b$.
Die erforderlichen Eigenschaften sind bewusst nicht vorgegeben. Die Lösung geht davon aus, dass die Parabel durch den Achsenschnittpunkt bei der Nullstelle bei x = 1 sowie durch den Hochpunkt bei x = 3 verläuft und hier die gleiche Steigung besitzt. Geht man nicht davon aus, dass in x = 3 ein Hochpunkt vorliegt, gehen die Kurven nicht knickfrei ineinander über.
Sehr stark abweichende Näherungen sind mit Punktabzug zu berücksichtigen.
$p(1) = 0 \quad \Rightarrow a + b + c = 0$
$p(3) = 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow 9a + 3b + c = 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$
$p'(3) = 0 \quad \Rightarrow 6a + b = 0$.</td>
<td></td>
<td>3</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Als lineare Näherung betrachtet man die Gerade durch $N(1\,|\,0)$ und den Hochpunkt $H\left(3 \,\middle|\, 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Die Rotationsfigur ist ein Kegel mit dem Grundkreisradius
$r = 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$, der Höhe
$h = 2$ und der Seitenlinie
$s = \sqrt{4 + 100 \cdot e^{-3}}$, was aus dem Satz des Pythagoras folgt.

Die Größe der Abstrahlfläche entspricht dem Flächeninhalt des Kegelmantels. Dieser berechnet sich nach der Formel
$A_M = \pi \cdot r \cdot s$ zu $A_M = \pi \cdot 10 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{4 + 100 \cdot e^{-3}} \approx 21$.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>12</td>
<td>15</td>
<td>3</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte $A(0 \mid 2 \mid 4)$, $B(2 \mid -2 \mid 6)$ und $C(2 \mid 2 \mid 4)$ eine Ebene E definiert wird, und bestimmen Sie die Ebenengleichung in der Normalenform.

Bestimmen Sie den Punkt D, durch den ein ebenes Parallelogramm $ABCD$ entsteht, und berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur.

[Zur Kontrolle: $E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$] (6 P)

b) Ermitteln Sie den Punkt M_1', der durch Spiegelung von $M_1(1 \mid 2 \mid 0)$ an der Ebene E hervorgeht. (5 P)

c) Betrachten Sie nun die Kugel K_1 um $M_1(1 \mid 2 \mid 0)$ mit dem Radius $r_1 = 3 \cdot \sqrt{5}$ und die Kugel K_2 um den Ursprung mit dem Radius $r_2 = 2 \cdot \sqrt{5}$.

- Zeigen Sie, dass K_2 im Innern von K_1 liegt und K_1 berührt. Berechnen Sie den Berührpunkt Q und fertigen Sie dazu eine Skizze an.
- Bestimmen Sie alle Punkte auf der Strecke $\overline{AB}$, die auch auf der Kugel K_1 liegen.

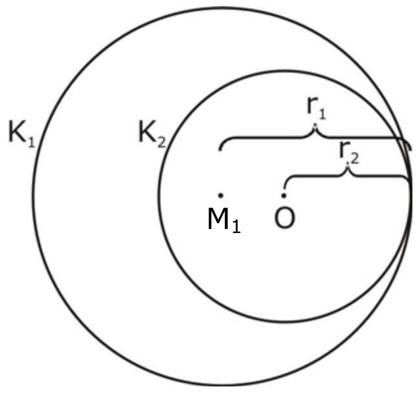
(10 P)

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebene $E': \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 5 = 0$ zur Kugel K_2 und bestimmen Sie ggf. den Berührpunkt bzw. den Schnittkreis mit dem Mittelpunkt M_s und dem Schnittkreisradius r_s. (6 P)

e) E' sei die Polarebene der Kugel K_2. Bestimmen Sie den zugehörigen Pol P. (3 P)

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg.</th><th rowspan="2">Erwartete Leistung</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Man bildet zwei Vektoren, z.B. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$. Die beiden Vektoren sind offensichtlich nicht kollinear und somit als Spannvektoren einer Ebene geeignet, die durch A, B und C definiert wird.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Für die Normalenform wird ein Normalenvektor benötigt.
Da das Vektorprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ den Vektor
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}$ ergibt, kann man $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$
verwenden, damit gilt $E:\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right)=0$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Der Punkt D wird bestimmt über
$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$.
Der gesuchte Punkt ist $D(0\,|\,6\,|\,2)$.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Da das Parallelogramm durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannt wird, ist die Maßzahl des gesuchten Flächeninhalts der Betrag des Vektorprodukts, also
$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\4\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{80}\approx 8{,}94$.
Andere Verfahren zur Berechnung des Flächeninhalts sind möglich.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

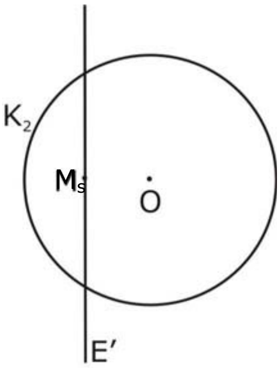
b)	Für die Bestimmung des gespiegelten Punktes M' benötigt man den Abstand von $M_1(1\|2\|0)$ zu E. Dazu wird die Hesse-Normalenform gebildet, z.B. in der Fassung $E: \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0$. Für den Abstand $d(M_1 / E)$ gilt $d(M_1 / E) = \left\| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{8}{\sqrt{5}}$. Der Abstand beträgt somit $d(M_1 / E) = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$.	3		
	Der Ursprung und M_1 liegen in dem gleichen Halbraum bzgl. E, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = -\frac{8}{\sqrt{5}} < 0$. Mit $d = d(M_1 / E)$ gilt für den Spiegelpunkt M' folglich $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + 2 \cdot d \cdot \vec{n}^0$, also $\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5{,}2 \\ 6{,}4 \end{pmatrix}$ Also ist $M'(1\|5{,}2\|6{,}4)$.		2	

c)	Es gilt $\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| = \sqrt{5} < r_1 = 3\sqrt{5}$, und somit liegt der Mittelpunkt von K_2 (der Ursprung) im Innern von K_1. Da $r_1 - r_2 = \sqrt{5} = \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|$ ist, wird K_1 durch K_2 von innen berührt.	2		
	Für den Berührpunkt Q gilt $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OM_1} \cdot \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|} \cdot r_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist der Berührpunkt $Q(-2 \mid -4 \mid 0)$.		2	
	Skizze:  	1		

