Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Ein Pharmaunternehmen produziert Antibiotika in unterschiedlichen Wirkstoffdosierungen, die in Tablettenform verabreicht werden. Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut eines Patienten nach Einnahme einer Tablette wird näherungsweise durch die Funktionenschar $f_{a,b}$ mit

$$f_{a,b}(t) = a \cdot t \cdot e^{-b \cdot t},\ \ t \geq 0,\ \ a > 0,\ \ b > 0$$

beschrieben. Dabei wird die Zeit t in Stunden seit der Einnahme und die Wirkstoffkonzentration $f_{a,b}(t)$ im Blut in Milligramm pro Liter (mg/l) gemessen. Die Parameter *a* und *b* berücksichtigen die Wirkstoffdosierung und die Wirkungsweise.

a) *Untersuchen Sie den Einfluss der Parameter a und b auf die Lage des Hochpunktes und begründen Sie rechnerisch Ihre Beobachtung bzgl. der Lage des Hochpunktes.*
Geben Sie die Schnittstellen der Funktionsgraphen mit der t-Achse und das Verhalten für $t \to +\infty$ in Abhängigkeit von a und b an.
Interpretieren Sie die Ergebnisse jeweils im Sachzusammenhang. (14 Punkte)

b) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wirkstoffkonzentration am stärksten abnimmt.* (7 Punkte)

c) Bei einem bestimmten Antibiotikum erreicht die Wirkstoffkonzentration im Blut des Patienten 4 Stunden nach der Einnahme das Maximum 10 mg/l.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, die sich aus diesen Bedingungen ergeben, und den zugehörigen Funktionsterm $f_{a;\,b}(t)$. (8 Punkte)

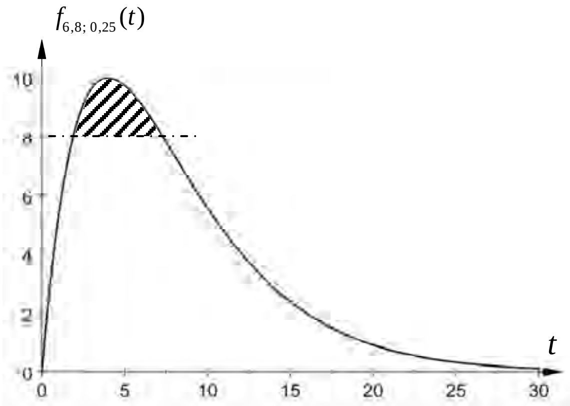
Name: ____________________

Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration könnte für ein bestimmtes Medikament beispielsweise durch die Funktion $f_{6,8;\,0,25}$ mit $f_{6,8;\,0,25}(t) = 6,8 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ beschrieben werden, die im Folgenden betrachtet werden soll.

d1) Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 8 mg/l beträgt.

Bestimmen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist. (5 Punkte)

d2) Für Mediziner kommt es neben der Konzentration des Wirkstoffes zusätzlich auf die Zeit an, in der der Wirkstoff dem Körper zur Verfügung steht. Die so genannte „*Wirkungsgröße*“ des Medikaments ist dabei sowohl von der Wirkstoffkonzentration als auch von der Wirkungsdauer abhängig und kann durch die Maßzahl der in der nebenstehenden Abbildung schraffierten Fläche angegeben werden.



Ermitteln Sie die Wirkungsgröße des Medikaments. (6 Punkte)

d3) *Ermitteln Sie einen Term, mit dem die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitintervall* $[0;t_w],\ t_w > 0$, *berechnet werden kann.* (3 Punkte)

e) Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration soll ab dem Zeitpunkt $t = 25$ durch eine lineare Funktion g beschrieben werden, die die Funktion $f_{6,8;\,0,25}$ differenzierbar fortsetzt.

Ermitteln Sie für diese Modellierung den Zeitpunkt, zu dem der Wirkstoff im Blut des Patienten vollständig abgebaut ist. (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchung von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Einfluss des Parameters *a*:

Am Graphen sieht man, dass der Hochpunkt des Graphen mit größer werdendem *a* vertikal nach oben verschoben wird. Rechnerische Begründung: $f'_{a,b}(t) = ae^{-bt}(1-bt)$.

