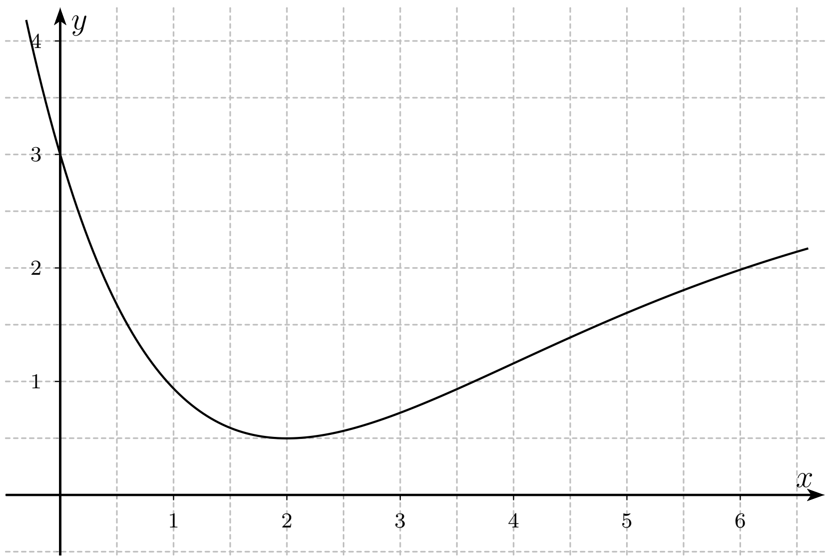
HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



1.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int\limits_3^5 f(x)\,dx$.

(2 P)

Die Funktion F ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle 2 an.

(1 P)

1.3 Zeigen Sie, dass $F(b) = \int\limits_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 P)

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$.

2.1 Zeigen Sie, dass $f'(3) = -\dfrac{3}{e}$ gilt.

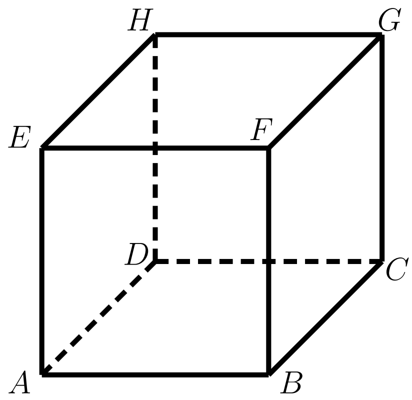
(2 P)

2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3.

(3 P)

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0\,|\,0\,|-2)$, $E(2\,|\,0\,|\,0)$, $F(2\,|\,2\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,0)$



3.1 Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an.

(2 P)

3.2 Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

(3 P)

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Ebene $E: 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1\,|\,0\,|\,2)$ und $Q(5\,|\,2\,|\,6)$.

4.1 Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.
(2 P)

4.2 Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.
(3 P)

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben sind die Punkte $A(-2\,|\,1\,|\,4)$ und $B(-4\,|\,0\,|\,6)$.

5.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

(2 P)

5.2 Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g. Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I: Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.

II: Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

(3 P)

HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

Anna und Björn leben in einer Wohngemeinschaft. Sie bestellen regelmäßig Waren über das Internet. Für einen Zustellversuch eines Paketboten werden die folgenden Ereignisse betrachtet:

A: Bei dem Zustellversuch des Paketboten ist Anna zu Hause.
B: Bei dem Zustellversuch des Paketboten ist Björn zu Hause.

Gegeben ist die folgende Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	0,1	x	
$\overline{A}$			0,7
	0,6		1

6.1 Bestimmen Sie den Wert von x und geben Sie das zugehörige Ereignis sowohl in der Mengenschreibweise als auch in Worten an.

(3 P)

6.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Björn zu Hause ist, wenn Anna nicht zu Hause ist.

(2 P)

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.
Als Ergebnismenge wird { ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW } festgelegt.

7.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

(2 P)

7.2 Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(3 P)

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n = 2$.

8.1 Berechnen Sie für $p = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$.

(2 P)

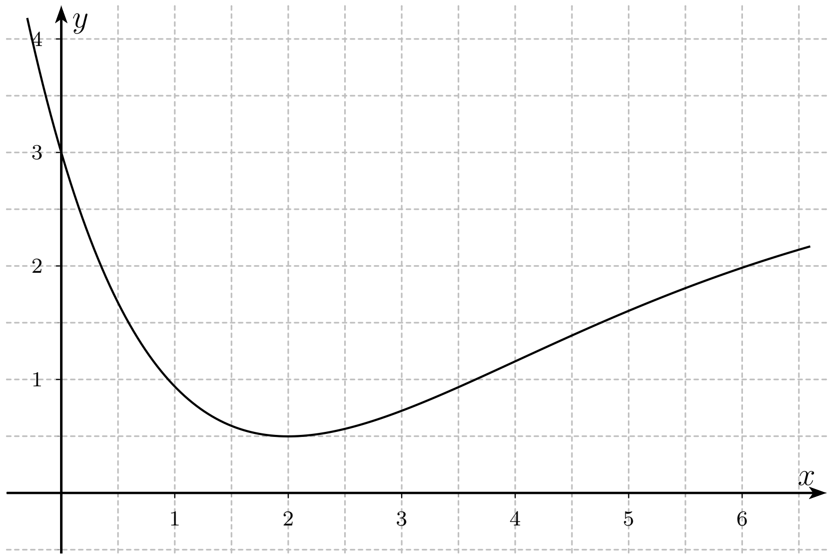
8.2 Zeigen Sie, dass für jeden Wert von p

$P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) = 2$ gilt.

(3 P)

HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



1.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int\limits_3^5 f(x)\,dx$.

(2 P)

Die Funktion F ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1.2 Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle 2 an.

(1 P)

1.3 Zeigen Sie, dass $F(b) = \int\limits_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	Die Abschätzung des Integrals durch ein Trapez liefert $\frac{f(3)+f(5)}{2} \cdot 2 \approx 0{,}7 + 1{,}7 = 2{,}4$. Damit folgt $\int\limits_3^5 f(x)\,dx \approx 2{,}4$. 2 P
1.2	Aus der Abbildung ergibt sich $F'(2) \approx 0{,}5$. 1 P
1.3	Mit $F(3) = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\int\limits_3^b f(x)\,dx = F(b) - F(3) = F(b)$. 2 P

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$.

2.1 Zeigen Sie, dass $f'(3) = -\frac{3}{e}$ gilt.

(2 P)

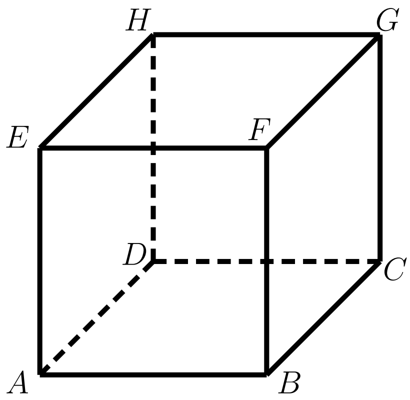
2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} - x^2 \cdot e^{2-x} = (2x - x^2) \cdot e^{2-x}$ $f'(3) = (6-9) \cdot e^{-1} = -\frac{3}{e}$ 2 P
2.2	$t(x) = mx + b$ sei die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(3 \mid f(3))$. $m = f'(3) = -\frac{3}{e}$ $t(3) = f(3) \Leftrightarrow \frac{-9}{e} + b = \frac{9}{e} \Leftrightarrow b = \frac{18}{e}$ Eine Gleichung der gesuchten Tangente ist $t(x) = -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{18}{e}$. 3 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0\,|\,0\,|\,-2)$, $E(2\,|\,0\,|\,0)$, $F(2\,|\,2\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,0)$

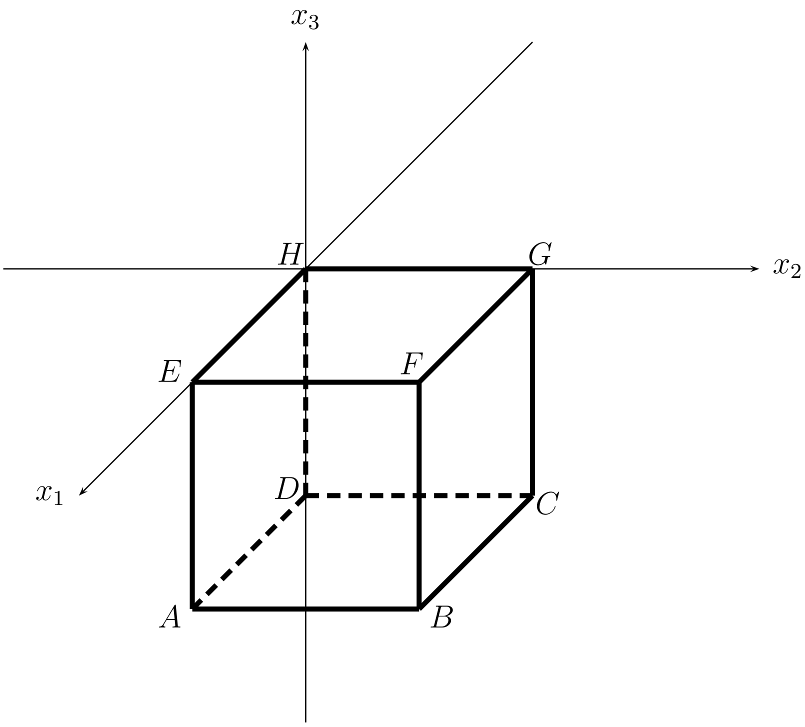


3.1 Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an.

(2 P)

3.2 Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	 Der Punkt A hat die Koordinaten $A(2\,\|\,0\,\|-2)$. *Hinweis: Auf die Skalierung der Achsen kann verzichtet werden.* 2 P
3.2	Der Punkt P hat die Koordinaten $P(2\,\|\,2\,\|\,x_3)$, wobei $-2 \leq x_3 \leq 0$ ist. Aus dem Ansatz $\|\overrightarrow{HP}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + x_3^2} = 3$ folgt $x_3^2 = 1 \Leftrightarrow x_3 = -1 \vee x_3 = 1$. Wegen $-2 \leq x_3 \leq 0$ ergibt sich $P(2\,\|\,2\,\|-1)$. 3 P

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Ebene $E: 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1\,|\,0\,|\,2)$ und $Q(5\,|\,2\,|\,6)$.

4.1 Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft. (2 P)

4.2 Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F. (3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	Es gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ verläuft die Gerade g senkrecht zur Ebene E. 2 P
4.2	Für den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$. Die Ebene F ist wegen 2.1 parallel zu E. Wegen $M \in F$ gilt $F: 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 2 \cdot 3 + 1 + 2 \cdot 4 = 15$. 3 P

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben sind die Punkte $A(-2\,|\,1\,|\,4)$ und $B(-4\,|\,0\,|\,6)$.

5.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

(2 P)

5.2 Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g. Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I: Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.

II: Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)
5.1	$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Der Punkt C hat somit die Koordinaten $C(2\,\|\,3\,\|\,0)$. 2 P
5.2	Eine Gleichung der Geraden g lautet $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wegen $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ hat der Punkt B vom Punkt A den Abstand 3. Eine Gleichung einer möglichen Geraden h lautet $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3 P

HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

Anna und Björn leben in einer Wohngemeinschaft. Sie bestellen regelmäßig Waren über das Internet. Für einen Zustellversuch eines Paketboten werden die folgenden Ereignisse betrachtet:

A: Bei dem Zustellversuch des Paketboten ist Anna zu Hause.
B: Bei dem Zustellversuch des Paketboten ist Björn zu Hause.

Gegeben ist die folgende Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	0,1	x	
$\overline{A}$			0,7
	0,6		1

6.1 Bestimmen Sie den Wert von x und geben Sie das zugehörige Ereignis sowohl in der Mengenschreibweise als auch in Worten an.

(3 P)

6.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Björn zu Hause ist, wenn Anna nicht zu Hause ist.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)
6.1	see below

6.1

	B	$\overline{B}$	
A	0,1	0,2	0,3
$\overline{A}$			0,7
	0,6		1

Das zugehörige Ereignis ist $A \cap \overline{B}$ bzw. „Beim Zustellversuch ist Anna zu Hause und Björn ist nicht zu Hause".

3 P

6.2

	B	$\overline{B}$	
A	0,1	0,2	0,3
$\overline{A}$	0,5		0,7
	0,6		1

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}5}{0{,}7} = \frac{5}{7}$$

2 P

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.
Als Ergebnismenge wird { ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW } festgelegt.

7.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

(2 P)

7.2 Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	Es gilt $P(\{ZZ\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ und $P(\{ZWZ\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Also gibt es zwei Elementarereignisse bzw. Ergebnisse mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten. Daher handelt es sich nicht um ein Laplace-Experiment. 2 P
7.2	Es gilt $P(X=2) = P(\{ZZ\}) + P(\{WW\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $P(X=3) = 1 - P(X=2) = \frac{1}{2}$. Damit folgt $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2{,}5$. 3 P

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n = 2$.

8.1 Berechnen Sie für $p = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$.

(2 P)

8.2 Zeigen Sie, dass für jeden Wert von p

$P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) = 2$ gilt.

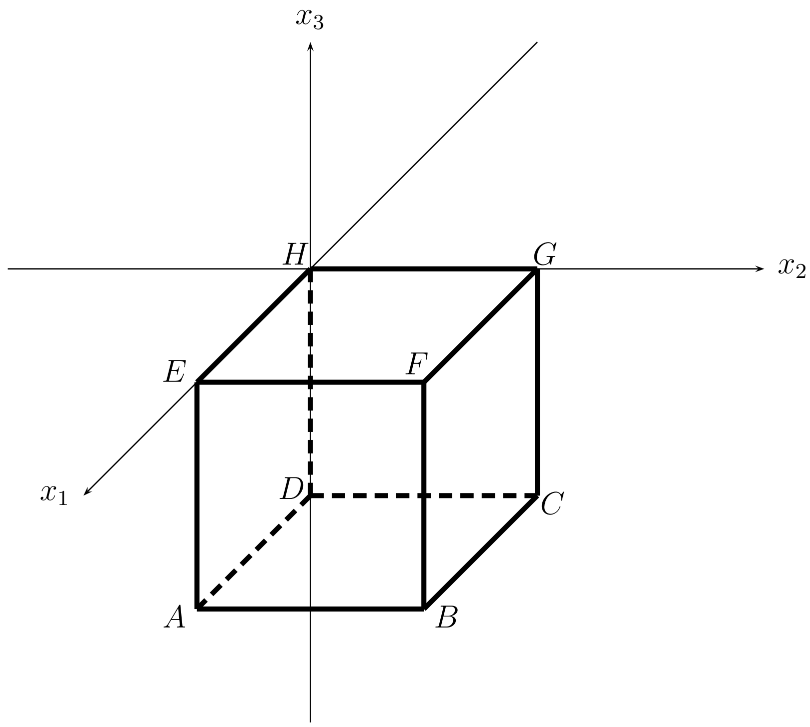
(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \binom{2}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^2 + \binom{2}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^1 \\ &= 0{,}6^2 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 + 0{,}48 \\ &= 0{,}84 \end{aligned}$ 2 P
8.2	$\begin{aligned} & P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) \\ = \; & (P(X=1) + P(X=2)) + (P(X=0) + P(X=2)) + (P(X=0) + P(X=1)) \\ = \; & 2 \cdot (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\ = \; & 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$ 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	Die Abschätzung des Integrals durch ein Trapez liefert $\frac{f(3)+f(5)}{2} \cdot 2 \approx 0{,}7 + 1{,}7 = 2{,}4$. Damit folgt $\int\limits_3^5 f(x)\,dx \approx 2{,}4$. 2 P
1.2	Aus der Abbildung ergibt sich $F'(2) \approx 0{,}5$. 1 P
1.3	Mit $F(3) = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\int\limits_3^b f(x)\,dx = F(b) - F(3) = F(b)$. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} - x^2 \cdot e^{2-x} = (2x - x^2) \cdot e^{2-x}$ $f'(3) = (6-9) \cdot e^{-1} = -\dfrac{3}{e}$ 2 P
2.2	$t(x) = mx + b$ sei die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(3 \mid f(3))$. $m = f'(3) = -\dfrac{3}{e}$ $t(3) = f(3) \Leftrightarrow \dfrac{-9}{e} + b = \dfrac{9}{e} \Leftrightarrow b = \dfrac{18}{e}$ Eine Gleichung der gesuchten Tangente ist $t(x) = -\dfrac{3}{e} \cdot x + \dfrac{18}{e}$. 3 P

<table>
<tr><td></td><td>Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>


Der Punkt A hat die Koordinaten $A(2\,|\,0\,|-2)$.