	Die Punkte auf der Strecke $\overline{AB}$ werden durch $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $s \in [0\,;\,1]$ beschrieben.		1	
	Für einen gemeinsamen Punkt mit K_1 gilt $\left(\begin{pmatrix} 2s \\ 2-4s \\ 4+2s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45$, also $\begin{pmatrix} 2s-1 \\ -4s \\ 4+2s \end{pmatrix}^2 = 45$.		1	
	Daraus folgt $4s^2 - 4s + 1 + 16s^2 + 16 + 16s + 4s^2 = 45$, zusammengefasst $24s^2 + 12s - 28 = 0$ bzw. $s^2 + \frac{1}{2}s - \frac{7}{6} = 0$. Die Lösungen dazu sind $s_1 = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{59}{48}} \approx 0{,}86$ und $s_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{59}{48}} \approx -1{,}36$.		2	
	Da nur s_1 im Intervall [0;1] liegt, gibt es nur einen Punkt F der Strecke $\overline{AB}$, der auch auf K_1 liegt. Es ist $\overrightarrow{OF} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}86 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}72 \\ -1{,}44 \\ 5{,}72 \end{pmatrix}$, daher (gerundet) $F(1{,}72 \mid -1{,}44 \mid 5{,}72)$.		1	

<table>
<tr>
<td>d)</td>
<td>

Skizze:



Für die Ebene E' gilt

$E':\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\frac{5}{\sqrt{5}}=0$.

Die Ebene E' und K_2 schneiden sich, da $r_2=2\cdot\sqrt{5}$ größer als der Abstand $d'=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ der Ebene E' vom Ursprung ist.

Da $\left|\overline{OM_s}\right|=\sqrt{5}=d'$ ist und $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E' mit der Länge $\sqrt{5}$ ist, folgt

$\overrightarrow{OM_s}=\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{OM_s}=\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Da der erste Vektor die Ebenengleichung von E' erfüllt, ist $M_s(1\mid 2\mid 0)$.

Der Schnittkreisradius ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras.

$r_s=\sqrt{r_2^2-\left|\overline{OM_s}\right|^2}=\sqrt{15}$

Der Radius beträgt $r_s=\sqrt{15}$.

Die Punkte M_s und M_1 sind identisch.

</td>
<td></td>
<td>2

2

2</td>
<td></td>
</tr>
</table>

e)	Eine Koordinatenform von E' ist $E':\ x_1 + 2x_2 = 5$. Der Pol P ist ein Punkt auf der Geraden g, für die $g:\ \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ gilt. Für die Polarebene ist $(\vec{x} - \overrightarrow{m'})\cdot(\vec{p} - \overrightarrow{m'}) = r^2$ mit $\overrightarrow{m'} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h. $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}s\\2s\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$. Daraus folgt $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s\\2s\\0\end{pmatrix} = 20 \Leftrightarrow s\,x_1 + 2s\,x_2 = 20$. Mit $s = 4$ ergibt sich eine Koordinatenform von E' (s.o.). Somit ist $\overrightarrow{OP} = 4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}$, also $P(4\,\vert\,8\,\vert\,0)$.			3
	Summe:	12	15	3

Aufgabe 4

Ein Hüpfball (siehe Bild) besteht - vereinfacht gesehen - aus zwei Bällen und einem kreisförmigen Hüpfbrett, in das die Bälle eingelassen sind. Das mathematische Modell besteht idealisiert aus einer oberen Kugel K, einer Ebene E, in der das Hüpfbrett liegt, und einer unteren Kugel K^*. Zunächst wird vereinfachend angenommen, dass K^* durch Spiegelung der Kugel K an der Ebene E entsteht.

In einem kartesischen Koordinatensystem hat die obere Kugel K die Gleichung $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 20x_1 - 20x_2 - 48x_3 + 632 = 0$
und die Hüpfbrettebene E die Gleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix};\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Wie in der Zeichnung dargestellt liegt der Hüpfball schräg auf dem Fußboden (x_1x_2-Ebene).

Das Ventil, über das der obere Ball des Hüpfballs aufgepumpt werden kann, liegt im oberen Schnittpunkt der Achse durch die Ballmittelpunkte (Symmetrieachse) mit der Kugel K.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius R der Kugel K, die Koordinaten des Ventilpunktes V sowie den Winkel φ, den die oben genannte Symmetrieachse des Hüpfballs mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

[Zur Kontrolle: Kugelmittelpunkt $M(10|10|24)$] (9 P)

b) Zeigen Sie, dass die Ebene E die Kugel K schneidet, und bestimmen Sie den Mittelpunkt M_{kr} und den Flächeninhalt des Schnittkreises kr (Aussparung im Hüpfbrett) sowie die Koordinaten des Mittelpunktes M^* der Kugel K^*.
[Zur Kontrolle: $r_{kr} = 6$ und $M^*(-2|-2|12)$] (11 P)

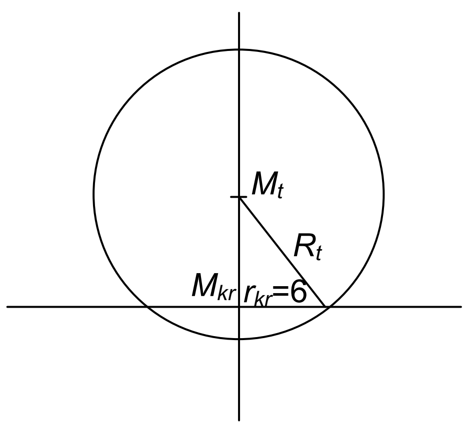
c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, in denen der Hüpfball den Boden berührt. (5 P)

d) Die Hülle der beiden Bälle ist sehr elastisch. Der obere Ball wird weiter aufgepumpt. Die Aussparung im Hüpfbrett ändert sich dadurch nicht. Der untere Ball behält seine Größe.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Schar K_t aller Kugeln, die E im Schnittkreis kr schneiden. (5 P)

Aufg.	Erwartete Leistung	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Um den Mittelpunkt ablesen zu können, wird die Koordinatenform der Kugelgleichung in die Vektorform umgewandelt. $K\colon x_1^2+x_2^2+x_3^2-20x_1-20x_2-48x_3+632=0$ $K\colon (x_1-10)^2-100+(x_2-10)^2-100+(x_3-24)^2-576+632=0$ $K\colon (x_1-10)^2+(x_2-10)^2+(x_3-24)^2-144=0$ $K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}10\\10\\24\end{pmatrix}\right]^2=144$. Also ist $M(10\mid 10\mid 24)$ und $R=12$.	3		
	Für die Berechnung der Koordinaten des Ventilpunktes stellt man die Gleichung der Geraden u auf, die M enthält und einen Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor hat. Einen Normalenvektor erhält man mit $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}$. Man rechnet weiter mit $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Somit ist $u\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\24\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.	2		
	Die Ventilkoordinaten entsprechen den Koordinaten des oberen Schnittpunktes V der Geraden u mit der Kugel K. $\left[\begin{pmatrix}10\\10\\24\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\10\\24\end{pmatrix}\right]^2=144$ $3t^2=144$ $t=4\cdot\sqrt{3}\approx 6{,}93$ oder $t=-4\cdot\sqrt{3}$ Der negative Wert entfällt, weil er nicht zu einem Punkt auf dem oberen Teil der Symmetrieachse führt. Daraus ergibt sich V, gerundet zu $V\,(16{,}93\mid 16{,}93\mid 30{,}93)$.	2		

	Bestimmung des Winkels zwischen der Geraden u und der x_1x_2-Ebene: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene, somit errechnet sich der gesuchte Winkel folgendermaßen: $\sin(\varphi) = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\varphi \approx 35{,}26°$ ist der Schnittwinkel zwischen der Geraden u und der x_1x_2-Ebene. *Die Berechnung über den Kosinus ist auch möglich.*	2		
b)	Man berechnet den Abstand des Kugelmittelpunktes M zur Ebene E. Für die Abstandsbestimmung benötigt man eine Hesse – Normalenform von E: $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\4\\20\end{pmatrix}\right]=0$, die aus den vorangegangenen Rechnungen folgt.	1		
	Der Abstand errechnet sich durch $d = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}10\\10\\24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\20\end{pmatrix}\right]\right\rvert = 6\sqrt{3}\approx 10{,}39$.	1		
	Die Ebene E schneidet die Kugel K, weil der Abstand kleiner als der Kugelradius ($R=12$) ist.		1	

	Bestimmung des Mittelpunktes M_{kr} und des Flächeninhaltes A des Schnittkreises: Der Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises liegt auf der Lotgeraden u von E, die durch M verläuft. Die Gleichung für E in Koordinatenform lautet $E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 26$. Wenn man den Term von u in E einsetzt, erhält man $(10+t)+(10+t)+(24+t)=26$, also $t = -6$. Eingesetzt in u folgt $M_{kr}(4\mid 4\mid 18)$.		3	
	Für den Radius r_{kr} des Schnittkreises gilt $\left(\overline{MM_{kr}}\right)^2 + r_{kr}^2 = R^2$ $r_{Kr}^2 = R^2 - \left(\overline{MM_{kr}}\right)^2 = 144 - 36\cdot 3 = 36$. $r_{Kr} = 6$ $A = \pi \cdot r_{kr}^2 \approx 113{,}10$ Der Inhalt der Kreisfläche beträgt 113,10 FE.		3	
	Um M^* zu erhalten, spiegelt man $M(10\mid 10\mid 24)$ an der Ebene E. Man erhält M^*, indem man das Doppelte des Vektors $\overrightarrow{MM_k}$ zum Vektor $\overrightarrow{OM}$ addiert. $\overrightarrow{MM_k} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix}$ und somit $\overrightarrow{OM^*} = \begin{pmatrix}10\\10\\24\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-6\\-6\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\12\end{pmatrix}$ Also ist $M^*(-2\mid -2\mid 12)$.		2	

c)	Der Berührpunkt des unteren Balles ist die Projektion des Mittelpunktes M^* in die x_1x_2-Ebene, also $P_1(-2 \mid -2 \mid 0)$. Man erhält den Berührpunkt des runden Hüpfbrettes mit dem Boden, indem man den Schnittpunkt der Projektion der Geraden u in die x_1x_2-Ebene mit E berechnet. Es ist $u_{x_1x_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Berechnung des Schnittpunktes führt auf die Gleichung $(10+t) + (10+t) + 0 = 26$. Daraus folgt $t = 3 \quad (a = 6{,}25\ ;\ b = 2{,}75)$. Dies ergibt den Berührpunkt mit dem Boden $P_2(13 \mid 13 \mid 0)$.	1	1 3	
d)	Gleichung der Kugelschar: Die Mittelpunkte M_t der Kugelschar K_t liegen zusammen mit dem Mittelpunkt $M(10 \mid 10 \mid 24)$ der Kugel K auf der Lotgeraden u. Für die Ortsvektoren der Mittelpunkte gilt also $\overrightarrow{m_t} = \begin{pmatrix} 10+t \\ 10+t \\ 24+t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$. *Die notwendige Überlegung erfolgt durch eine Skizze oder durch eine Beschreibung.*  		1 1	1

<table>
<tr><td></td><td>Für die Radien R_t gilt (s. Skizze) :
$R_t^2 = \left(\overrightarrow{M_{kr}M_t}\right)^2 + 36$.
Mit $\overrightarrow{M_{kr}M_t} = \begin{pmatrix} 10+t-4 \\ 10+t-4 \\ 24+t-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+t \\ 6+t \\ 6+t \end{pmatrix}$ folgt
$R_t^2 = (6+t)^2 + (6+t)^2 + (6+t)^2 + 36$
$R_t^2 = 3 \cdot \left(36 + 12\mathrm{t} + t^2\right) + 36$
$R_t^2 = 144 + 36\mathrm{t} + 3t^2$.
Daraus ergibt sich die Gleichung der allgemeinen Kugelschar
$$K_t: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10+t \\ 10+t \\ 24+t \end{pmatrix}\right]^2 = 3t^2 + 36t + 144 .$$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>12</td><td>15</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 5

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

Beim diesjährigen internationalen Radrennen „Rund um den Flintstone" nehmen 10 Profimannschaften mit je 6 Fahrern teil. Es ist auch ein deutsches Team - das Team *Geröllheimer* – gemeldet. Die Nationalität der Fahrer kann in den einzelnen Mannschaften beliebig sein. Insgesamt werden 12 deutsche Fahrer mitfahren.

Um Fahrer, die verbotene Substanzen einnehmen, zu überführen und damit „eine saubere Flintstone-Tour" zu gewährleisten, muss jeder Fahrer eine Urin-Probe abliefern. Die Urinmenge wird auf eine A-Flasche und eine B-Flasche aufgeteilt.
Es wird zunächst die A-Probe untersucht. Die Untersuchungsmethode zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% verbotene Substanzen bei einem Sportler, der sich gedopt hat, an. Hat sich ein Sportler korrekt verhalten, zeigt sie dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% an.
Die B-Probe wird nur untersucht, wenn die A-Probe positiv war, d.h. wenn der Test verbotene Substanzen angezeigt hat. Die hierbei verwendete Untersuchungsmethode soll die gleichen Fehlerwahrscheinlichkeiten wie die Methode bei der A-Probe aufweisen. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, dass beide Verfahren unabhängig voneinander sind.