Hinweis: Auf die Skalierung der Achsen kann verzichtet werden.

2 P</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Der Punkt P hat die Koordinaten $P(2\,|\,2\,|\,x_3)$, wobei $-2 \leq x_3 \leq 0$ ist.

Aus dem Ansatz $|\overrightarrow{HP}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + x_3^2} = 3$ folgt $x_3^2 = 1 \Leftrightarrow x_3 = -1 \vee x_3 = 1$.

Wegen $-2 \leq x_3 \leq 0$ ergibt sich $P(2\,|\,2\,|-1)$.

3 P</td></tr>
</table>

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	Es gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ verläuft die Gerade g senkrecht zur Ebene E. 2 P
4.2	Für den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$. Die Ebene F ist wegen 2.1 parallel zu E. Wegen $M \in F$ gilt $F: 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 2 \cdot 3 + 1 + 2 \cdot 4 = 15$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)
5.1	$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ Der Punkt C hat somit die Koordinaten $C(2 \mid 3 \mid 0)$. 2 P
5.2	Eine Gleichung der Geraden g lautet $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Wegen $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ hat der Punkt B vom Punkt A den Abstand 3. Eine Gleichung einer möglichen Geraden h lautet $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)
6.1	<table><tr><td></td><td>B</td><td>$\overline{B}$</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td></tr><tr><td>$\overline{A}$</td><td></td><td></td><td>0,7</td></tr><tr><td></td><td>0,6</td><td></td><td>1</td></tr></table> Das zugehörige Ereignis ist $A \cap \overline{B}$ bzw. „Beim Zustellversuch ist Anna zu Hause und Björn ist nicht zu Hause“. 3 P
6.2	<table><tr><td></td><td>B</td><td>$\overline{B}$</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td></tr><tr><td>$\overline{A}$</td><td>0,5</td><td></td><td>0,7</td></tr><tr><td></td><td>0,6</td><td></td><td>1</td></tr></table> $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}5}{0{,}7} = \frac{5}{7}$ 2 P

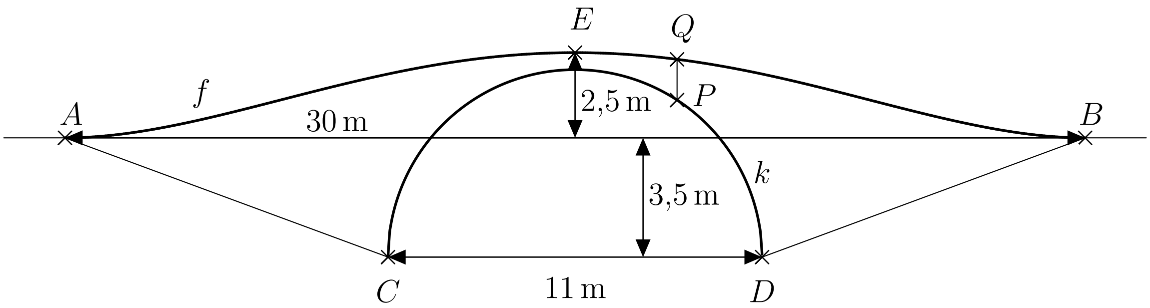
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	Es gilt $P(\{ZZ\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ und $P(\{ZWZ\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Also gibt es zwei Elementarereignisse bzw. Ergebnisse mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten. Daher handelt es sich nicht um ein Laplace-Experiment. 2 P
7.2	Es gilt $P(X=2) = P(\{ZZ\}) + P(\{WW\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $P(X=3) = 1 - P(X=2) = \frac{1}{2}$. Damit folgt $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2{,}5$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \binom{2}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^2 + \binom{2}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^1 \\ &= 0{,}6^2 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 + 0{,}48 \\ &= 0{,}84 \end{aligned}$ 2 P
8.2	$\begin{aligned} & P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) \\ = \; & (P(X=1) + P(X=2)) + (P(X=0) + P(X=2)) + (P(X=0) + P(X=1)) \\ = \; & 2 \cdot (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\ = \; & 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$ 3 P

erreicht: _________ von 40 Punkten

Aufgabe 1: Analysis-CAS

In einem Park überspannt eine Steinbrücke einen Kanal. Die folgende Abbildung zeigt die achsensymmetrische Seitenansicht, also den Längsschnitt der Brücke.



Die Bodenlinie AB liegt $2{,}5\,\mathrm{m}$ unter dem höchsten Punkt E der Brücke und $3{,}5\,\mathrm{m}$ über dem Wasserspiegel $\overline{CD}$. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt $30\,\mathrm{m}$. Die horizontalen Zufahrtswege schließen in den Punkten A und B knickfrei an den Brückenbogen an.

Das zur Beschreibung verwendete Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Der obere Rand des Brückenbogens verläuft von A über E nach B. Er kann zwischen A und B durch eine ganzrationale Funktion f vierten Grades beschrieben werden.

- Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

  [Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{20250} \cdot x^4 - \frac{1}{45} \cdot x^2 + \frac{5}{2}$]
- Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $-3{,}5$.
- Bestimmen Sie die größte Steigung des Graphen von f im Intervall $[-15\,;\,15]$.

(10 P)

b) In der Seitenansicht der Brücke verläuft die Böschung des Kanals geradlinig von A nach C sowie von D nach B. Die Öffnung der Brücke ist ein Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ und wird durch den Graphen der Funktion k mit

$$k(x) = \sqrt{5{,}5^2 - x^2} - 3{,}5$$

beschrieben.

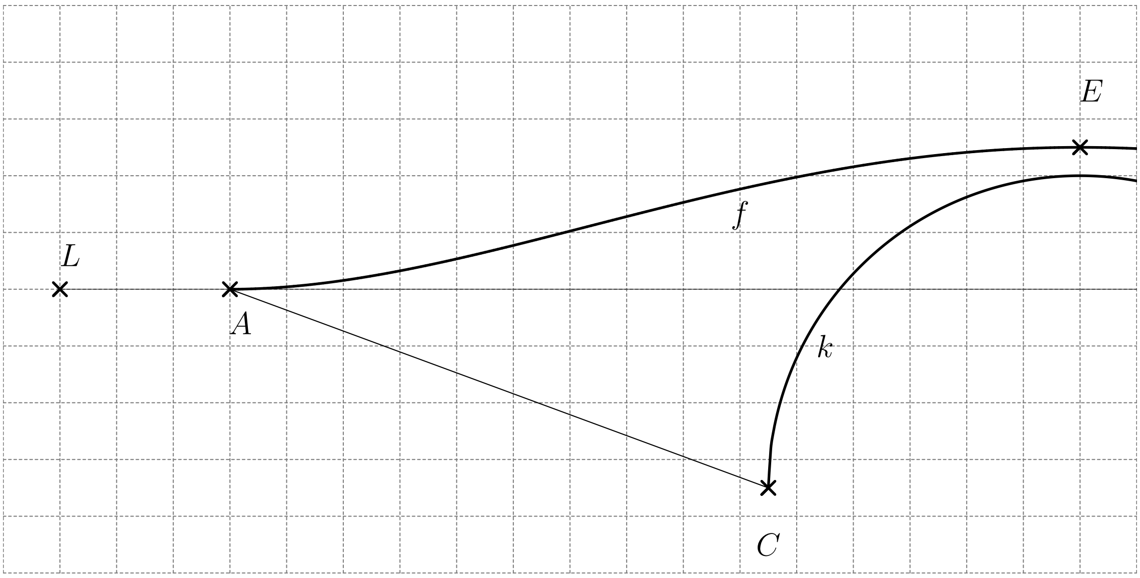
Die Bodenlinie teilt die oben abgebildete Seitenfläche der Brücke in zwei Teilflächen. Berechnen Sie die Inhalte dieser Teilflächen.

(10 P)

c) Für Besichtigungstouren stehen den Besuchern Elektrofahrzeuge zur Verfügung. Diese Fahrzeuge können eine maximale Steigung von $20\,\%$ überwinden.

Die vorgegebene Route überquert die Brücke von A nach B. Um eine Überfahrt zu ermöglichen, soll auf der linken Brückenseite eine geradlinige Rampe verlegt werden, die auf Höhe der Bodenlinie im Punkt L genau $18\,\mathrm{m}$ vor der Mitte der Brücke beginnt und in einem Punkt T tangential an den Brückenbogen anschließt.

- Zeichnen Sie den Verlauf der Rampe in die folgende maßstabsgetreue Abbildung ein und ermitteln Sie mit Hilfe dieser Zeichnung die ungefähre Steigung der Rampe.



- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T, ohne die zeichnerisch ermittelten Werte zu verwenden.

- Eine ältere Planung sah eine steilere Rampe vor, die im Punkt $S(-5 \mid f(-5))$ an den Brückenbogen tangential anschließen sollte.
  Zeigen Sie, dass diese Rampe zum Punkt A geführt hätte und dass die Forderung nach einer maximalen Steigung von weniger als $20\,\%$ auf dem gesamten Weg von A nach E erfüllt worden wäre.

(12 P)

d) Ein Kabel soll vom Punkt $P(\sqrt{10} \mid k(\sqrt{10}))$ am unteren Rand der Brücke zu einem Punkt Q am oberen Rand der Brücke verlegt werden (siehe Abbildung auf Seite 1).

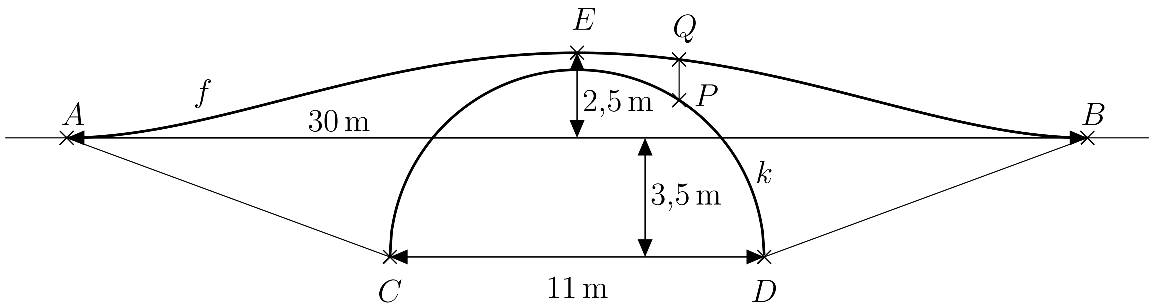
- Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ bei vertikalem Verlauf des Bohrlochs.

- Bestimmen Sie bei unveränderter Lage des Punktes P die Stelle im Intervall $[3\,;\,4]$, an der der Punkt Q liegen muss, damit das Bohrloch möglichst kurz wird. Geben Sie dessen Länge an.

(8 P)

Aufgabe 1: Analysis-CAS

In einem Park überspannt eine Steinbrücke einen Kanal. Die folgende Abbildung zeigt die achsensymmetrische Seitenansicht, also den Längsschnitt der Brücke.



Die Bodenlinie AB liegt $2{,}5\,\text{m}$ unter dem höchsten Punkt E der Brücke und $3{,}5\,\text{m}$ über dem Wasserspiegel $\overline{CD}$. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt $30\,\text{m}$. Die horizontalen Zufahrtswege schließen in den Punkten A und B knickfrei an den Brückenbogen an.

Das zur Beschreibung verwendete Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Der obere Rand des Brückenbogens verläuft von A über E nach B. Er kann zwischen A und B durch eine ganzrationale Funktion f vierten Grades beschrieben werden.

- Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

  [Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{20250} \cdot x^4 - \frac{1}{45} \cdot x^2 + \frac{5}{2}$]

- Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $-3{,}5$.

- Bestimmen Sie die größte Steigung des Graphen von f im Intervall $[-15\,;\,15]$.

(10 P)

b) In der Seitenansicht der Brücke verläuft die Böschung des Kanals geradlinig von A nach C sowie von D nach B. Die Öffnung der Brücke ist ein Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{CD}$ und wird durch den Graphen der Funktion k mit

$$k(x) = \sqrt{5{,}5^2 - x^2} - 3{,}5$$

beschrieben.

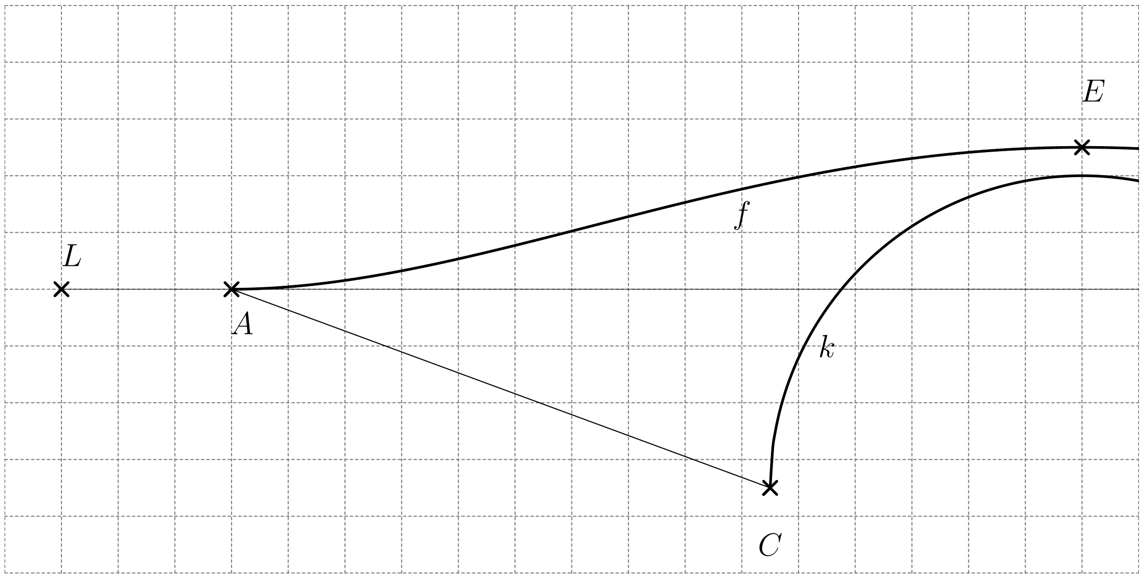
Die Bodenlinie teilt die oben abgebildete Seitenfläche der Brücke in zwei Teilflächen. Berechnen Sie die Inhalte dieser Teilflächen.

(10 P)

c) Für Besichtigungstouren stehen den Besuchern Elektrofahrzeuge zur Verfügung. Diese Fahrzeuge können eine maximale Steigung von $20\,\%$ überwinden.

Die vorgegebene Route überquert die Brücke von A nach B. Um eine Überfahrt zu ermöglichen, soll auf der linken Brückenseite eine geradlinige Rampe verlegt werden, die auf Höhe der Bodenlinie im Punkt L genau $18\,\mathrm{m}$ vor der Mitte der Brücke beginnt und in einem Punkt T tangential an den Brückenbogen anschließt.

- Zeichnen Sie den Verlauf der Rampe in die folgende maßstabsgetreue Abbildung ein und ermitteln Sie mit Hilfe dieser Zeichnung die ungefähre Steigung der Rampe.



- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T, ohne die zeichnerisch ermittelten Werte zu verwenden.

- Eine ältere Planung sah eine steilere Rampe vor, die im Punkt $S(-5 \mid f(-5))$ an den Brückenbogen tangential anschließen sollte.
  Zeigen Sie, dass diese Rampe zum Punkt A geführt hätte und dass die Forderung nach einer maximalen Steigung von weniger als $20\,\%$ auf dem gesamten Weg von A nach E erfüllt worden wäre.

(12 P)

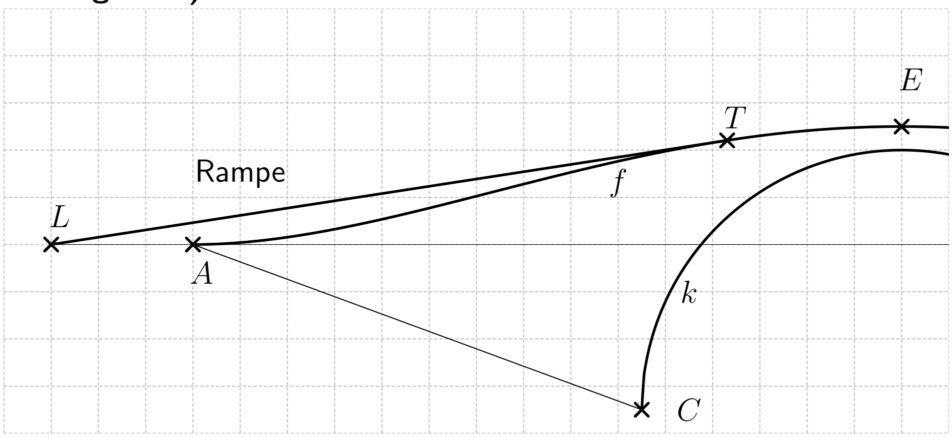
d) Ein Kabel soll vom Punkt $P(\sqrt{10} \mid k(\sqrt{10}))$ am unteren Rand der Brücke zu einem Punkt Q am oberen Rand der Brücke verlegt werden (siehe Abbildung auf Seite 1).

- Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ bei vertikalem Verlauf des Bohrlochs.

- Bestimmen Sie bei unveränderter Lage des Punktes P die Stelle im Intervall $[3\,;\,4]$, an der der Punkt Q liegen muss, damit das Bohrloch möglichst kurz wird. Geben Sie dessen Länge an.

(8 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Aufgrund der Achsensymmetrie ist ein Ansatz der Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ möglich. Aus dem linearen Gleichungssystem $\left\| \begin{array}{rcl} f(15) & = & 0 \\ f'(15) & = & 0 \\ f(0) & = & 2{,}5 \end{array} \right\|$ ergibt sich $a = \frac{1}{20250}$, $b = -\frac{1}{45}$ und $c = \frac{5}{2}$. Folglich ist $f(x) = \frac{1}{20250} \cdot x^4 - \frac{1}{45} \cdot x^2 + \frac{5}{2}$.	4		
$f'(-3{,}5) \approx 0{,}1471$ Die Steigung an der Stelle $-3{,}5$ beträgt ca. $0{,}1471$.	1		
An den Wendestellen ist der Betrag der Steigung lokal maximal. Eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle x von f ist $f''(x) = 0$.	1		
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5\sqrt{3} \approx -8{,}66 \vee x = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$	1		
Der Graph hat die größte Steigung zwischen den Punkten A und E. Weil die Steigung in diesen Punkten null ist, ist $f'(-5\sqrt{3}) = \frac{4}{27}\sqrt{3} \approx 0{,}2566$ die größte Steigung.	3		
Teilaufgabe b) Man bestimmt die Stellen, an denen der Halbkreis die Bodenlinie schneidet. $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3\sqrt{2} \vee x = 3\sqrt{2}$		2	
$A_{oben} = \int\limits_{-15}^{15} f(x)\,dx - \int\limits_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} k(x)\,dx \approx 28{,}1983$ Der Inhalt der Teilfläche oberhalb der Bodenlinie beträgt ca. $28{,}2\,\mathrm{m}^2$.		4	
Zur Bestimmung der Teilfläche unterhalb der Bodenlinie kann man den Inhalt des Trapezes $ACDB$ betrachten. Von diesem Inhalt subtrahiert man den gesamten Flächeninhalt des Halbkreises und addiert den Inhalt des Kreissegments oberhalb der Bodenlinie. $A_{unten} = \frac{11+30}{2} \cdot 3{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 + \int\limits_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} k(x)\,dx \approx 36{,}0351$ Der Inhalt der Teilfläche unterhalb der Bodenlinie beträgt ca. $36\,\mathrm{m}^2$.		4	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe c)  Man entnimmt der Zeichnung beispielsweise $\Delta x \approx 14$ und $\Delta y \approx 2{,}2$. Die Steigung beträgt $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx 0{,}16$.	1 2		
Die Rampe erstreckt sich vom Punkt $L(-18\|0)$ bis zu dem zu bestimmenden Punkt $T(x \mid f(x))$. Die Steigung der Rampe muss gleich der Steigung des Graphen von f an der Stelle x sein. $\dfrac{f(x)-0}{x-(-18)} = f'(x)$ $\Leftrightarrow x = -\sqrt{69}-12 \;\vee\; x=-15 \;\vee\; x=\sqrt{69}-12 \;\vee\; x=15$ Da T zwischen den Punkten A und E liegt, kommt nur die Stelle $\sqrt{69}-12 \approx -3{,}69$ in Frage. T hat ungefähr die Koordinaten $T(-3{,}69\|2{,}21)$.			4
Die Tangentensteigung im Punkt S ist $f'(-5) = \frac{16}{81} \approx 0{,}1975$. Die Steigung der Sekante von A nach S ist $\dfrac{f(-5)-0}{-5-(-15)} = \dfrac{16}{81}$. Die Steigung der Tangente im Punkt S stimmt exakt mit der Steigung der Sekante AS überein. Damit verläuft die Tangente an den Graphen von f im Punkt S durch A. Die Steigung der Rampe ist kleiner als $20\,\%$. Weil die Stelle -5 rechts von der einzigen Wendestelle im Intervall $[-15\,;\,0]$ liegt, gilt $f'(x) < f'(-5)$ für alle x mit $-5 < x \leq 0$. Damit ist die Forderung, dass die Steigung weniger als $20\,\%$ betragen soll, auch auf dem weiteren Weg von S nach E erfüllt.	1 1	1 2	

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe d)
$f(\sqrt{10}) - k(\sqrt{10}) = \frac{1039}{810} \approx 1{,}2827$
Bei vertikaler Bohrung beträgt die Länge des Bohrlochs etwa $1{,}28\,\mathrm{m}$.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Liegt Q nicht vertikal über P, sondern an einer anderen Stelle x, so wird die Länge l des Bohrlochs durch die Funktion l mit
$$l(x) = \sqrt{(x-\sqrt{10})^2 + (f(x) - k(\sqrt{10}))^2}$$
angegeben.

Eine notwendige Bedingung für eine lokale extremale Länge an der Stelle x ist $l'(x) = 0$.
$l'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 3{,}3398$

Die Lösung dieser Gleichung werde mit x_E bezeichnet.
Wegen $l(x_E) \approx 1{,}2707$, $l(3) \approx 1{,}3141$ und $l(4) \approx 1{,}4285$ beträgt die minimale Länge des Bohrlochs etwa $1{,}27\,\mathrm{m}$.

Der Punkt Q muss ungefähr an der Stelle $3{,}3398$ liegen.</td><td></td><td>2

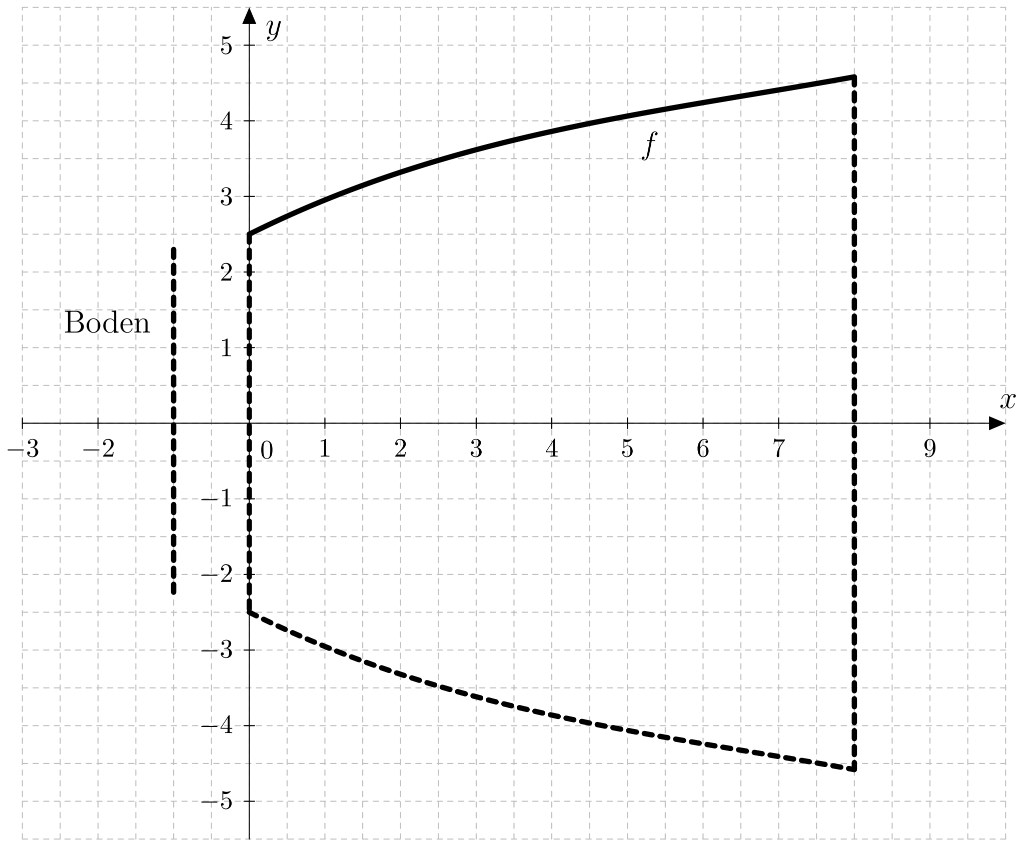
2

2

1</td><td></td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>16</td><td>20</td><td>4</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Die Abbildung zeigt den Längsschnitt des inneren Randes eines rotationssymmetrischen Glases. Eine Einheit entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.
Die obere Begrenzung des Längsschnittes des inneren Randes des Glases kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = 0{,}0025x^3 - 0{,}05x^2 + 0{,}5x + 2{,}5$ im Intervall $[0\,;\,8]$ beschrieben werden.



a) Die obere Begrenzung des Längsschnittes des äußeren Randes des Glases soll durch den Graphen einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot e^{b\cdot x} + c$ im Intervall $[-1\,;\,8]$ beschrieben werden. Der Graph verläuft durch die Punkte $(0\,|\,2{,}8)$, $(4\,|\,4{,}16)$ und $(8\,|\,4{,}88)$.

- Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von g.

Rechnen Sie im Folgenden mit $g(x) = -2{,}89 \cdot e^{-0{,}16\cdot x} + 5{,}69$.

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g in der obigen Abbildung.
- Berechnen Sie die kleinste und die größte in y-Richtung gemessene Dicke der Glaswand im Intervall $[0\,;\,8]$.
- Berechnen Sie das für die Herstellung des gesamten Glases benötigte Volumen des Glasmaterials. Der Boden ist durchgängig eben.

(14 P)

b) Der Graph der Funktion f hat einen Wendepunkt W. Ein Auffüllen des aufrecht stehenden Glases bis zu diesem Punkt macht einen guten optischen Eindruck.

- Geben Sie die zugehörige Füllhöhe an.
- Begründen Sie, dass die Gleichung

$$\pi \cdot \int_0^h (f(x))^2 \, dx = 350$$

im Intervall $[0\,;\,8]$ höchstens eine Lösung hat.

(6 P)

c) Ausgehend von einem beliebigen Punkt $P(x|f(x))$ auf der Innenrandkurve soll die Dicke des Glases in Richtung der Normalen zum Graphen von f, also senkrecht zur Tangente an der Stelle x, gemessen werden.

- Zeigen Sie, dass bei diesem Verfahren nie in y-Richtung gemessen wird.
- Berechnen Sie die Dicke der Glaswand ausgehend vom Punkt $(0\,|\,2{,}5)$.

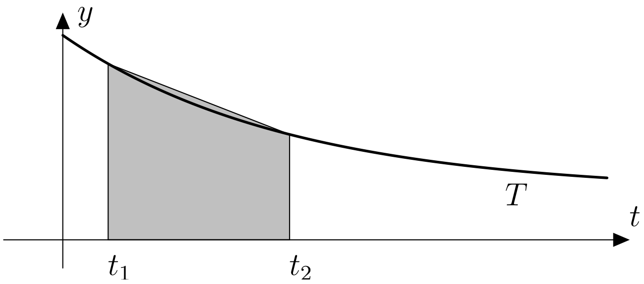
(9 P)

d) In einem Labor mit der Raumtemperatur $19\,°\mathrm{C}$ wird ein Heißgetränk in das Glas gefüllt. $T(t)$ gibt die Temperatur des Heißgetränkes in $°\mathrm{C}$ an; dabei beschreibt t die Zeit in Minuten nach Messbeginn.
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Heißgetränkes $90\,°\mathrm{C}$. Die momentane Änderungsrate der Temperatur T ist durch

$$T'(t) = -0{,}71 \cdot e^{-0{,}01t}$$

gegeben.

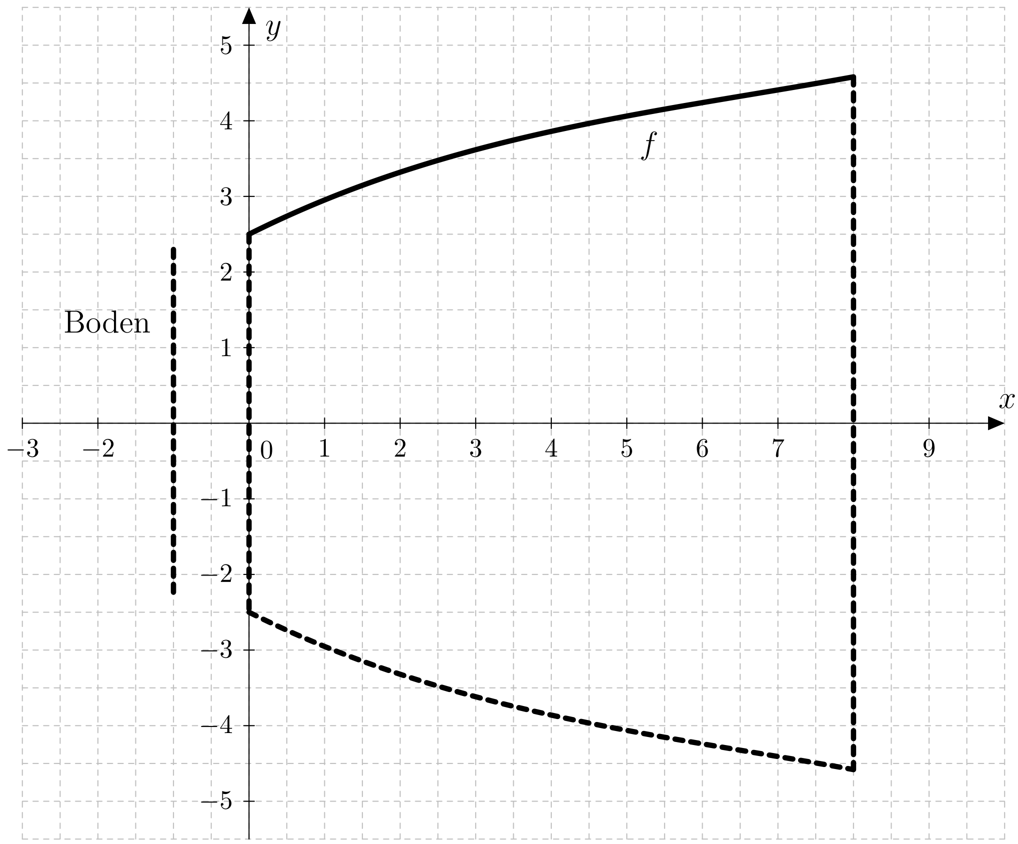
- Berechnen Sie die Temperaturabnahme in den ersten 60 Minuten.
- Bestimmen Sie $T(t)$.
- Begründen Sie unter Verwendung der folgenden Abbildung, dass für jedes Zeitintervall $[t_1\,;\,t_2]$ mit $0 \leq t_1 < t_2$ die durchschnittliche Temperatur in diesem Intervall kleiner ist als der arithmetische Mittelwert der Temperaturen $T(t_1)$ und $T(t_2)$.



(11 P)

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Die Abbildung zeigt den Längsschnitt des inneren Randes eines rotationssymmetrischen Glases. Eine Einheit entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.
Die obere Begrenzung des Längsschnittes des inneren Randes des Glases kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = 0{,}0025x^3 - 0{,}05x^2 + 0{,}5x + 2{,}5$ im Intervall $[0\,;\,8]$ beschrieben werden.



a) Die obere Begrenzung des Längsschnittes des äußeren Randes des Glases soll durch den Graphen einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot e^{b \cdot x} + c$ im Intervall $[-1\,;\,8]$ beschrieben werden. Der Graph verläuft durch die Punkte $(0 \mid 2{,}8)$, $(4 \mid 4{,}16)$ und $(8 \mid 4{,}88)$.

- Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von g.

Rechnen Sie im Folgenden mit $g(x) = -2{,}89 \cdot e^{-0{,}16 \cdot x} + 5{,}69$.

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g in der obigen Abbildung.
- Berechnen Sie die kleinste und die größte in y-Richtung gemessene Dicke der Glaswand im Intervall $[0\,;\,8]$.
- Berechnen Sie das für die Herstellung des gesamten Glases benötigte Volumen des Glasmaterials. Der Boden ist durchgängig eben.