Der Sportler gilt als des Dopings überführt, wenn die A- und die B-Probe positive Ergebnisse anzeigen.

a) Es werde angenommen, dass 10% der Fahrer unerlaubte Mittel vor der Tour eingenommen haben. Aus dem Fahrerfeld soll ein Fahrer zufällig ausgewählt werden.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass über diesen Fahrer mit oben beschriebenen Verfahren ein falsches Urteil gefällt wird.

- Es wird nun angenommen, dass der Test bei der A-Probe und bei der B-Probe positiv ausgefallen ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fahrer trotz dieses Ergebnisses keine Dopingmittel eingenommen hat. (8 P)

b) Die Rennleitung denkt über einen Schnelltest nach. Die Urinprobe soll auf 3 Flaschen A, B und C aufgeteilt werden. Dann sollen die C-Proben von 10 Sportlern zusammengeschüttet und die Urinmischung untersucht werden. Ist das Ergebnis positiv, dann soll jeder der 10 Sportler nach dem klassischen Verfahren mit A- und B-Probe getestet werden.

Bei dem beschriebenen klassischen Verfahren ist die Anzahl der zu untersuchenden A-Proben gleich der Anzahl der Fahrer. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer gedopt ist.

Untersuchen Sie, für welche Werte von p der Schnelltest weniger Analysen der A-Proben als beim klassischen Verfahren erwarten lässt. (8 P)

c) Der berüchtigte Dopingarzt Dr. Feuerstein hat ein Mittel entwickelt, das bei geringer Dosierung mit herkömmlichen Mitteln nicht nachgewiesen werden kann. Keiner der 60 Fahrer kann der Versuchung widerstehen. Alle bestellen bei Dr. Feuerstein das Mittel. Der Arzt verschickt 60 Ampullen, von denen 6 aber eine zu hohe Konzentration des Dopingmittels enthalten.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein deutscher Fahrer eine zu hoch dosierte Ampulle erhalten wird.
- Berechnen Sie ferner die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Fahrer des Teams *Geröllheimer* fehlerhaft dosierte Ampullen zugeschickt bekommen wird.

Die bisherigen Aufgaben gingen davon aus, dass 6 Ampullen fehlerhaft dosiert worden sind.

- Bestimmen Sie die größtmögliche Anzahl von fehlerhaften Ampullen in einer solchen Lieferung von 60 Ampullen, bei der die Wahrscheinlichkeit, dass kein deutscher Fahrer eine solche zugeschickt bekommt, noch über 50% liegt. (10 P)

d) Erstaunlicherweise ist ein Test mit nachgeschalteter B-Probe für einen gedopten Sportler vorteilhafter als ein Test, der ausschließlich eine A-Probe vorsieht. Dennoch ist die B-Probe für ein möglichst einwandfreies Urteil enorm wichtig.

Erklären Sie den erstgenannten Sachverhalt und diskutieren Sie die zweite Aussage. (4 P)

Gaußsche Summenfunktion Φ											
z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,
0,01	4960	5040	0,41	3409	6591	0,81	2090	7910	1,21	1131	8869
0,02	4920	5080	0,42	3372	6628	0,82	2061	7939	1,22	1112	8888
0,03	4880	5120	0,43	3336	6664	0,83	2033	7967	1,23	1093	8907
0,04	4840	5160	0,44	3300	6700	0,84	2005	7995	1,24	1075	8925
0,05	4801	5199	0,45	3264	6736	0,85	1977	8023	1,25	1056	8944
0,06	4761	5239	0,46	3228	6772	0,86	1949	8051	1,26	1038	8962
0,07	4721	5279	0,47	3192	6808	0,87	1922	8078	1,27	1020	8980
0,08	4681	5319	0,48	3156	6844	0,88	1894	8106	1,28	1003	8997
0,09	4641	5359	0,49	3121	6879	0,89	1867	8133	1,29	0985	9015
0,10	4602	5398	**0,50**	3085	6915	0,90	1841	8159	1,30	0968	9032
0,11	4562	5438	0,51	3050	6950	0,91	1814	8186	1,31	0951	9049
0,12	4522	5478	0,52	3015	6985	0,92	1788	8212	1,32	0934	9066
0,13	4483	5517	0,53	2981	7019	0,93	1762	8238	1,33	0918	9082
0,14	4443	5557	0,54	2946	7054	0,94	1736	8264	1,34	0901	9099
0,15	4404	5596	0,55	2912	7088	0,95	1711	8289	1,35	0885	9115
0,16	4364	5636	0,56	2877	7123	0,96	1685	8315	1,36	0869	9131
0,17	4325	5675	0,57	2843	7157	0,97	1660	8340	1,37	0853	9147
0,18	4286	5714	0,58	2810	7190	0,98	1635	8365	1,38	0838	9162
0,19	4247	5753	0,59	2776	7224	0,99	1611	8389	1,39	0823	9177
0,20	4207	5793	0,60	2743	7257	**1,00**	1587	8413	1,40	0808	9192
0,21	4168	5832	0,61	2709	7291	1,01	1562	8438	1,41	0793	9207
0,22	4129	5871	0,62	2676	7324	1,02	1539	8461	1,42	0778	9222
0,23	4090	5910	0,63	2643	7357	1,03	1515	8485	1,43	0764	9236
0,24	4052	5948	0,64	2611	7389	1,04	1492	8508	1,44	0749	9251
0,25	4013	5987	0,65	2578	7422	1,05	1469	8531	1,45	0735	9265
0,26	3974	6026	0,66	2546	7454	1,06	1446	8554	1,46	0721	9279
0,27	3936	6064	0,67	2514	7486	1,07	1423	8577	1,47	0708	9292
0,28	3897	6103	0,68	2483	7517	1,08	1401	8599	1,48	0694	9306
0,29	3859	6141	0,69	2451	7549	1,09	1379	8621	1,49	0681	9319
0,30	3821	6179	0,70	2420	7580	1,10	1357	8643	**1,50**	0668	9332
0,31	3783	6217	0,71	2389	7611	1,11	1335	8665	1,51	0655	9345
0,32	3745	6255	0,72	2358	7642	1,12	1314	8686	1,52	0643	9357
0,33	3707	6293	0,73	2327	7673	1,13	1292	8708	1,53	0630	9370
0,34	3669	6331	0,74	2296	7704	1,14	1271	8729	1,54	0618	9382
0,35	3632	6368	0,75	2266	7734	1,15	1251	8749	1,55	0606	9394
0,36	3594	6406	0,76	2236	7764	1,16	1230	8770	1,56	0594	9406
0,37	3557	6443	0,77	2206	7794	1,17	1210	8790	1,57	0582	9418
0,38	3520	6480	0,78	2177	7823	1,18	1190	8810	1,58	0571	9429
0,39	3483	6517	0,79	2148	7852	1,19	1170	8830	1,59	0559	9441
0,40	3446	6554	0,80	2119	7881	1,20	1151	8849	1,60	0548	9452