(14 P)

b) Der Graph der Funktion f hat einen Wendepunkt W. Ein Auffüllen des aufrecht stehenden Glases bis zu diesem Punkt macht einen guten optischen Eindruck.

- Geben Sie die zugehörige Füllhöhe an.
- Begründen Sie, dass die Gleichung

$$\pi \cdot \int_0^h (f(x))^2 \, dx = 350$$

im Intervall $[0\,;\,8]$ höchstens eine Lösung hat.

(6 P)

c) Ausgehend von einem beliebigen Punkt $P(x|f(x))$ auf der Innenrandkurve soll die Dicke des Glases in Richtung der Normalen zum Graphen von f, also senkrecht zur Tangente an der Stelle x, gemessen werden.

- Zeigen Sie, dass bei diesem Verfahren nie in y-Richtung gemessen wird.
- Berechnen Sie die Dicke der Glaswand ausgehend vom Punkt $(0\,|\,2{,}5)$.

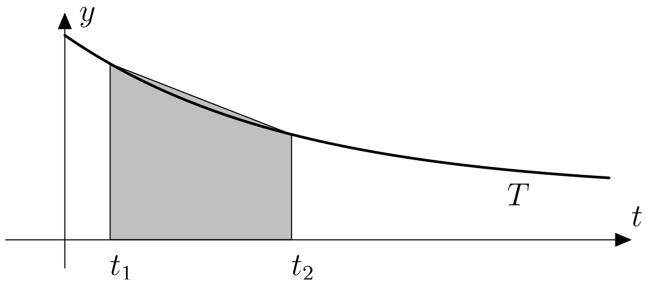
(9 P)

d) In einem Labor mit der Raumtemperatur $19\,^\circ\mathrm{C}$ wird ein Heißgetränk in das Glas gefüllt. $T(t)$ gibt die Temperatur des Heißgetränkes in $^\circ\mathrm{C}$ an; dabei beschreibt t die Zeit in Minuten nach Messbeginn.
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Heißgetränkes $90\,^\circ\mathrm{C}$. Die momentane Änderungsrate der Temperatur T ist durch

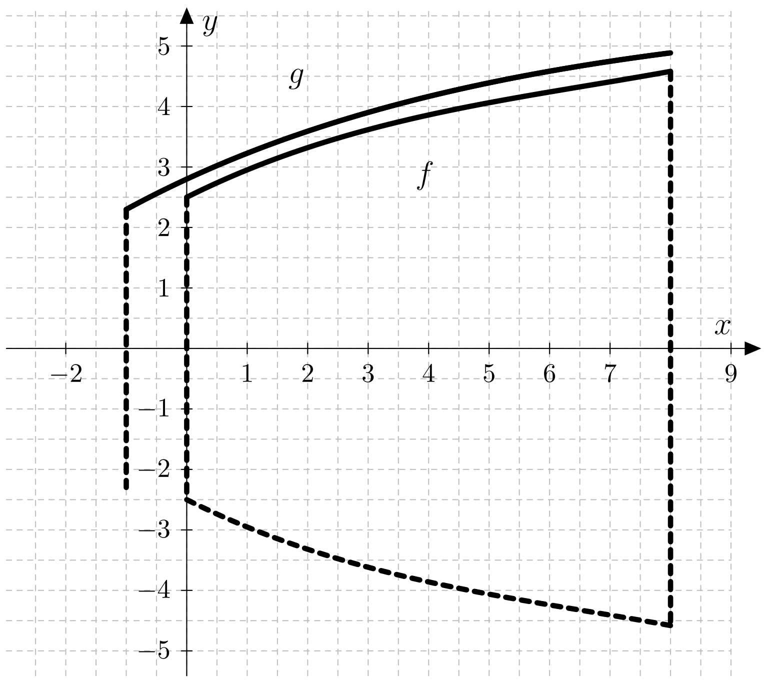
$$T'(t) = -0{,}71 \cdot e^{-0{,}01t}$$

gegeben.

- Berechnen Sie die Temperaturabnahme in den ersten 60 Minuten.
- Bestimmen Sie $T(t)$.
- Begründen Sie unter Verwendung der folgenden Abbildung, dass für jedes Zeitintervall $[t_1\,;\,t_2]$ mit $0 \leq t_1 < t_2$ die durchschnittliche Temperatur in diesem Intervall kleiner ist als der arithmetische Mittelwert der Temperaturen $T(t_1)$ und $T(t_2)$.



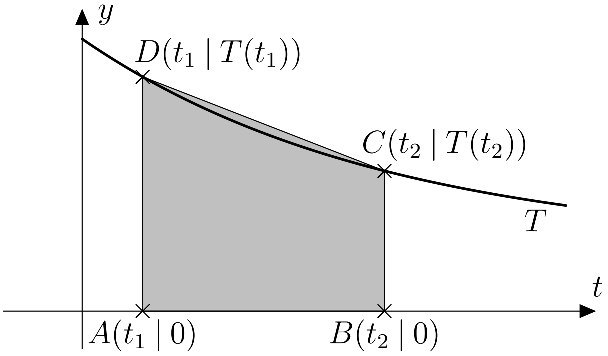
(11 P)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe a)
Aus den gegebenen Bedingungen ergibt sich das Gleichungssytem
$$\left|\begin{array}{l} g(0) = 2{,}80 \\ g(4) = 4{,}16 \\ g(8) = 4{,}88 \end{array}\right|$$
mit den Lösungen $a = -2{,}89$, $b \approx -0{,}1590$ und $c = 5{,}69$.
Daher ist $g(x) \approx -2{,}89 \cdot e^{-0{,}16 \cdot x} + 5{,}69$.</td><td>3
1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Zur Berechnung der Dicke der Glaswand in y-Richtung verwendet man die Differenzfunktion d von g und f mit $d(x) = g(x) - f(x)$.

Eine notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle x von d ist $d'(x) = 0$.
$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -9{,}6289 \quad \vee \quad x \approx 1{,}6667 \quad \vee \quad x \approx 6{,}3495$

Mit $d(0) = 0{,}3$, $d(8) \approx 0{,}31$, $d(1{,}67) \approx 0{,}27$ und $d(6{,}35) \approx 0{,}34$ folgt, dass die kleinste Dicke in y-Richtung ca. $2{,}7\,\mathrm{mm}$ und die größte Dicke ca. $3{,}4\,\mathrm{mm}$ beträgt.</td><td>1
2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{8} (g(x))^2\,dx - \pi \cdot \int_{0}^{8} (f(x))^2\,dx \approx 81{,}4527$$
Das Volumen beträgt ca. $81{,}45\,\mathrm{cm}^3$.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

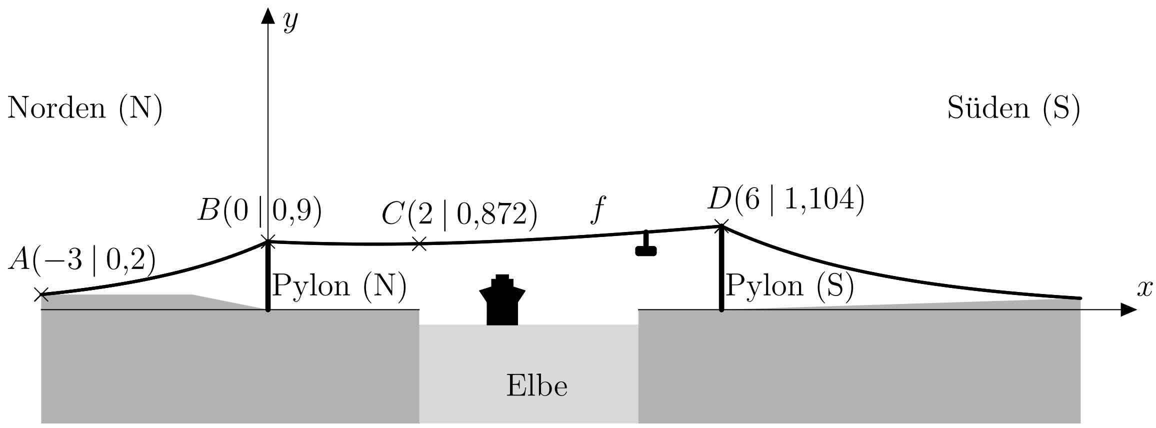
<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe b)
Eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle x von f ist $f''(x) = 0$.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$
Die Füllhöhe beträgt ca. $6{,}67\,\mathrm{cm}$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Wegen $(f(x))^2 > 0$ für alle $x \in [0\,;\,8]$ ist die Funktion V mit
$V(h) = \pi \int\limits_0^h (f(x))^2\,dx$ eine streng monoton wachsende Funktion.
Wegen der strengen Monotonie von V gibt es höchstens eine Stelle h mit $V(h) = 350$.
Sollte der Prüfling hier im Sachzusammenhang argumentieren, so sollen ebenfalls die entsprechenden Punkte vergeben werden.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
Eine Normale verläuft genau dann in y-Richtung, wenn die zugehörige Tangente waagerecht ist. Eine solche Stelle gibt es aber wegen $f'(x) \neq 0$ im Intervall $[0\,;\,8]$ nicht.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Normale n zum Graphen von f im Punkt $(0 \mid 2{,}5)$ kann durch die Gleichung
$n(x) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot x + 2{,}5 = -2 \cdot x + 2{,}5$ beschrieben werden.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$n(x) = g(x) \Leftrightarrow x \approx -0{,}1216$
$g(-0{,}1216) \approx 2{,}7432$
Der Schnittpunkt S der Graphen von n und g hat damit die Koordinaten $S(-0{,}12 \mid 2{,}74)$.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Für die Dicke d ergibt sich
$$d = \sqrt{(0-(-0{,}1216))^2 + (2{,}5 - g(-0{,}1216))^2} \approx 0{,}2719.$$
Die Dicke beträgt somit ca. $2{,}7\,\mathrm{mm}$.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe d)
$\int\limits_0^{60} T'(t)dt = -0{,}71 \cdot \int\limits_0^{60} e^{-0{,}01t}dt \approx -32{,}03$
Die Temperaturabnahme beträgt ca. $32\,°\mathrm{C}$.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
$\int T'(t)dt = \int -0{,}71 \cdot e^{-0{,}01t}dt = 71 \cdot e^{-0{,}01t} + C$		2	
Wegen $T(0) = 90$ ergibt sich $71 \cdot e^{-0{,}01 \cdot 0} + C = 90 \Leftrightarrow C = 19.$ Also ist $T(t) = 71 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 19.$		2	
Zu zeigen ist $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)dt \quad < \quad \frac{1}{2}(T(t_1) + T(t_2)).$			1
Der Graph der Funktion T verläuft im Zeitintervall $0 \leq t_1 < t_2$ unterhalb der Strecke $\overline{CD}$. Die vom Graphen der Funktion T und der t-Achse über dem Zeitintervall eingeschlossene Fläche ist somit kleiner als die Fläche des Trapezes $ABCD$.  $\int_{t_1}^{t_2} T(t)dt \quad < \quad \frac{1}{2}(T(t_1) + T(t_2)) \cdot (t_2 - t_1)$ $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)dt \quad < \quad \frac{1}{2}(T(t_1) + T(t_2))$			3
Punktsummen	16	20	4

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 1: Analysis

Vor einiger Zeit plante man in Hamburg eine von zwei Stützpfeilern (Pylonen) getragene Seilbahn über die Elbe. Die folgende Abbildung zeigt einen entsprechenden Entwurf. Dabei stellt die x-Achse den Verlauf der Erdbodenlinie dar. Eine Längeneinheit entspricht $100\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.



Die Pylonenspitze B befindet sich $90\,\mathrm{m}$ über dem Erdboden. Die Pylonenspitze D liegt $110{,}4\,\mathrm{m}$ über dem Erdboden. Der Abstand der beiden Pylonen beträgt $600\,\mathrm{m}$. Das nördliche Elbufer ist $200\,\mathrm{m}$ vom nördlichen Pylonen entfernt. Der Punkt C liegt senkrecht über dem nördlichen Elbufer. Die Seilhöhe beträgt hier $87{,}2\,\mathrm{m}$ über dem Erdboden und die Steigung des Seiles im Punkt C ist $1{,}8\,\%$.

a) Zwischen den Pylonen kann der Verlauf des Seiles näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschrieben werden.

- Bestimmen Sie eine zugehörige Funktionsgleichung.

  [Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{1000} \cdot x^3 + \frac{1}{50} \cdot x^2 - \frac{1}{20} \cdot x + \frac{9}{10}$]

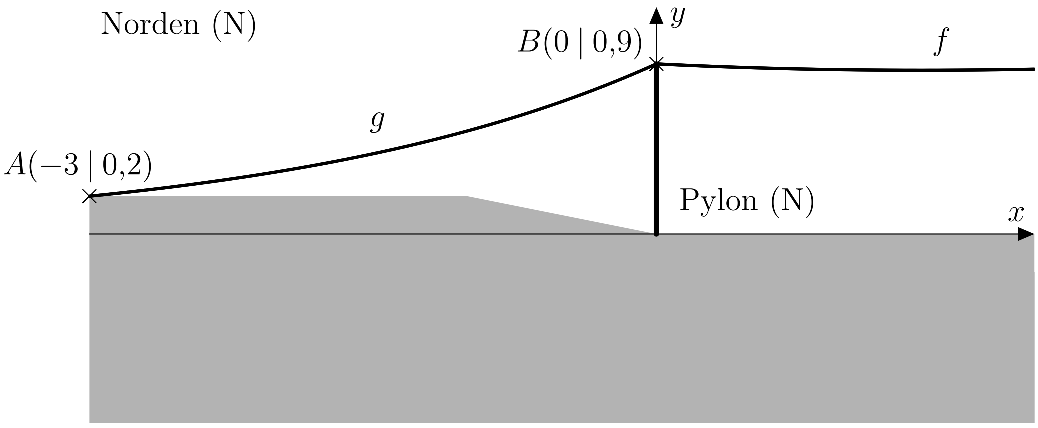
- Berechnen Sie im Bereich zwischen den Pylonen die minimale Höhe des Seiles über der Erdbodenlinie.
- Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich die Wasseroberfläche der Elbe $10\,\mathrm{m}$ unter der Erdbodenlinie. Die Elbe ist im geplanten Bereich $290\,\mathrm{m}$ breit. Berechnen Sie die durchschnittliche Höhe des Seiles über der Wasseroberfläche.

(17 P)

b)
- Die Funktion f hat eine Wendestelle. Zeigen Sie, dass diese nicht im Intervall $[0\,;\,6]$ liegt.
- Berechnen Sie die maximale Steigung des Graphen von f im Intervall $[0\,;\,6]$.
- Begründen Sie, warum die Modellierung des Seiles durch einen Graphen mit einer Wendestelle x_W mit $0 < x_W < 6$ nicht sinnvoll ist.

(8 P)

c) Die Station A auf dem Nordufer ist $300\,\mathrm{m}$ vom nördlichen Pylonen entfernt. Das Seil befindet sich hier in einer Höhe von $20\,\mathrm{m}$ über der Erdbodenlinie.
Der Verlauf des Seils zwischen der Station und dem nördlichen Pylonen kann durch eine Funktion g mit $g(x) = a \cdot e^{0,5x} + b \cdot e^{-0,5x}$ beschrieben werden.



- Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die beiden Koeffizienten a und b in der Form

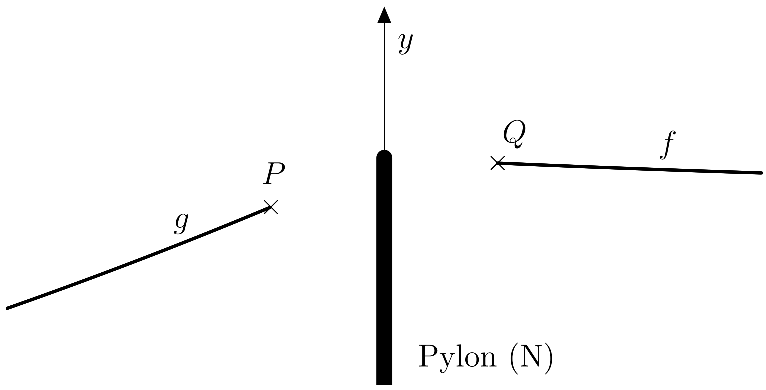
$$a = \frac{0,2 \cdot e^{1,5} - 0,9 \cdot e^{3}}{1 - e^{3}} \quad \text{und} \quad b = \frac{0,9 - 0,2 \cdot e^{1,5}}{1 - e^{3}}$$

  darstellen lassen.

- Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Seile am nördlichen Pylonen aufeinandertreffen.

(11 P)

d) Um für die Fahrgäste ein angenehmes Fahren der Gondel zu ermöglichen, sollen knickfreie Übergänge hergestellt werden. Dazu hat der Konstrukteur die Punkte P und Q auf den Graphen der zugehörigen Funktionen festgelegt und geplant, das Seil kreisbogenförmig vom Punkt P zum Punkt Q zu führen.



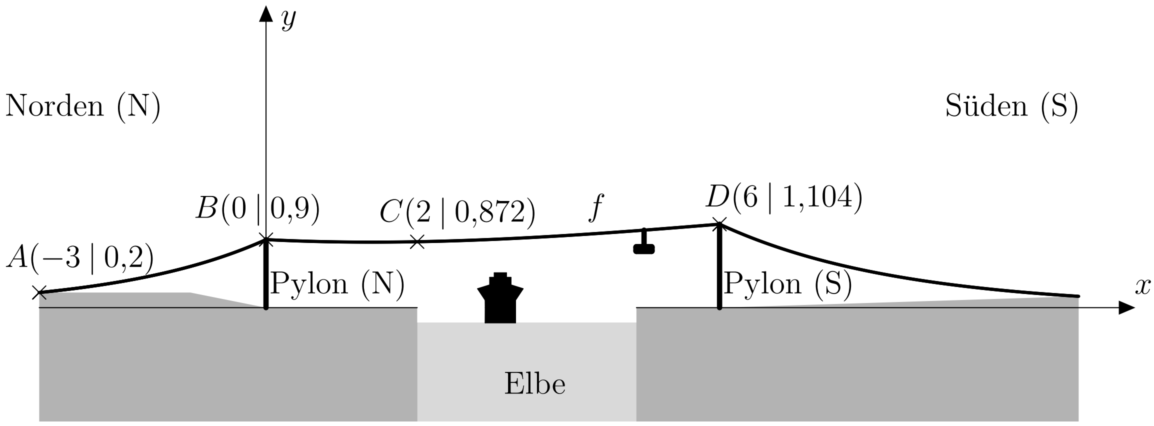
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem untersucht werden kann, ob es einen solchen Kreisbogen gibt. Der Kreisbogen muss nicht durch den Punkt B verlaufen.

(4 P)

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 1: Analysis

Vor einiger Zeit plante man in Hamburg eine von zwei Stützpfeilern (Pylonen) getragene Seilbahn über die Elbe. Die folgende Abbildung zeigt einen entsprechenden Entwurf. Dabei stellt die x-Achse den Verlauf der Erdbodenlinie dar. Eine Längeneinheit entspricht $100\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.



Die Pylonenspitze B befindet sich $90\,\mathrm{m}$ über dem Erdboden. Die Pylonenspitze D liegt $110{,}4\,\mathrm{m}$ über dem Erdboden. Der Abstand der beiden Pylonen beträgt $600\,\mathrm{m}$. Das nördliche Elbufer ist $200\,\mathrm{m}$ vom nördlichen Pylonen entfernt. Der Punkt C liegt senkrecht über dem nördlichen Elbufer. Die Seilhöhe beträgt hier $87{,}2\,\mathrm{m}$ über dem Erdboden und die Steigung des Seiles im Punkt C ist $1{,}8\,\%$.

a) Zwischen den Pylonen kann der Verlauf des Seiles näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschrieben werden.

- Bestimmen Sie eine zugehörige Funktionsgleichung.

  [Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{1000} \cdot x^3 + \frac{1}{50} \cdot x^2 - \frac{1}{20} \cdot x + \frac{9}{10}$]

- Berechnen Sie im Bereich zwischen den Pylonen die minimale Höhe des Seiles über der Erdbodenlinie.

- Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich die Wasseroberfläche der Elbe $10\,\mathrm{m}$ unter der Erdbodenlinie. Die Elbe ist im geplanten Bereich $290\,\mathrm{m}$ breit. Berechnen Sie die durchschnittliche Höhe des Seiles über der Wasseroberfläche.

(17 P)

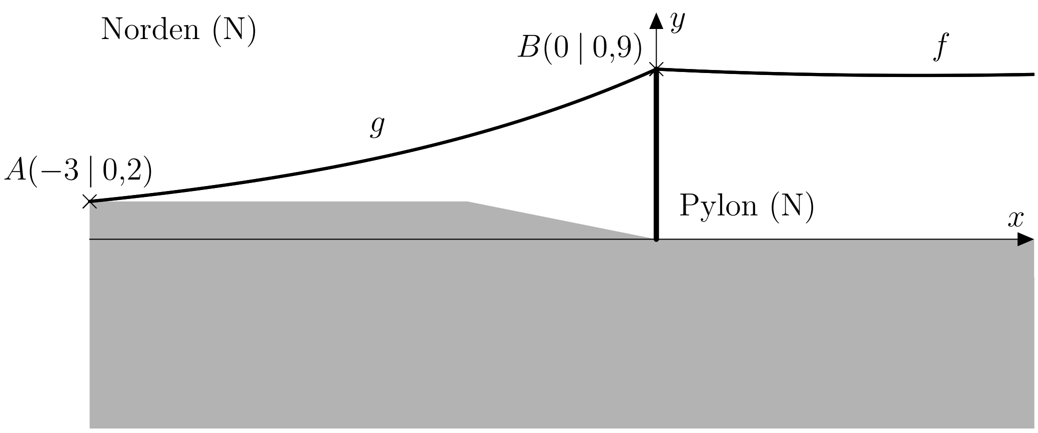
b)
- Die Funktion f hat eine Wendestelle. Zeigen Sie, dass diese nicht im Intervall $[0\,;\,6]$ liegt.

- Berechnen Sie die maximale Steigung des Graphen von f im Intervall $[0\,;\,6]$.

- Begründen Sie, warum die Modellierung des Seiles durch einen Graphen mit einer Wendestelle x_W mit $0 < x_W < 6$ nicht sinnvoll ist.

(8 P)

c) Die Station A auf dem Nordufer ist $300\,\mathrm{m}$ vom nördlichen Pylonen entfernt. Das Seil befindet sich hier in einer Höhe von $20\,\mathrm{m}$ über der Erdbodenlinie.
Der Verlauf des Seils zwischen der Station und dem nördlichen Pylonen kann durch eine Funktion g mit $g(x) = a \cdot e^{0,5x} + b \cdot e^{-0,5x}$ beschrieben werden.



- Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die beiden Koeffizienten a und b in der Form

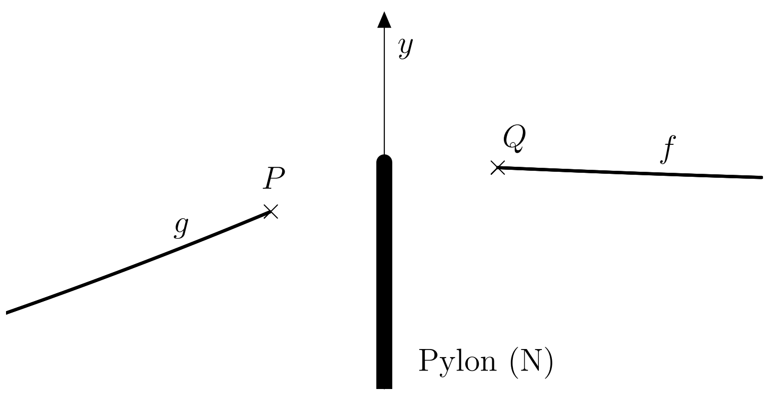
$$a = \frac{0{,}2 \cdot e^{1,5} - 0{,}9 \cdot e^{3}}{1 - e^{3}} \quad \text{und} \quad b = \frac{0{,}9 - 0{,}2 \cdot e^{1,5}}{1 - e^{3}}$$

  darstellen lassen.

- Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Seile am nördlichen Pylonen aufeinandertreffen.

(11 P)

d) Um für die Fahrgäste ein angenehmes Fahren der Gondel zu ermöglichen, sollen knickfreie Übergänge hergestellt werden. Dazu hat der Konstrukteur die Punkte P und Q auf den Graphen der zugehörigen Funktionen festgelegt und geplant, das Seil kreisbogenförmig vom Punkt P zum Punkt Q zu führen.



Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem untersucht werden kann, ob es einen solchen Kreisbogen gibt. Der Kreisbogen muss nicht durch den Punkt B verlaufen.

(4 P)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe a)
Für eine ganzrationale Funktion 3. Grades gilt

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Aus $f(0) = 0{,}9$ ergibt sich $d = 0{,}9$.

$$\left\vert\begin{array}{rcl} f(2) &=& 0{,}872 \\ f'(2) &=& 0{,}018 \\ f(6) &=& 1{,}104 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcr} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 &=& -0{,}028 \\ 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c &=& 0{,}018 \\ a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 &=& 0{,}204 \end{array}\right\vert$$

Aus dem linearen Gleichungssystem ergibt sich $a = -\frac{1}{1000}$, $b = \frac{1}{50}$, $c = -\frac{1}{20}$ und damit $f(x) = -\frac{1}{1000}x^3 + \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{20}x + \frac{9}{10}$.

</td><td>2

3

2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Es gilt $f'(x) = -\frac{3}{1000}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{1}{20}$.
Notwendig für eine Extremstelle x von f ist $f'(x) = 0$.

$$\begin{array}{rl} & 0 = f'(x) \\ \Leftrightarrow & 0 = -\frac{3}{1000}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{1}{20} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{20-5\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}40 \vee x = \frac{20+5\sqrt{10}}{3} \approx 11{,}94 \end{array}$$

Nur die kleinere Lösung liegt im Intervall $[0\,;\,6]$.
Da zusätzlich $f(\frac{20-5\sqrt{10}}{3}) \approx 0{,}866 < f(0) < f(6)$ gilt, liegt an der Stelle $\frac{20-5\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}40$ ein globales Minimum im hier relevanten Bereich von f vor.
Die minimale Höhe des Seiles beträgt ca. $86{,}6\,\mathrm{m}$.

</td><td>1

2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>

Für die durchschnittliche Höhe $\overline{h}$ des Seiles über der Wasseroberfläche gilt:

$$\begin{array}{rcl} \overline{h} &=& \frac{1}{4{,}9-2} \cdot \int\limits_2^{4{,}9} (f(x) + 0{,}1)\,dx \\ \overline{h} &=& \frac{1}{4{,}9-2} \cdot \int\limits_2^{4{,}9} (-\frac{1}{1000}x^3 + \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{20}x + \frac{9}{10} + 0{,}1)\,dx \\ \overline{h} &\approx& 1{,}03 \end{array}$$

Die durchschnittliche Höhe des Seiles über der Wasseroberfläche beträgt ungefähr $103\,\mathrm{m}$.

</td><td></td><td>3

1</td><td></td></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe b)
Es ist $f''(x) = -\frac{3}{500}x + \frac{1}{25}$.
Notwendig für eine Wendestelle x von f ist $f''(x) = 0$.

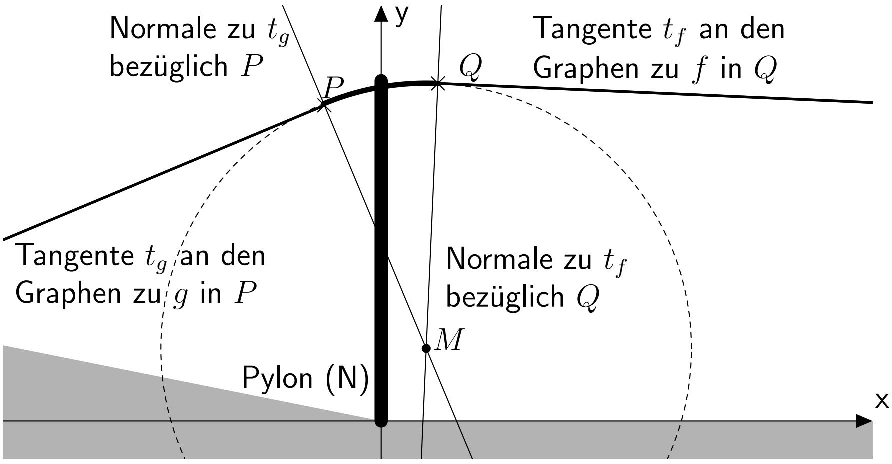
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{500}x + \frac{1}{25} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3} > 6$$

Die Wendestelle $\frac{20}{3}$ liegt nicht im Intervall $[0\,;\,6]$.

</td><td>1

3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Da die Wendestelle von f nicht im Intervall $[0\,;\,6]$ liegt, ist die maximale Steigung an den Rändern vorhanden. Es gilt $f'(0) = -0{,}05$ und $f'(6) = 0{,}082$. Daher ist die maximale Steigung $0{,}082$ bzw. $8{,}2\,\%$.		2	
Das zwischen den Pylonen durchhängende Seil kann sinnvollerweise nur durch einen Graphen modelliert werden, der in diesem Bereich durchgängig linksgekrümmt ist. Daher darf in diesem Bereich keine Wendestelle vorhanden sein.		2	
Teilaufgabe c) Aus $A(-3 \mid 0{,}2)$ und $B(0 \mid 0{,}9)$ folgt $\begin{vmatrix} g(0) & = 0{,}9 \\ g(-3) & = 0{,}2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+b & = 0{,}9 \\ ae^{-1{,}5}+be^{1{,}5} & = 0{,}2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & = 0{,}9-a \\ ae^{-1{,}5}+be^{1{,}5} & = 0{,}2 \end{vmatrix}.$	2		
Es ergibt sich $\begin{aligned} & ae^{-1{,}5}+(0{,}9-a)e^{1{,}5} &=& \ 0{,}2 \\ \Leftrightarrow\ & ae^{-1{,}5}+0{,}9e^{1{,}5}-ae^{1{,}5} &=& \ 0{,}2 \\ \Leftrightarrow\ & a(1-e^3) &=& \ 0{,}2e^{1{,}5}-0{,}9e^3 \\ \Leftrightarrow\ & a &=& \ \frac{0{,}2e^{1{,}5}-0{,}9e^3}{1-e^3} \end{aligned}$		3	
und $b = \frac{0{,}9-0{,}9e^3-0{,}2e^{1{,}5}+0{,}9e^3}{1-e^3} \Leftrightarrow b = \frac{0{,}9-0{,}2e^{1{,}5}}{1-e^3}.$		1	
Der zu bestimmende Winkel γ lässt sich aus der Differenz des Steigungswinkels α des Graphen von g im Punkt B und des Steigungswinkels β des Graphen von f im Punkt B berechnen.		1	
Aus $f'(0) = \tan(\beta) = -\frac{1}{20}$ folgt $\beta \approx -2{,}86°$.		1	
Aus $g(x) = a\cdot e^{0{,}5x} + b\cdot e^{-0{,}5x}$ folgt $g'(x) = 0{,}5a\cdot e^{0{,}5x} - 0{,}5b\cdot e^{-0{,}5x}$. Aus $g'(0) = \tan(\alpha) = 0{,}5(a-b) = 0{,}5\left(\frac{0{,}4e^{1{,}5}-0{,}9e^3-0{,}9}{1-e^3}\right) \approx 0{,}4502$ folgt $\alpha \approx 24{,}24°$.		2	
Für den Winkel γ ergibt sich $\gamma = 180° - (\alpha-\beta) \approx 152{,}9°$. *Auch $27{,}1°$ soll als korrekte Lösung akzeptiert werden.*		1	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe d) Der Mittelpunkt M eines möglichen Kreisbogens ist der Schnittpunkt der Normalen zu den Graphen der Funktionen f und g in den Punkten P bzw. Q. Nur wenn $\left\|\overline{MP}\right\| = \left\|\overline{MQ}\right\|$ gilt, gibt es einen Kreisbogen für den geplanten Übergang.  *Anmerkung: Die Zeichnung wird nicht verlangt.*			4
Punktsummen	16	20	4

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 2: Analysis

Eine Schülerin ist an einem grippalen Infekt erkrankt. Die Funktion f mit

$$f(t) = 4t \cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6 \quad ; \quad t \geq 0$$

modelliert ihre Körpertemperatur während des Infektes. Dabei gibt t die Zeit in Tagen nach Auftreten des Infektes und $f(t)$ die Körpertemperatur in °C an.
Es gilt $f'(t) = (4 - 2t) \cdot e^{-0{,}5t}$.

a) • Berechnen Sie die höchste Körpertemperatur der Schülerin während des Infektes.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion d mit $d(t) = 4t \cdot e^{-0{,}5t}$ im Intervall $[0\,;\,10]$ und beschreiben Sie die Bedeutung der Funktion d im Sachzusammenhang.