Gaußsche Summenfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,
1,61	0537	9463	2,01	0222	9778	2,41	0080	9920	2,81	0025	9975
1,62	0526	9474	2,02	0217	9783	2,42	0078	9922	2,82	0024	9976
1,63	0516	9484	2,03	0212	9788	2,43	0075	9925	2,83	0023	9977
1,64	0505	9495	2,04	0207	9793	2,44	0073	9927	2,84	0023	9977
1,65	0495	9505	2,05	0202	9798	2,45	0071	9929	2,85	0022	9978
1,66	0485	9515	2,06	0197	9803	2,46	0069	9931	2,86	0021	9979
1,67	0475	9525	2,07	0192	9808	2,47	0068	9932	2,87	0021	9979
1,68	0465	9535	2,08	0188	9812	2,48	0066	9934	2,88	0020	9980
1,69	0455	9545	2,09	0183	9817	2,49	0064	9936	2,89	0019	9981
1,70	0446	9554	2,10	0179	9821	**2,50**	0062	9938	2,90	0019	9981
1,71	0436	9564	2,11	0174	9826	2,51	0060	9940	2,91	0018	9982
1,72	0427	9573	2,12	0170	9830	2,52	0059	9941	2,92	0018	9982
1,73	0418	9582	2,13	0166	9834	2,53	0057	9943	2,93	0017	9983
1,74	0409	9591	2,14	0162	9838	2,54	0055	9945	2,94	0016	9984
1,75	0401	9599	2,15	0158	9842	2,55	0054	9946	2,95	0016	9984
1,76	0392	9608	2,16	0154	9846	2,56	0052	9948	2,96	0015	9985
1,77	0384	9616	2,17	0150	9850	2,57	0051	9949	2,97	0015	9985
1,78	0375	9625	2,18	0146	9854	2,58	0049	9951	2,98	0014	9986
1,79	0367	9633	2,19	0143	9857	2,59	0048	9952	2,99	0014	9986
1,80	0359	9641	2,20	0139	9861	2,60	0047	9953	**3,00**	0013	9987
1,81	0351	9649	2,21	0136	9864	2,61	0045	9955			
1,82	0344	9656	2,22	0132	9868	2,62	0044	9956			
1,83	0336	9664	2,23	0129	9871	2,63	0043	9957			
1,84	0329	9671	2,24	0125	9875	2,64	0041	9959			
1,85	0322	9678	2,25	0122	9878	2,65	0040	9960			
1,86	0314	9686	2,26	0119	9881	2,66	0039	9961			
1,87	0307	9693	2,27	0116	9884	2,67	0038	9962			
1,88	0301	9699	2,28	0113	9887	2,68	0037	9963			
1,89	0294	9706	2,29	0110	9890	2,69	0036	9964			
1,90	0287	9713	2,3	0107	9893	2,70	0035	9965			
1,91	0281	9719	2,31	0104	9896	2,71	0034	9966			
1,92	0274	9726	2,32	0102	9898	2,72	0033	9967			
1,93	0268	9732	2,33	0099	9901	2,73	0032	9968			
1,94	0262	9738	2,34	0096	9904	2,74	0031	9969			
1,95	0256	9744	2,35	0094	9906	2,75	0030	9970			
1,96	0250	9750	2,36	0091	9909	2,76	0029	9971			
1,97	0244	9756	2,37	0089	9911	2,77	0028	9972			
1,98	0239	9761	2,38	0087	9913	2,78	0027	9973			
1,99	0233	9767	2,39	0084	9916	2,79	0026	9974			
2,00	0228	9772	2,40	0082	9918	2,80	0026	9974			

Aufg.	**Erwartete Leistung**	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es kennzeichnen D das Ereignis, dass ein Fahrer gedopt ist, T_A das Ereignis, dass das Ergebnis der A-Probe positiv ist, und T_B, dass das Ergebnis der B-Probe positiv ist. Es gilt $P(D) = 0,1$, $P_D(T_A) = 0,95$ und $P_{\bar{D}}(\overline{T_A}) = 0,9$; also ist $P(\textit{falsches Urteil})$ $= P(D) \cdot P_D(\overline{T_A}) + P(D) \cdot P_D(T_A) \cdot P_D(\overline{T_B}) + P(\bar{D}) \cdot P_{\bar{D}}(T_A) \cdot P_{\bar{D}}(T_B)$ $= 0,1 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,05 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,01875.$ (*Ein Baumdiagramm kann alternativ verwendet werden.*) Es kennzeichne T das Ereignis, dass sowohl die A-Probe als auch die B-Probe positiv ausgefallen sind. $P_T(\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \cap T)}{P(T)}$ $= \frac{P(\bar{D}) \cdot P_{\bar{D}}(T_A) \cdot P_{\bar{D}}(T_B)}{P(D) \cdot P_D(T_A) \cdot P_D(T_B) + P(\bar{D}) \cdot P_{\bar{D}}(T_A) \cdot P_{\bar{D}}(T_B)}$ $= \frac{0,9 \cdot 01 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1}$ $= \frac{0,009}{0,09025 + 0,009} \approx 9,07\%$ (*Ein Baumdiagramm kann alternativ verwendet werden.*)	1 3	 4	
b)	X beschreibe die Anzahl der benötigten Analysen der A-Proben. (X nimmt die Werte 0 und 10 an.) Bei 10 Fahrern wird zunächst die C-Probenmischung analysiert und dann werden mit der Wahrscheinlichkeit $1-(1-p)^{10}$ zehn Einzelproben untersucht. Die zu erwartende Anzahl der Proben ist durch den Erwartungswert von X gegeben. Es gilt $E(X) = 0 \cdot (1-p)^{10} + 10 \cdot (1-(1-p)^{10})$.	1	2	

	Der Erwartungswert für die Gesamtzahl der durchzuführenden Analysen ist also $E(X)+1$. Zu untersuchen ist daher, für welche *p* der Wert $E(X)+1$ kleiner als 10 ist. $0+10\cdot(1-(1-p)^{10})+1<10$ $1-(1-p)^{10}<\frac{9}{10}$ $(1-p)^{10}>0,1$ $1-p>\sqrt[10]{0,1}$ $p<1-\sqrt[10]{0,1}\approx 1-0,7943=20,57\%$ Bei einem *p* kleiner als 0,2057 erwarten wir weniger Analysen als beim klassischen Test.		1 4	
c)	Die Zufallsgröße *X* beschreibe die möglichen Anzahlen der deutschen Fahrer, die eine fehlerhafte Ampulle erhalten. *X* ist hypergeometrisch verteilt mit den Parametern *N* = 60, *M* = 12 und *n* = 6. (*Eine Beschreibung mittels des Urnenmodells „Ziehen ohne Zurücklegen" ist ebenso möglich.*) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\binom{12}{0}\binom{48}{6}}{\binom{60}{6}}\approx 1-0,2451=75,49\%$ Im Folgenden beschreibt *Y* die möglichen Anzahlen der Geröllheimer-Fahrer, die eine falsche Ampulle zugeschickt bekommen. *Y* ist hypergeometrisch verteilt mit den Parametern *N* = 60, *M* = 6 und *n* = 6. $P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{\binom{6}{0}\binom{54}{6}}{\binom{60}{6}}+\frac{\binom{6}{1}\binom{54}{5}}{\binom{60}{6}}$ $\approx 89,49\%$	1 2 1 2		

<table>
<tr><td></td><td>

X ist nunmehr wie oben hypergeometrisch verteilt mit dem unbekannten Parameter n.

Es gilt $P(X=0)=\frac{\binom{48}{n}}{\binom{60}{n}}$. Für $n = 6$ war $P(X=0) \approx 24{,}51\%$.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X=0)$ wird umso größer, je kleiner n gewählt wird.

Systematisches Probieren:

n	5	4	3
$P(X=0)$	0,3135	0,3990	0,505

Es dürften also höchstens 3 fehlerhafte Ampullen in der Lieferung der 60 Dosen sein.

Geht ein Schüler in Teil c) fälschlicherweise von einer Binomialverteilung aus, dann verliert er insgesamt 2 Punkte.

</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gedopter Sportler mit der A-Probe als solcher verdächtigt wird, ist 95%.
Die anschließende B-Probe bewirkt eine Wahrscheinlichkeit für den Verdacht von $0{,}95 \cdot 0{,}95 = 90{,}25\%$.
Damit sinkt die Wahrscheinlichkeit für eine Verdächtigung.

Der Fall, dass ein gedopter Sportler nicht des Dopings überführt wird, ist ärgerlich, aber nicht so schlimm wie die ungerechtfertigte Beschuldigung eines „sauberen" Sportlers. Für ihn wäre dies katastrophal, da sein Ruf zu Unrecht beschädigt wird. Der B-Test ist wichtig, da die Wahrscheinlichkeit mit 10%, dass ein unschuldiger Sportler des Dopings bezichtigt wird, sehr hoch ist.
Mit der B-Probe sinkt die Wahrscheinlichkeit auf $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 1\%$.
Damit wird die Sicherheit für „ehrliche" Sportler durch den B-Test erhöht.

(*oder ähnliche Formulierungen*)

</td><td>1</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>12</td><td>15</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 6

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

Einen Monat vor einer Landtagswahl ermittelte ein Meinungsforschungsinstitut auf Grund einer großen Umfrage folgende Stimmenanteile für die Parteien A, B, C, D, E und „Sonstige“:

A: 35%, B: 30%, C: 17%, D: 11%, E: 5%, Sonstige: 2% .

Gehen Sie im Folgenden vereinfachend davon aus, dass jede zu befragende oder befragte Person zur Wahl gehen will.

a) Da bei der Umfrage vergessen worden war, das Merkmal „Geschlecht“ abzufragen, wurde ein Call-Center beauftragt, noch einmal eine Telefonumfrage zu starten. Jeder Mitarbeiter des Call-Centers soll 80 verschiedene, zufällig und unabhängig zu ermittelnde Personen telefonisch befragen. Gehen Sie davon aus, dass die obigen Stimmenanteile der Parteien korrekt sind und dass die befragten Personen wahrheitsgemäß die Partei angeben, die sie zu wählen gedenken.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die beiden folgenden Ereignisse möglichst exakt:

  E_1: „Genau 35% der 80 zu befragenden Personen geben Partei A an.“
  E_2: „Mindestens zwei Wähler sonstiger Parteien wurden befragt.“

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten obiger Ereignisse mit jeweils einem geeigneten Näherungsverfahren und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den eben ermittelten. (10 P)

b) Da die 5% - Klausel bei Wahlen eine politische Hürde für die parlamentarische Vertretung einer Partei darstellt, hat die Partei E eine Werbekampagne gestartet. Vor dem Einsatz weiterer Geldmittel möchte die Partei E wissen, ob die bisherige Kampagne erfolgreich war. Dazu beauftragt die Partei ein Institut mit der Durchführung eines Signifikanztestes.

   Entwickeln Sie für das Institut ein Testverfahren für die Befragung von 1500 Personen bei einem Signifikanzniveau von 7%. Geben Sie dazu insbesondere die Entscheidungsregeln an. (9 P)

c) Bei einer Telefonumfrage sind erfahrungsgemäß nur 75% der „zufällig“ angerufenen Personen auch bereit zu einer Meinungsäußerung.

Bestimmen Sie die erforderliche Anzahl von Personen, die das Institut mindestens ansprechen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens 1500 von ihnen zu einer Meinungsäußerung zu bewegen. (8 P)

d) Es werden *n* Personen zum Wahlverhalten befragt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich dabei mindestens eine Person als Wähler der Partei B zu erkennen gibt, betrage mindestens *w*.

Beweisen Sie, dass für den Stimmenanteil *p* dieser Partei die Ungleichung $p \geq 1 - \sqrt[n]{1 - w}$ gilt. (3 P)