(14 P)

b) • Bestimmen Sie mittels Integration eine Stammfunktion von f.

- Berechnen Sie die durchschnittliche Körpertemperatur der Schülerin innerhalb der ersten Woche des Infektes.

- Es gibt eine Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt und dann genau zwei Tage später erneut erreicht wird. Bestimmen Sie diese Temperatur und die Zeitpunkte, an denen sie erreicht wird.

(12 P)

c) Die zeitlichen Verläufe der Körpertemperatur anderer Personen während eines Infektes können durch die Funktionenschar h_k mit

$$h_k(t) = \frac{2}{k} \cdot t \cdot e^{-kt} + 36{,}6 \quad ; \quad k > 0$$

modelliert werden.

- Jeder Graph der Schar hat einen Hochpunkt H_k. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes.

  [Kontrolle: $H_k(\frac{1}{k} \mid \frac{2}{ek^2} + 36{,}6)$]

- Der Krankheitsverlauf wird kritisch, wenn das Maximum der Körpertemperatur $41\,°\mathrm{C}$ oder mehr erreicht. Bestimmen Sie diejenigen Werte des Parameters k, für die der Krankheitsverlauf kritisch wird.

(10 P)

d) Es soll der größte y-Achsenabschnitt bestimmt werden, den eine Tangente an den Graphen von f haben kann. Leiten Sie eine Zielfunktion für diese Extremwertaufgabe her.

(4 P)

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 2: Analysis

Eine Schülerin ist an einem grippalen Infekt erkrankt. Die Funktion f mit

$$f(t) = 4t \cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6 \quad ; \quad t \geq 0$$

modelliert ihre Körpertemperatur während des Infektes. Dabei gibt t die Zeit in Tagen nach Auftreten des Infektes und $f(t)$ die Körpertemperatur in °C an.
Es gilt $f'(t) = (4 - 2t) \cdot e^{-0{,}5t}$.

a) • Berechnen Sie die höchste Körpertemperatur der Schülerin während des Infektes.

• Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

• Skizzieren Sie den Graphen der Funktion d mit $d(t) = 4t \cdot e^{-0{,}5t}$ im Intervall $[0\,;\,10]$ und beschreiben Sie die Bedeutung der Funktion d im Sachzusammenhang.

(14 P)

b) • Bestimmen Sie mittels Integration eine Stammfunktion von f.

• Berechnen Sie die durchschnittliche Körpertemperatur der Schülerin innerhalb der ersten Woche des Infektes.

• Es gibt eine Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt und dann genau zwei Tage später erneut erreicht wird. Bestimmen Sie diese Temperatur und die Zeitpunkte, an denen sie erreicht wird.

(12 P)

c) Die zeitlichen Verläufe der Körpertemperatur anderer Personen während eines Infektes können durch die Funktionenschar h_k mit

$$h_k(t) = \frac{2}{k} \cdot t \cdot e^{-kt} + 36{,}6 \quad ; \quad k > 0$$

modelliert werden.

• Jeder Graph der Schar hat einen Hochpunkt H_k. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes.

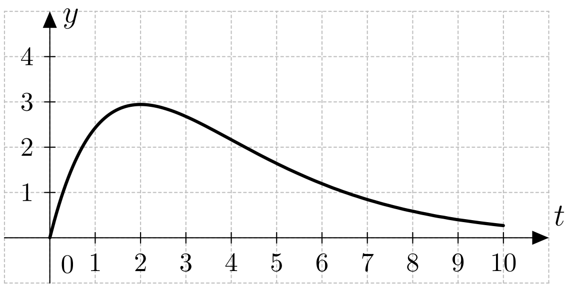
[Kontrolle: $H_k(\frac{1}{k} \mid \frac{2}{ek^2} + 36{,}6)$]

• Der Krankheitsverlauf wird kritisch, wenn das Maximum der Körpertemperatur $41\,°\mathrm{C}$ oder mehr erreicht. Bestimmen Sie diejenigen Werte des Parameters k, für die der Krankheitsverlauf kritisch wird.

(10 P)

d) Es soll der größte y-Achsenabschnitt bestimmt werden, den eine Tangente an den Graphen von f haben kann. Leiten Sie eine Zielfunktion für diese Extremwertaufgabe her.

(4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Notwendig für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle t von f ist $f'(t) = 0$.			
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (4-2t)\cdot e^{-0{,}5t} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$	2		
Da zusätzlich $f''(2) \approx -0{,}7358 < 0$ gilt, liegt an der Stelle 2 ein lokales Maximum vor. Da keine weiteren Extremstellen vorhanden sind, liegt an dieser Stelle das globale Maximum.	2		
Anmerkung: *Der Wert von $f''(2)$ kann direkt mit dem Taschenrechner ermittelt werden. Sollte an dieser Stelle bereits die 2. Ableitung bestimmt worden sein, sollen hier die entsprechenden Punkte aus dem folgenden Aufgabenteil vergeben werden.*			
$f(2) = 8\cdot e^{-1} + 36{,}6 \approx 39{,}5430$			
Die maximale Körpertemperatur der Schülerin beträgt etwa $39{,}5\,°\mathrm{C}$.	1		
Es ist $f''(t) = -2\cdot e^{-0{,}5t} + (4-2t)\cdot(-0{,}5)\cdot e^{-0{,}5t} = (t-4)\cdot e^{-0{,}5t}$.	2		
Notwendig für das Vorliegen einer Wendestelle t von f ist $f''(t) = 0$.			
$f''(t) = 0 \Leftrightarrow (t-4)\cdot e^{-0{,}5t} = 0 \Leftrightarrow t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$	2		
Mit $f(4) = 16\cdot e^{-2} + 36{,}6 \approx 38{,}77$ ergeben sich für den Wendepunkt W ungefähr die Koordinaten $(4 \mid 38{,}8)$.	1		
Die Körpertemperatur der Schülerin nimmt vier Tage nach dem Auftreten des Infektes am stärksten ab und beträgt dann etwa $38{,}8\,°\mathrm{C}$.		1	
	2		
Es gilt $d(t) = f(t) - 36{,}6$. Daher gibt d die Differenz der Körpertemperatur während des Infektes zur Normaltemperatur an, also die Erhöhung der Körpertemperatur während des Infektes.		1	

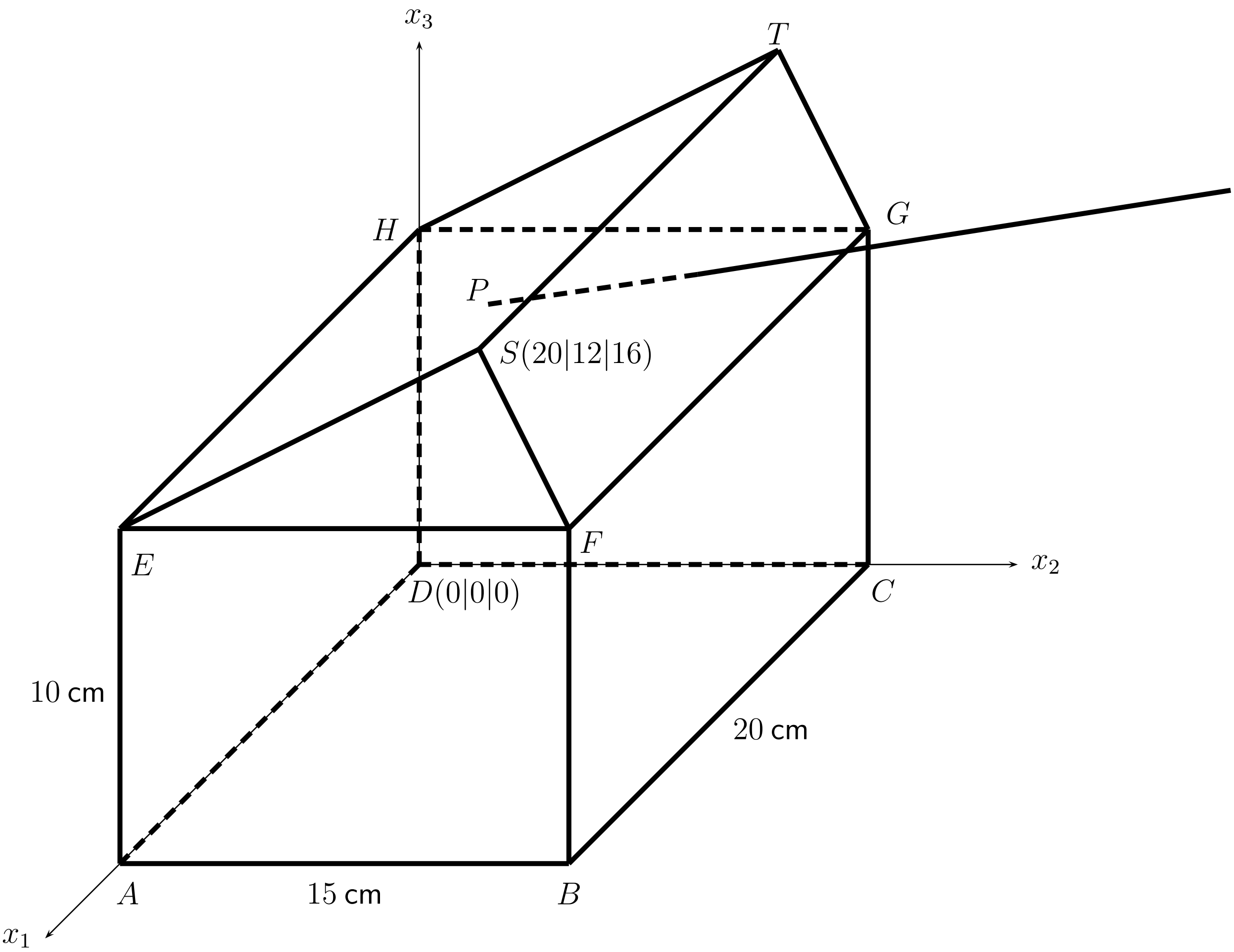
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe b) Mithilfe partieller Integration ergibt sich für die Menge der Stammfunktionen von f $\int 4t \cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6\,dt = 4t \cdot (-2) \cdot e^{-0{,}5t} - \int 4 \cdot (-2) \cdot e^{-0{,}5t}\,dt + 36{,}6\,t$ $= -8t \cdot e^{-0{,}5t} - 16e^{-0{,}5t} + 36{,}6\,t + C.$		2	
Daher ist F mit $F(t) = (-8t - 16) \cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6\,t$ eine mögliche Stammfunktion von f.		1	
Die durchschnittliche Körpertemperatur der Schülerin ergibt sich aus dem Mittelwert von f über dem Intervall $[0\,;\,7]$ durch $\frac{1}{7-0} \cdot \int_0^7 f(t)\,dt = \frac{1}{7-0} \cdot \int_0^7 4t \cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6\,dt \approx 38{,}5751.$		2	
Die durchschnittliche Körpertemperatur der Schülerin beträgt während der ersten Woche des Infektes ca. $38{,}6\,°\mathrm{C}$.		1	
Gesucht ist ein Zeitpunkt t, für den $f(t) = f(t+2)$ gilt. $f(t) = f(t+2) \Leftrightarrow 4t \cdot e^{-0{,}5t} = 4(t+2) \cdot e^{-0{,}5(t+2)}$		2	
$\Leftrightarrow t = (t+2) \cdot e^{-1} \Leftrightarrow t \cdot (1 - e^{-1}) = 2e^{-1} \Leftrightarrow t = \frac{2}{e-1} \approx 1{,}16$		2	
Anmerkung: *Die Gleichung kann auch direkt mit dem Taschenrechner gelöst werden.* $f\left(\frac{2}{e-1}\right) \approx 39{,}20$ Nach ca. $1{,}2$ Tagen und nach ca. $3{,}2$ Tagen wird eine Körpertemperatur von ca. $39{,}2\,°\mathrm{C}$ erreicht.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c)			
Notwendig für das Vorliegen einer Extremstelle t von h_k ist $h'_k(t) = 0$.	1		
Es gilt $h'_k(t) = \frac{2}{k} \cdot e^{-kt} - k \cdot \frac{2}{k} \cdot t \cdot e^{-kt} = (1 - kt) \cdot \frac{2}{k} \cdot e^{-kt}$.		2	
$h'_k(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - kt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{k}$		1	
Mit $h_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-1} + 36{,}6 = \frac{2}{ek^2} + 36{,}6$ ergibt sich für die Hochpunkte $H_k(\frac{1}{k} \mid \frac{2}{ek^2} + 36{,}6)$.		2	
Der Funktionswert $\frac{2}{ek^2} + 36{,}6$ ist das globale Maximum der Funktion h_k. $$\frac{2}{ek^2} + 36{,}6 \geq 41 \Leftrightarrow \frac{2}{ek^2} \geq 4{,}4 \Leftrightarrow \frac{2}{4{,}4} \geq ek^2 \Leftrightarrow \lvert k\rvert \leq \sqrt{\frac{2}{4{,}4e}} \approx 0{,}4089$$	3		
Da $k > 0$ gilt, wird die kritische Körpertemperatur für die Parameter k mit $0 < k \leq \sqrt{\frac{2}{4{,}4e}}$ erreicht.		1	
Teilaufgabe d)			
Für eine Stelle a mit $a \geq 0$ hat die Tangente an den Graphen von f die Form $$g_a(t) = f'(a) \cdot (t - a) + f(a) = t \cdot f'(a) - a \cdot f'(a) + f(a).$$ Für ihren y-Achsenabschnitt in Abhängigkeit von a und damit für die Zielfunktion b gilt $$\begin{aligned} b(a) &= f(a) - a \cdot f'(a) \\ &= 4a \cdot e^{-0{,}5a} + 36{,}6 - a \cdot (4 - 2a) \cdot e^{-0{,}5a} \\ &= 2a^2 \cdot e^{-0{,}5a} + 36{,}6. \end{aligned}$$			4
Punktsummen	16	20	4

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

In einer Miniaturaustellung ist das Modell einer Seilbahn mit einer Gondel aufgebaut. Die Abbildung zeigt die Talstation, die die Form eines Quaders mit einem aufgesetzten Prisma hat. Sie steht auf der Grundfläche der Ausstellung, die in der x_1x_2-Ebene liegt. Eine Einheit entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.



a) • Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, F, G und T an und bestimmen Sie eine Koordinatenform der Dachebene E_1, die die Punkte F, G und S enthält.

[Kontrolle: $E_1 : 2\,x_2 + x_3 = 40$]

• Das Seil der Seilbahn ist geradlinig zwischen den Punkten $P(6|5|12)$ und $Q(38|133|44)$ (außerhalb der Abbildung) gespannt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem das Seil die Dachebene E_1 durchstößt.

• Berechnen Sie die Länge und den Steigungswinkel des Seils.

(14 P)

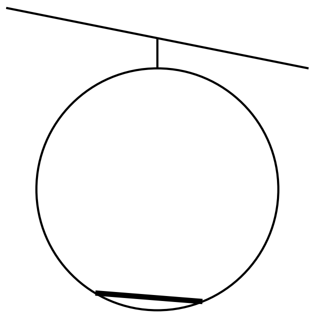
b) In der Ausstellung ist eine zweite Seilbahn installiert. Das Seil dieser Bahn ist im Punkt $K(61\,|\,81\,|\,0)$ befestigt und verläuft in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass sich die Geraden, entlang derer die Seile verlaufen, nicht schneiden.
- Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden voneinander.

(9 P)

c) Bei der ersten Seilbahn ist eine kugelförmige Gondel so am Seil befestigt, dass ihr Mittelpunkt die Koordinaten $M(10\,|\,21\,|\,13{,}5)$ hat. Die Gondel hat einen Durchmesser von 4 cm und ist aus Plexiglas hergestellt.

- Geben Sie eine Gleichung der Kugel K an, die die Gondel beschreibt.



- In der Gondel sollte eine kreisförmige Plattform parallel zur Grundfläche positioniert werden. Beim Einkleben ist die Plattform verrutscht; sie liegt jetzt in der Ebene

  $$E_2 : 19\,x_1 + 180\,x_3 = 2292{,}39.$$

  Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Flächeninhalt der Plattform.

- An der Gondel ist ein Schild mit einem Firmenlogo angebracht worden, sodass es die Gondel tangential in einem Punkt Y berührt und von schräg oben lesbar ist. Ein Normalenvektor zu der Schildebene ist $\vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Y, an dem das Schild an die Kugel geklebt worden ist.

(13 P)

d) Gegeben seien zwei windschiefe Geraden k und l mit $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt einen Punkt U auf k und einen Punkt V auf l, so dass der Vektor $\overrightarrow{UV}$ senkrecht zur x_1x_2-Ebene ist.

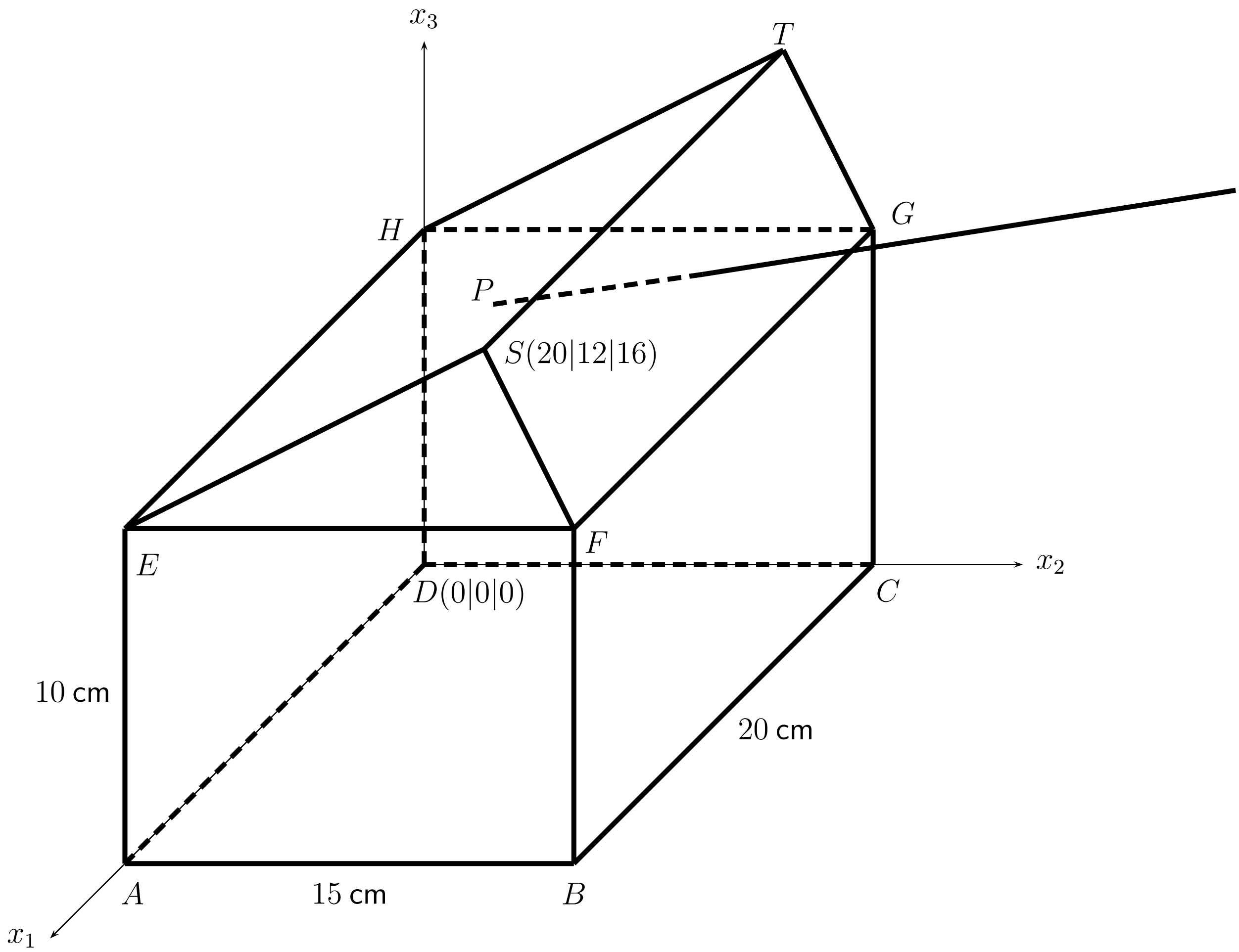
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte U und V.

(4 P)

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

In einer Miniaturaustellung ist das Modell einer Seilbahn mit einer Gondel aufgebaut. Die Abbildung zeigt die Talstation, die die Form eines Quaders mit einem aufgesetzten Prisma hat. Sie steht auf der Grundfläche der Ausstellung, die in der x_1x_2-Ebene liegt. Eine Einheit entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.



a) • Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, F, G und T an und bestimmen Sie eine Koordinatenform der Dachebene E_1, die die Punkte F, G und S enthält.

[Kontrolle: $E_1 : 2\,x_2 + x_3 = 40$]

• Das Seil der Seilbahn ist geradlinig zwischen den Punkten $P(6|5|12)$ und $Q(38|133|44)$ (außerhalb der Abbildung) gespannt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem das Seil die Dachebene E_1 durchstößt.

• Berechnen Sie die Länge und den Steigungswinkel des Seils.

(14 P)

b) In der Ausstellung ist eine zweite Seilbahn installiert. Das Seil dieser Bahn ist im Punkt $K(61\,|\,81\,|\,0)$ befestigt und verläuft in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass sich die Geraden, entlang derer die Seile verlaufen, nicht schneiden.
- Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden voneinander.

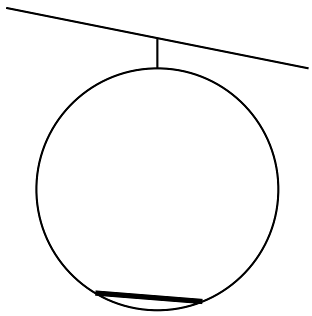
(9 P)

c) Bei der ersten Seilbahn ist eine kugelförmige Gondel so am Seil befestigt, dass ihr Mittelpunkt die Koordinaten $M(10\,|\,21\,|\,13{,}5)$ hat. Die Gondel hat einen Durchmesser von 4 cm und ist aus Plexiglas hergestellt.

- Geben Sie eine Gleichung der Kugel K an, die die Gondel beschreibt.
- In der Gondel sollte eine kreisförmige Plattform parallel zur Grundfläche positioniert werden. Beim Einkleben ist die Plattform verrutscht; sie liegt jetzt in der Ebene

  $$E_2 : 19\,x_1 + 180\,x_3 = 2292{,}39.$$

  Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Flächeninhalt der Plattform.



- An der Gondel ist ein Schild mit einem Firmenlogo angebracht worden, sodass es die Gondel tangential in einem Punkt Y berührt und von schräg oben lesbar ist. Ein Normalenvektor zu der Schildebene ist $\vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Y, an dem das Schild an die Kugel geklebt worden ist.

(13 P)

d) Gegeben seien zwei windschiefe Geraden k und l mit $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt einen Punkt U auf k und einen Punkt V auf l, so dass der Vektor $\overrightarrow{UV}$ senkrecht zur x_1x_2-Ebene ist.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte U und V.

(4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $A(20 \mid 0 \mid 0)$; $F(20 \mid 15 \mid 10)$; $G(0 \mid 15 \mid 10)$; $T(0 \mid 12 \mid 16)$	2		
Man erhält einen Normalenvektor der Ebene E_1, in der die Punkte F, G und S liegen, durch $\overrightarrow{FS} \times \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -120 \\ -60 \end{pmatrix} = -60 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor genutzt werden. Eine Koordinatenform ergibt sich durch $E_1 : 2\,x_2 + x_3 = 2 \cdot 12 + 1 \cdot 16 = 40$.	3		
Das Seil verläuft entlang der Geraden g mit $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ 128 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$	2		
$g \cap E_1 :$ $2 \cdot (5 + 4t) + (12 + t) = 40$ $\Leftrightarrow \; 22 + 9t = 40$ $\Leftrightarrow \; t = 2$ Damit ergibt sich $R(8 \mid 13 \mid 14)$.	3		
Wegen $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 32 \\ 128 \\ 32 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{18432} \approx 135{,}76$ hat das Seil eine Länge von ungefähr $135{,}76$ cm.	1		
Mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der x_1x_2–Ebene ergibt sich $\sin(\varphi) = \dfrac{\left\lvert \vec{n}_3 \circ \overrightarrow{PQ} \right\rvert}{\lvert\vec{n}_3\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{PQ}\rvert} = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 32 \\ 128 \\ 32 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 32 \\ 128 \\ 32 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{1}{\sqrt{18}} \approx 0{,}24.$ Daraus folgt $\varphi \approx 13{,}63^\circ$. Der Steigungswinkel des Seils beträgt ungefähr $13{,}63^\circ$.	3		

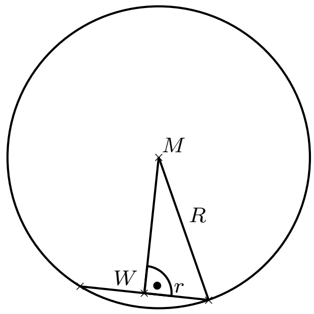
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe b) Das Seil der zweiten Bahn verläuft entlang der Geraden h mit $$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}61\\81\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$ $$g\cap h: \left\vert\begin{array}{rcl}55 &=& 1\,t+2\,s\\76 &=& 4\,t+2\,s\\-12 &=& 1\,t-1\,s\end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcl}t &=& 7\\s &=& 24\\-12 &=& -17\end{array}\right\vert$$ Da dieses Gleichungssystem keine Lösung hat, schneiden sich die Geraden g und h nicht.	1	4	
Wegen $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ steht der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ senkrecht auf beiden Geraden. $$d(g,h) = \left\vert(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OK})\circ\frac{\vec{w}}{\vert\vec{w}\vert}\right\vert = \left\vert\left(\begin{pmatrix}6\\5\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}61\\81\\0\end{pmatrix}\right)\circ\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\vert = \frac{10}{3}$$		2 2	
Teilaufgabe c) Da der Radius der Kugel 2 cm beträgt, lautet eine Gleichung der Kugel $$K: \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}10\\21\\13{,}5\end{pmatrix}\right)^2 = 4.$$	1		
Die Gerade m verläuft durch den Mittelpunkt M der Kugel K in Richtung des Normalenvektors der Ebene E_2. $$m: \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\21\\13{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}19\\0\\180\end{pmatrix}$$ $E_2 \cap m$: $19\cdot(10+19\,s)+180\cdot(13{,}5+180\,s) = 2292{,}39$ $\Leftrightarrow\ 2620+32761\,s = 2292{,}39$ $\Leftrightarrow\ s = -0{,}01$ Damit ergibt sich $W(9{,}81 \mid 21 \mid 11{,}7)$ als Mittelpunkt der Plattform.		2 3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Für den Radius r des Schnittkreises gilt

$$r^2 + |\overrightarrow{WM}|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = R^2 - \left| \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} \right|^2 = 2^2 - 1{,}81^2 = 0{,}7239.$$



Mit $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}7239 \approx 2{,}27$ ergibt sich für die Plattform ein Flächeninhalt von ungefähr 2,27 cm^2.

Hinweis: Eine Zeichnung ist in der Aufgabenstellung nicht verlangt.

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>

Für die Koordinaten des Berührpunktes Y des Schildes mit der Gondel gilt

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 13{,}5 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + \sqrt{2} \\ 21 \\ 13{,}5 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Der Berührpunkt Y hat ungefähr die Koordinaten $Y(11{,}41 \mid 21 \mid 14{,}91)$.

</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe d)

$$\overrightarrow{UV} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 \\ -76 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} -2\,s - t & = & -55 \\ -2\,s - 4\,t & = & -76 \\ s - t - r & = & 12 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} s & = & 24 \\ t & = & 7 \\ r & = & 5 \end{array} \right|$$

Damit ergeben sich $U(13 \mid 33 \mid 19)$ und $V(13 \mid 33 \mid 24)$.

</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>16</td><td>20</td><td>4</td></tr>
</table>

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 4: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsgrößen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

a) Um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu überprüfen, wurde in einer sehr umfangreichen, repräsentativen Studie ausschließlich an erkrankten Patienten die Reaktion auf das Medikament untersucht. Hierbei wurde einem Teil der Patienten das echte Medikament verabreicht, der andere Teil erhielt ein Placebo, also ein wirkungsloses Präparat.
64 % der Patienten wurden mit dem echten Medikament behandelt. 12 % der Patienten wurden mit dem Placebo behandelt und geheilt. 68 % aller Patienten, die an der Studie teilgenommen haben, konnten geheilt werden.

- Erstellen Sie eine zu diesen Angaben passende Vierfeldertafel.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig auszuwählender geheilter Patient lediglich mit Placebos behandelt wurde.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte von fünf zufällig auszuwählenden Patienten geheilt wurden.
- Geben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang an.

$$1-\sum_{k=8}^{10}\binom{10}{k}\cdot 0{,}68^k\cdot 0{,}32^{10-k}$$

[Hinweis: Dieser Term ist gleichwertig zu

$$1-\left(\binom{10}{8}\cdot 0{,}68^8\cdot 0{,}32^2+\binom{10}{9}\cdot 0{,}68^9\cdot 0{,}32^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}68^{10}\cdot 0{,}32^0\right).]$$

(12 P)

b) Aufgrund der Studie beschließt der kriminelle Internet-Medikamenten-Anbieter Harry Laim seine Lieferungen dieses Medikaments zu manipulieren, indem er Pakete, die jeweils 40 Ampullen enthalten, mit je 32 Ampullen des echten Medikaments und 8 Placebo-Ampullen bestückt.

- Ein Arzt hat ein solches Paket bei Harry Laim bestellt, um seine Patienten zu behandeln. Für die Behandlung seines ersten Patienten werden 5 Ampullen benötigt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dem Paket zufällig 5 Ampullen des echten Medikaments zu entnehmen, größer als 30 % ist.

Nach dem großen Erfolg seiner Internet-Betrügereien mit dem Verkauf an Ärzte beschließt Harry Laim, sein Geschäft auf die Belieferung von Kliniken auszuweiten.
Eine Klinik bestellt eine Klinikpackung mit 10 000 Ampullen. Harry Laim bestückt diese mit 8000 Ampullen des echten Medikaments und 2000 Placebo-Ampullen.
Eine Krankenschwester entnimmt einer solchen, noch vollständigen Klinikpackung 150 Ampullen. Verwenden Sie im Folgenden die Binomialverteilung.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Krankenschwester mindestens 25, aber höchstens 40 Placebo-Ampullen entnimmt.
- Berechnen Sie die Anzahl der Ampullen, die sie aus einer noch vollständigen Klinikpackung mindestens entnehmen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97,5 % mindestens eine Placebo-Ampulle zu erhalten.

(14 P)

c) Harry Laim versendet auch Pakete an Besteller aus Nicht-EU-Ländern. Der Anteil der Placebo-Ampullen in diesen Nicht-EU-Paketen beträgt sogar 30 %. Für Besteller aus der EU bleibt er sicherheitshalber bei Paketen mit 20 % Placebo-Ampullen (EU-Pakete).
Vor dem Versand eines Pakets, das in die EU versendet werden soll, stellt Harry Laim fest, dass es nicht gekennzeichnet ist. Er möchte vermeiden, dass er ein Nicht-EU-Paket in ein EU-Land versendet.

- Entwickeln Sie ein Testverfahren, mit dem Harry Laim durch Entnahme und Prüfung von 100 der 10 000 Ampullen auf einem Signifikanzniveau von 1,5 % die Vermutung stützen kann, dass es sich um ein EU-Paket handelt.
- Bestimmen Sie für den oben konzipierten Test die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

(10 P)

d) Gegeben sind ein Zufallsexperiment und die Ereignisse A und B.
Es gilt $P(B) = 0{,}32$, $P_A(B) = 0{,}4$ und $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}7$.

Berechnen Sie $P(A)$.