Gaußsche Summenfunktion Φ											
z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,
0,01	4960	5040	0,41	3409	6591	0,81	2090	7910	1,21	1131	8869
0,02	4920	5080	0,42	3372	6628	0,82	2061	7939	1,22	1112	8888
0,03	4880	5120	0,43	3336	6664	0,83	2033	7967	1,23	1093	8907
0,04	4840	5160	0,44	3300	6700	0,84	2005	7995	1,24	1075	8925
0,05	4801	5199	0,45	3264	6736	0,85	1977	8023	1,25	1056	8944
0,06	4761	5239	0,46	3228	6772	0,86	1949	8051	1,26	1038	8962
0,07	4721	5279	0,47	3192	6808	0,87	1922	8078	1,27	1020	8980
0,08	4681	5319	0,48	3156	6844	0,88	1894	8106	1,28	1003	8997
0,09	4641	5359	0,49	3121	6879	0,89	1867	8133	1,29	0985	9015
0,10	4602	5398	**0,50**	3085	6915	0,90	1841	8159	1,30	0968	9032
0,11	4562	5438	0,51	3050	6950	0,91	1814	8186	1,31	0951	9049
0,12	4522	5478	0,52	3015	6985	0,92	1788	8212	1,32	0934	9066
0,13	4483	5517	0,53	2981	7019	0,93	1762	8238	1,33	0918	9082
0,14	4443	5557	0,54	2946	7054	0,94	1736	8264	1,34	0901	9099
0,15	4404	5596	0,55	2912	7088	0,95	1711	8289	1,35	0885	9115
0,16	4364	5636	0,56	2877	7123	0,96	1685	8315	1,36	0869	9131
0,17	4325	5675	0,57	2843	7157	0,97	1660	8340	1,37	0853	9147
0,18	4286	5714	0,58	2810	7190	0,98	1635	8365	1,38	0838	9162
0,19	4247	5753	0,59	2776	7224	0,99	1611	8389	1,39	0823	9177
0,20	4207	5793	0,60	2743	7257	**1,00**	1587	8413	1,40	0808	9192
0,21	4168	5832	0,61	2709	7291	1,01	1562	8438	1,41	0793	9207
0,22	4129	5871	0,62	2676	7324	1,02	1539	8461	1,42	0778	9222
0,23	4090	5910	0,63	2643	7357	1,03	1515	8485	1,43	0764	9236
0,24	4052	5948	0,64	2611	7389	1,04	1492	8508	1,44	0749	9251
0,25	4013	5987	0,65	2578	7422	1,05	1469	8531	1,45	0735	9265
0,26	3974	6026	0,66	2546	7454	1,06	1446	8554	1,46	0721	9279
0,27	3936	6064	0,67	2514	7486	1,07	1423	8577	1,47	0708	9292
0,28	3897	6103	0,68	2483	7517	1,08	1401	8599	1,48	0694	9306
0,29	3859	6141	0,69	2451	7549	1,09	1379	8621	1,49	0681	9319
0,30	3821	6179	0,70	2420	7580	1,10	1357	8643	**1,50**	0668	9332
0,31	3783	6217	0,71	2389	7611	1,11	1335	8665	1,51	0655	9345
0,32	3745	6255	0,72	2358	7642	1,12	1314	8686	1,52	0643	9357
0,33	3707	6293	0,73	2327	7673	1,13	1292	8708	1,53	0630	9370
0,34	3669	6331	0,74	2296	7704	1,14	1271	8729	1,54	0618	9382
0,35	3632	6368	0,75	2266	7734	1,15	1251	8749	1,55	0606	9394
0,36	3594	6406	0,76	2236	7764	1,16	1230	8770	1,56	0594	9406
0,37	3557	6443	0,77	2206	7794	1,17	1210	8790	1,57	0582	9418
0,38	3520	6480	0,78	2177	7823	1,18	1190	8810	1,58	0571	9429
0,39	3483	6517	0,79	2148	7852	1,19	1170	8830	1,59	0559	9441
0,40	3446	6554	0,80	2119	7881	1,20	1151	8849	1,60	0548	9452

Gaußsche Summenfunktion Φ											
z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,
1,61	0537	9463	2,01	0222	9778	2,41	0080	9920	2,81	0025	9975
1,62	0526	9474	2,02	0217	9783	2,42	0078	9922	2,82	0024	9976
1,63	0516	9484	2,03	0212	9788	2,43	0075	9925	2,83	0023	9977
1,64	0505	9495	2,04	0207	9793	2,44	0073	9927	2,84	0023	9977
1,65	0495	9505	2,05	0202	9798	2,45	0071	9929	2,85	0022	9978
1,66	0485	9515	2,06	0197	9803	2,46	0069	9931	2,86	0021	9979
1,67	0475	9525	2,07	0192	9808	2,47	0068	9932	2,87	0021	9979
1,68	0465	9535	2,08	0188	9812	2,48	0066	9934	2,88	0020	9980
1,69	0455	9545	2,09	0183	9817	2,49	0064	9936	2,89	0019	9981
1,70	0446	9554	2,10	0179	9821	**2,50**	0062	9938	2,90	0019	9981
1,71	0436	9564	2,11	0174	9826	2,51	0060	9940	2,91	0018	9982
1,72	0427	9573	2,12	0170	9830	2,52	0059	9941	2,92	0018	9982
1,73	0418	9582	2,13	0166	9834	2,53	0057	9943	2,93	0017	9983
1,74	0409	9591	2,14	0162	9838	2,54	0055	9945	2,94	0016	9984
1,75	0401	9599	2,15	0158	9842	2,55	0054	9946	2,95	0016	9984
1,76	0392	9608	2,16	0154	9846	2,56	0052	9948	2,96	0015	9985
1,77	0384	9616	2,17	0150	9850	2,57	0051	9949	2,97	0015	9985
1,78	0375	9625	2,18	0146	9854	2,58	0049	9951	2,98	0014	9986
1,79	0367	9633	2,19	0143	9857	2,59	0048	9952	2,99	0014	9986
1,80	0359	9641	2,20	0139	9861	2,60	0047	9953	**3,00**	0013	9987
1,81	0351	9649	2,21	0136	9864	2,61	0045	9955			
1,82	0344	9656	2,22	0132	9868	2,62	0044	9956			
1,83	0336	9664	2,23	0129	9871	2,63	0043	9957			
1,84	0329	9671	2,24	0125	9875	2,64	0041	9959			
1,85	0322	9678	2,25	0122	9878	2,65	0040	9960			
1,86	0314	9686	2,26	0119	9881	2,66	0039	9961			
1,87	0307	9693	2,27	0116	9884	2,67	0038	9962			
1,88	0301	9699	2,28	0113	9887	2,68	0037	9963			
1,89	0294	9706	2,29	0110	9890	2,69	0036	9964			
1,90	0287	9713	2,3	0107	9893	2,70	0035	9965			
1,91	0281	9719	2,31	0104	9896	2,71	0034	9966			
1,92	0274	9726	2,32	0102	9898	2,72	0033	9967			
1,93	0268	9732	2,33	0099	9901	2,73	0032	9968			
1,94	0262	9738	2,34	0096	9904	2,74	0031	9969			
1,95	0256	9744	2,35	0094	9906	2,75	0030	9970			
1,96	0250	9750	2,36	0091	9909	2,76	0029	9971			
1,97	0244	9756	2,37	0089	9911	2,77	0028	9972			
1,98	0239	9761	2,38	0087	9913	2,78	0027	9973			
1,99	0233	9767	2,39	0084	9916	2,79	0026	9974			
2,00	0228	9772	2,40	0082	9918	2,80	0026	9974			

	Erwartete Leistung	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	X beschreibe die Anzahl der Wähler der Partei A. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 80$, $p = 0{,}35$. $P(X = 28) = \binom{80}{28} \cdot 0{,}35^{28} \cdot 0{,}65^{52} \approx 0{,}0932$. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 80 befragten Personen genau 35% Partei A angeben, liegt bei 9,3%.	2		
	Y beschreibe die Anzahl der Wähler sonstiger Parteien. Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 80$, $p = 0{,}02$. $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 0)$ $= 1 - \binom{80}{1} 0{,}02 \cdot 0{,}98^{79} - \binom{80}{0} 0{,}02^{0} \cdot 0{,}98^{80}$ $\approx 1 - 0{,}3243 - 0{,}1986 = 0{,}4771$ Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Wähler anderer Parteien befragt wurden, liegt bei 47,7%.	2		
	Näherungen mittels der Normalverteilung sind für die Zufallsvariable X erlaubt, da die Laplace-Bedingung $n \cdot p \cdot (1 - p) = 80 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 18{,}2 > 9$ erfüllt ist.	1		
	Mit der (globalen) Näherungsformel ergibt sich $P(X = 28) \approx \Phi\left(\frac{28{,}5 - 28}{\sqrt{18{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{27{,}5 - 28}{\sqrt{18{,}2}}\right)$ $\approx \Phi(0{,}12) - \Phi(-0{,}12) \approx 2 \cdot 0{,}5478 - 1 = 0{,}0956$. Dies ist eine gute Näherung für den o.a. Wert. (*Aus der lokalen Näherungsformel folgt alternativ der Wert* $0{,}0935$.)	2		

	(*Näherungen durch Normalverteilungen für die Zufallsvariable Y sind nicht geeignet, da die Laplace-Bedingung wegen* $n \cdot p \cdot (1-p) = 80 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 1{,}568 < 9$ *nicht erfüllt ist.*) Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit von 2% als ein Indiz für ein „seltenes Ereignis" und erachtet man die Anzahl mit n = 80 als genügend groß, so kann man die Poissonverteilung als Näherung verwenden. (*Ähnliche Begründungen sind möglich.*) $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$ $\approx 1 - e^{-1{,}6} \cdot \frac{1{,}6^0}{0!} - e^{-1{,}6} \cdot \frac{1{,}6^1}{1!} \approx 0{,}4751$. Dies ist eine gute Näherung für den o.a. Wert.		1 2	
b)	Das Ziel des Tests ist eine Absicherung des mindestens 5%-Anteils der Partei E. Dazu ist die Gegenhypothese zu falsifizieren. Die (abzulehnende) Nullhypothese lautet daher $H_0:\ p \leq 0{,}05$. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Wähler der Partei E. X ist unter der Annahme von H_0 binomialverteilt mit den Parametern $n = 1500$ (Stichprobenumfang) und mit der maximalen Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}05$. Man wird die Hypothese ablehnen, wenn die Zahl der Wähler von E relativ groß ist, also im Ablehnungsbereich $\{c+1\ ;...;\ 1500\}$ liegt. Die Laplace-Bedingung $n \cdot p \cdot (1-p) = 1500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 71{,}25 > 9$ ist erfüllt, daher kann die Normalverteilung als Näherung verwendet werden. Auf Grund des Signifikanzniveaus von 7% ergibt sich als Forderung: $P(X \geq c+1) \leq 0{,}07$ bzw. $P(X \leq c) \geq 0{,}93$. $P(X \leq c) \approx \Phi\left(\frac{c+0{,}5-75}{\sqrt{71{,}25}}\right) \geq 0{,}93$ $\frac{c+0{,}5-75}{\sqrt{71{,}25}} \geq 1{,}48$	1 1 1 1	 1	

	$c \geq 86{,}99$ Es ist c = 87, d.h. der Ablehnungsbereich ist $\{88\ ;...;\ 1500\}$ Wir erhalten damit folgende Entscheidungsregel: Nennen 88 oder mehr Anrufer die Partei E, so lehnen wir die Nullhypothese ab, d.h. die Partei E kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 7% davon ausgehen, dass die Werbekampagne erfolgreich war. Nennen dagegen nur höchstens 87 Anrufer die Partei E, so darf die Hypothese nicht abgelehnt werden.		3 1	
c)	X beschreibe die Anzahl der zu einer Meinungsäußerung bereiten Personen unter n anzurufenden Personen. X ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}75$, wobei n so zu bestimmen ist, dass $P(X \geq 1500) \geq 0{,}95$ bzw. $P(X \leq 1499) \leq 0{,}05$ gilt. Da n mindestens 1500 ist, ist die Laplace-Bedingung $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 1500 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 281{,}25 > 9$ erfüllt. $P(X \leq 1499) \approx \Phi\left(\frac{1499{,}5 - 0{,}75n}{\sqrt{0{,}1875n}}\right) \leq 0{,}05$ und $\frac{1499{,}5 - 0{,}75\ n}{\sqrt{0{,}1875}\ \sqrt{n}} \leq -1{,}65$ $0{,}75\ n - 0{,}7145\sqrt{n} - 1499{,}5 \geq 0$ $\left(\sqrt{n}\right)^2 - 0{,}9526\sqrt{n} - 1999{,}3333 \geq 0$ Betrachtet man die entsprechende quadratische Gleichung, so erhält man als Lösungen einerseits $\sqrt{n} \approx -44{,}24$, anderseits $\sqrt{n} \approx 45{,}19$. Betrachtet man nun die Ungleichung, so muss gelten $\sqrt{n} \geq 45{,}19$, also folgt $n \geq 2042{,}14$. Daher müssen mindestens 2043 Personen befragt werden. (*Die Ungleichung kann auch durch Quadrieren o.ä. untersucht werden.*)	1	1 2 1 3	

d)	X beschreibe die Anzahl der Wähler der Partei B. X ist binomialverteilt mit den Parametern n (Personenzahl) und p (Stimmenanteil). Für den vorgegebenen Minimalanteil w wird $P(X \geq 1) \geq w$ gefordert. Danach gilt $1 - P(X = 0) \geq w$ bzw. $P(X = 0) \leq 1 - w$. Weiterhin folgt $\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n-0} = (1-p)^n \leq 1 - w$, also $1 - p \leq \sqrt[n]{1-w}$ und damit $p \geq 1 - \sqrt[n]{1-w}$.			3
		12	15	3