(4 P)

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040		0,51	0,3050	0,6950		1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080		0,52	0,3015	0,6985		1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120		0,53	0,2981	0,7019		1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160		0,54	0,2946	0,7054		1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199		0,55	0,2912	0,7088		1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239		0,56	0,2877	0,7123		1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279		0,57	0,2843	0,7157		1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319		0,58	0,2810	0,7190		1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359		0,59	0,2776	0,7224		1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398		0,60	0,2743	0,7257		1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438		0,61	0,2709	0,7291		1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478		0,62	0,2676	0,7324		1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517		0,63	0,2643	0,7357		1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557		0,64	0,2611	0,7389		1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596		0,65	0,2578	0,7422		1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636		0,66	0,2546	0,7454		1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675		0,67	0,2514	0,7486		1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714		0,68	0,2483	0,7517		1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753		0,69	0,2451	0,7549		1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793		0,70	0,2420	0,7580		1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832		0,71	0,2389	0,7611		1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871		0,72	0,2358	0,7642		1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910		0,73	0,2327	0,7673		1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948		0,74	0,2296	0,7704		1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987		0,75	0,2266	0,7734		1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026		0,76	0,2236	0,7764		1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064		0,77	0,2206	0,7794		1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103		0,78	0,2177	0,7823		1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141		0,79	0,2148	0,7852		1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179		0,80	0,2119	0,7881		1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217		0,81	0,2090	0,7910		1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255		0,82	0,2061	0,7939		1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293		0,83	0,2033	0,7967		1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331		0,84	0,2005	0,7995		1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368		0,85	0,1977	0,8023		1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406		0,86	0,1949	0,8051		1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443		0,87	0,1922	0,8078		1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480		0,88	0,1894	0,8106		1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517		0,89	0,1867	0,8133		1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554		0,90	0,1841	0,8159		1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591		0,91	0,1814	0,8186		1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628		0,92	0,1788	0,8212		1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664		0,93	0,1762	0,8238		1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700		0,94	0,1736	0,8264		1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736		0,95	0,1711	0,8289		1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772		0,96	0,1685	0,8315		1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808		0,97	0,1660	0,8340		1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844		0,98	0,1635	0,8365		1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879		0,99	0,1611	0,8389		1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915		1,00	0,1587	0,8413		1,50	0,0668	0,9332

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345		2,01	0,0222	0,9778		2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357		2,02	0,0217	0,9783		2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370		2,03	0,0212	0,9788		2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382		2,04	0,0207	0,9793		2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394		2,05	0,0202	0,9798		2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406		2,06	0,0197	0,9803		2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418		2,07	0,0192	0,9808		2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429		2,08	0,0188	0,9812		2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441		2,09	0,0183	0,9817		2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452		2,10	0,0179	0,9821		2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463		2,11	0,0174	0,9826		2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474		2,12	0,0170	0,9830		2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484		2,13	0,0166	0,9834		2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495		2,14	0,0162	0,9838		2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505		2,15	0,0158	0,9842		2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515		2,16	0,0154	0,9846		2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525		2,17	0,0150	0,9850		2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535		2,18	0,0146	0,9854		2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545		2,19	0,0143	0,9857		2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554		2,20	0,0139	0,9861		2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564		2,21	0,0136	0,9864		2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573		2,22	0,0132	0,9868		2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582		2,23	0,0129	0,9871		2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591		2,24	0,0125	0,9875		2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599		2,25	0,0122	0,9878		2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608		2,26	0,0119	0,9881		2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616		2,27	0,0116	0,9884		2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625		2,28	0,0113	0,9887		2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633		2,29	0,0110	0,9890		2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641		2,30	0,0107	0,9893		2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649		2,31	0,0104	0,9896		2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656		2,32	0,0102	0,9898		2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664		2,33	0,0099	0,9901		2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671		2,34	0,0096	0,9904		2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678		2,35	0,0094	0,9906		2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686		2,36	0,0091	0,9909		2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693		2,37	0,0089	0,9911		2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699		2,38	0,0087	0,9913		2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706		2,39	0,0084	0,9916		2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713		2,40	0,0082	0,9918		2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719		2,41	0,0080	0,9920		2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726		2,42	0,0078	0,9922		2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732		2,43	0,0075	0,9925		2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738		2,44	0,0073	0,9927		2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744		2,45	0,0071	0,9929		2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750		2,46	0,0069	0,9931		2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756		2,47	0,0068	0,9932		2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761		2,48	0,0066	0,9934		2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767		2,49	0,0064	0,9936		2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772		2,50	0,0062	0,9938		3,00	0,0013	0,9987

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 4: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsgrößen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

a) Um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu überprüfen, wurde in einer sehr umfangreichen, repräsentativen Studie ausschließlich an erkrankten Patienten die Reaktion auf das Medikament untersucht. Hierbei wurde einem Teil der Patienten das echte Medikament verabreicht, der andere Teil erhielt ein Placebo, also ein wirkungsloses Präparat.
64 % der Patienten wurden mit dem echten Medikament behandelt. 12 % der Patienten wurden mit dem Placebo behandelt und geheilt. 68 % aller Patienten, die an der Studie teilgenommen haben, konnten geheilt werden.

- Erstellen Sie eine zu diesen Angaben passende Vierfeldertafel.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig auszuwählender geheilter Patient lediglich mit Placebos behandelt wurde.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte von fünf zufällig auszuwählenden Patienten geheilt wurden.
- Geben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang an.

$$1 - \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0{,}68^k \cdot 0{,}32^{10-k}$$

[Hinweis: Dieser Term ist gleichwertig zu

$$1 - \left(\binom{10}{8} \cdot 0{,}68^8 \cdot 0{,}32^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}68^9 \cdot 0{,}32^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}68^{10} \cdot 0{,}32^0 \right).]$$

(12 P)

b) Aufgrund der Studie beschließt der kriminelle Internet-Medikamenten-Anbieter Harry Laim seine Lieferungen dieses Medikaments zu manipulieren, indem er Pakete, die jeweils 40 Ampullen enthalten, mit je 32 Ampullen des echten Medikaments und 8 Placebo-Ampullen bestückt.

- Ein Arzt hat ein solches Paket bei Harry Laim bestellt, um seine Patienten zu behandeln. Für die Behandlung seines ersten Patienten werden 5 Ampullen benötigt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dem Paket zufällig 5 Ampullen des echten Medikaments zu entnehmen, größer als 30 % ist.

Nach dem großen Erfolg seiner Internet-Betrügereien mit dem Verkauf an Ärzte beschließt Harry Laim, sein Geschäft auf die Belieferung von Kliniken auszuweiten.
Eine Klinik bestellt eine Klinikpackung mit 10 000 Ampullen. Harry Laim bestückt diese mit 8000 Ampullen des echten Medikaments und 2000 Placebo-Ampullen.
Eine Krankenschwester entnimmt einer solchen, noch vollständigen Klinikpackung 150 Ampullen. Verwenden Sie im Folgenden die Binomialverteilung.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Krankenschwester mindestens 25, aber höchstens 40 Placebo-Ampullen entnimmt.
- Berechnen Sie die Anzahl der Ampullen, die sie aus einer noch vollständigen Klinikpackung mindestens entnehmen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97,5 % mindestens eine Placebo-Ampulle zu erhalten.

(14 P)

c) Harry Laim versendet auch Pakete an Besteller aus Nicht-EU-Ländern. Der Anteil der Placebo-Ampullen in diesen Nicht-EU-Paketen beträgt sogar 30 %. Für Besteller aus der EU bleibt er sicherheitshalber bei Paketen mit 20 % Placebo-Ampullen (EU-Pakete).
Vor dem Versand eines Pakets, das in die EU versendet werden soll, stellt Harry Laim fest, dass es nicht gekennzeichnet ist. Er möchte vermeiden, dass er ein Nicht-EU-Paket in ein EU-Land versendet.

- Entwickeln Sie ein Testverfahren, mit dem Harry Laim durch Entnahme und Prüfung von 100 der 10 000 Ampullen auf einem Signifikanzniveau von 1,5 % die Vermutung stützen kann, dass es sich um ein EU-Paket handelt.
- Bestimmen Sie für den oben konzipierten Test die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

(10 P)

d) Gegeben sind ein Zufallsexperiment und die Ereignisse A und B.
Es gilt $P(B) = 0{,}32$, $P_A(B) = 0{,}4$ und $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}7$.

Berechnen Sie $P(A)$.

(4 P)

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040	0,51	0,3050	0,6950	1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080	0,52	0,3015	0,6985	1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120	0,53	0,2981	0,7019	1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160	0,54	0,2946	0,7054	1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199	0,55	0,2912	0,7088	1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239	0,56	0,2877	0,7123	1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279	0,57	0,2843	0,7157	1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319	0,58	0,2810	0,7190	1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359	0,59	0,2776	0,7224	1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398	0,60	0,2743	0,7257	1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438	0,61	0,2709	0,7291	1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478	0,62	0,2676	0,7324	1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517	0,63	0,2643	0,7357	1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557	0,64	0,2611	0,7389	1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596	0,65	0,2578	0,7422	1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636	0,66	0,2546	0,7454	1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675	0,67	0,2514	0,7486	1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714	0,68	0,2483	0,7517	1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753	0,69	0,2451	0,7549	1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793	0,70	0,2420	0,7580	1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832	0,71	0,2389	0,7611	1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871	0,72	0,2358	0,7642	1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910	0,73	0,2327	0,7673	1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948	0,74	0,2296	0,7704	1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987	0,75	0,2266	0,7734	1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026	0,76	0,2236	0,7764	1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064	0,77	0,2206	0,7794	1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103	0,78	0,2177	0,7823	1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141	0,79	0,2148	0,7852	1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179	0,80	0,2119	0,7881	1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217	0,81	0,2090	0,7910	1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255	0,82	0,2061	0,7939	1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293	0,83	0,2033	0,7967	1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331	0,84	0,2005	0,7995	1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368	0,85	0,1977	0,8023	1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406	0,86	0,1949	0,8051	1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443	0,87	0,1922	0,8078	1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480	0,88	0,1894	0,8106	1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517	0,89	0,1867	0,8133	1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554	0,90	0,1841	0,8159	1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591	0,91	0,1814	0,8186	1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628	0,92	0,1788	0,8212	1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664	0,93	0,1762	0,8238	1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700	0,94	0,1736	0,8264	1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736	0,95	0,1711	0,8289	1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772	0,96	0,1685	0,8315	1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808	0,97	0,1660	0,8340	1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844	0,98	0,1635	0,8365	1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879	0,99	0,1611	0,8389	1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915	1,00	0,1587	0,8413	1,50	0,0668	0,9332

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345		2,01	0,0222	0,9778		2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357		2,02	0,0217	0,9783		2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370		2,03	0,0212	0,9788		2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382		2,04	0,0207	0,9793		2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394		2,05	0,0202	0,9798		2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406		2,06	0,0197	0,9803		2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418		2,07	0,0192	0,9808		2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429		2,08	0,0188	0,9812		2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441		2,09	0,0183	0,9817		2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452		2,10	0,0179	0,9821		2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463		2,11	0,0174	0,9826		2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474		2,12	0,0170	0,9830		2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484		2,13	0,0166	0,9834		2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495		2,14	0,0162	0,9838		2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505		2,15	0,0158	0,9842		2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515		2,16	0,0154	0,9846		2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525		2,17	0,0150	0,9850		2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535		2,18	0,0146	0,9854		2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545		2,19	0,0143	0,9857		2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554		2,20	0,0139	0,9861		2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564		2,21	0,0136	0,9864		2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573		2,22	0,0132	0,9868		2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582		2,23	0,0129	0,9871		2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591		2,24	0,0125	0,9875		2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599		2,25	0,0122	0,9878		2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608		2,26	0,0119	0,9881		2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616		2,27	0,0116	0,9884		2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625		2,28	0,0113	0,9887		2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633		2,29	0,0110	0,9890		2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641		2,30	0,0107	0,9893		2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649		2,31	0,0104	0,9896		2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656		2,32	0,0102	0,9898		2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664		2,33	0,0099	0,9901		2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671		2,34	0,0096	0,9904		2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678		2,35	0,0094	0,9906		2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686		2,36	0,0091	0,9909		2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693		2,37	0,0089	0,9911		2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699		2,38	0,0087	0,9913		2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706		2,39	0,0084	0,9916		2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713		2,40	0,0082	0,9918		2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719		2,41	0,0080	0,9920		2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726		2,42	0,0078	0,9922		2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732		2,43	0,0075	0,9925		2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738		2,44	0,0073	0,9927		2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744		2,45	0,0071	0,9929		2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750		2,46	0,0069	0,9931		2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756		2,47	0,0068	0,9932		2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761		2,48	0,0066	0,9934		2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767		2,49	0,0064	0,9936		2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772		2,50	0,0062	0,9938		3,00	0,0013	0,9987

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe a)
M: Der Patient wird mit dem echten Medikament behandelt.
G: Der Patient wird geheilt.
<table>
<tr><th></th><th>G</th><th>$\overline{G}$</th><th></th></tr>
<tr><td>M</td><td>0,56</td><td>0,08</td><td>0,64</td></tr>
<tr><td>$\overline{M}$</td><td>0,12</td><td>0,24</td><td>0,36</td></tr>
<tr><td></td><td>0,68</td><td>0,32</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$P_G(\overline{M}) = \dfrac{P(G \cap \overline{M})}{P(G)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}68} = \dfrac{3}{17} \approx 0{,}1765 = 17{,}65\,\%$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der geheilten Patienten an. X kann als binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0{,}68$ angenommen werden.
$P(X \geq 3) = \sum\limits_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \cdot 0{,}68^k \cdot 0{,}32^{5-k} \approx 0{,}8095$
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 5 Patienten mehr als die Hälfte geheilt wurden, beträgt ungefähr 81 %.</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass von 10 zufällig auszuwählenden Patienten weniger als 8 geheilt wurden.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe b)
Die Wahrscheinlichkeit dafür, den 40 Ampullen nacheinander zufällig 5 mit dem Medikament gefüllte zu entnehmen, ist
$\frac{32}{40} \cdot \frac{31}{39} \cdot \frac{30}{38} \cdot \frac{29}{37} \cdot \frac{28}{36} \approx 0{,}306$.
Diese Wahrscheinlichkeit ist größer als 30 %.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Placebo-Ampullen in der Stichprobe.
X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 150$ und $p = 0{,}2$.

$P(25 \leq X \leq 40) = P(X \leq 40) - P(X \leq 24) \approx 0{,}9813 - 0{,}1294 = 0{,}8519$
Die zu berechnende Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 85,2 %.</td><td></td><td>2
2</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Die Zufallsgröße Y gebe die Anzahl der Placebo-Ampullen unter n auszuwählenden Ampullen an. Y ist binomialverteilt mit dem unbekannten Parameter n und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$.
$$\begin{array}{lrcl} & P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) & > & 0{,}975 \\ \Leftrightarrow & P(Y = 0) & < & 1 - 0{,}975 \\ \Leftrightarrow & 0{,}8^n & < & 0{,}025 \\ \Leftrightarrow & n \cdot \ln(0{,}8) & < & \ln(0{,}025) \\ \Leftrightarrow & n & > & \frac{\ln(0{,}025)}{\ln(0{,}8)} \approx 16{,}5 \end{array}$$
Sie muss also mindestens 17 Ampullen entnehmen.</td><td></td><td>2
3
1</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
Es wird $H_0 : p = 0{,}3$ als Nullhypothese gewählt.
H_0 soll verworfen werden, wenn bei der Untersuchung von 100 zufällig auszuwählenden Ampullen relativ wenige Placebos nachgewiesen werden. Als Verwerfungsbereich wird daher die Menge $V = \{0; 1; 2; \ldots; k\}$ gewählt (linksseitiger Test).
Die Zufallsgröße $X_{0,3}$ gibt die Anzahl der Placebo-Ampullen unter den 100 auszuwählenden Ampullen an. $X_{0,3}$ wird als binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}3$ angenommen.
Das Signifikanzniveau 0,015 gibt die größte Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Testdurchführung zu einem Ergebnis führt, das im Verwerfungsbereich liegt, wenn H_0 wahr ist.
Wegen $P(X_{0,3} \leq 20) \approx 0{,}0165$ und $P(X_{0,3} \leq 19) \approx 0{,}0089$ (TR-Nutzung) ergibt sich $V = \{0; 1; \ldots; 19\}$.
Wenn Harry Laim bei der Untersuchung von 100 Ampullen weniger als 20 Placebo-Ampullen findet, kann er die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 1,5 % verwerfen und in diesem Sinne davon ausgehen, dass es sich um ein EU-Paket handelt.</td><td></td><td>1
1
1
1
2
1</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Zufallsgröße $X_{0,2}$ gebe die Anzahl der Placebo-Ampullen unter den 100 auszuwählenden an. $X_{0,2}$ wird als binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}2$ angenommen.
Der Fehler zweiter Art hat dann den Wert
$P(X_{0,2} \geq 20) = 1 - P(X_{0,2} \leq 19) \approx 1 - 0{,}4602 = 0{,}5398$.</td><td></td><td>1
2</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe d) Es gilt: $$\begin{array}{rrcl} & P(B) & = & P(A)\cdot P_A(B)+P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B) \\ \Leftrightarrow & P(B) & = & P(A)\cdot P_A(B)+(1-P(A))\cdot(1-P_{\overline{A}}(\overline{B})) \\ & 0{,}32 & = & P(A)\cdot 0{,}4+(1-P(A))\cdot(1-0{,}7) \\ \Leftrightarrow & P(A) & = & 0{,}2 \end{array}$$			4
Punktsummen	16	20	4