$f'_{a,b}(t) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{b}$, je größer *a*, desto größer wird $f_{a,b}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a \cdot e^{-1}}{b}$.

Einfluss des Parameters *b*:

Am Graphen kann man ablesen, dass der Hochpunkt mit größer werdendem *b* im 1. Quadranten nach links unten verschoben wird.

Rechnerische Begründung:

Horizontale Verschiebung: Für größer bzw. kleiner werdendes *b* wird der Wert von $x = \frac{1}{b}$ geringer bzw. größer.

Vertikale Verschiebung: Für größer bzw. kleiner werdendes *b* wird $f_{a,b}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a \cdot e^{-1}}{b}$ kleiner bzw. größer.

Interpretation: Je größer bzw. kleiner der Wert für den Parameter *a* gewählt wird, desto höher bzw. niedriger ist die maximale Konzentration des Wirkstoffes im Blut des Patienten. Je größer bzw. kleiner der Wert für den Parameter *b* gewählt wird, desto niedriger bzw. höher ist die maximale Wirkstoffkonzentration. Die maximale Wirkstoffkonzentration wird bei kleinerem bzw. größerem *b* nach längerer bzw. kürzerer Zeit erreicht.

Schnittstellen mit der *t*-Achse:

$f_{a,b}(t) = 0 \Rightarrow t = 0$, also gibt es eine einzige Schnittstelle.

Interpretation: Nur zum Zeitpunkt der Einnahme ist die Wirkstoffkonzentration im Blut gleich null.

Verhalten für $t \to +\infty$ in Abhängigkeit von *a* und *b*:

$\lim_{t\to\infty} f_{a,b}(t) = \lim_{t\to\infty}(at \cdot \frac{1}{e^{bt}}) = 0$ für $a > 0,\ b > 0$.

Interpretation: Auf lange Sicht wird der Wirkstoff im Körper nahezu vollständig abgebaut.

Modelllösung b)

Die zeitliche Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration wird durch $f'_{a,b}$ dargestellt. Der Zeitpunkt, zum dem der Wirkstoff am stärksten abgebaut wird, wird als Extremstelle von $f'_{a,b}$ bzw. als Wendestelle von $f_{a,b}$ mit negativer Steigung unter Berücksichtigung der Randwerte ermittelt:

$f''_{a,b}(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{b}$. Die Überprüfung mit $f'''_{a,b}\left(\frac{2}{b}\right) = a \cdot b^2 \cdot e^{-2} > 0$ zeigt, dass der Wirkstoff zum Zeitpunkt $t = \frac{2}{b}$ am stärksten abgebaut wird, da zusätzlich sowohl $f'_{a,b}(0) = a > 0$ als auch $\lim\limits_{t\to\infty} f'_{a,b}(t) = 0$ größer als $f'_{a,b}\left(\frac{2}{b}\right) = -a \cdot e^{-2} < 0$ ist.

Modelllösung c)

Aus den Informationen ergeben sich folgende Bedingungen:

(I) Konzentration beträgt 10 mg/l nach 4 Stunden: $f_{a,b}(4) = 10$.

(II) Nach 4 Stunden ist die Konzentration maximal: $f'_{a,b}(4) = 0$.

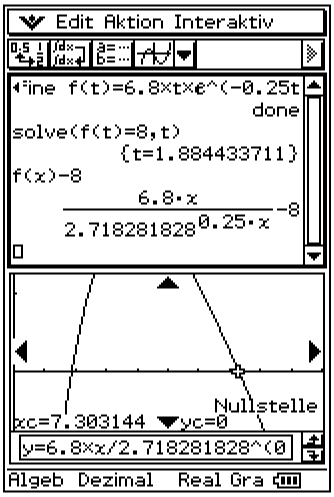
Aus (I) ergibt sich: $f_{a,b}(4) = a \cdot 4 \cdot e^{-b\cdot 4} = 10 \Rightarrow a = \frac{5 \cdot e^{4b}}{2}$.

Aus (II) ergibt sich: $f'_{a,b}(4) = a \cdot e^{-4b}(1-4b) = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$, da $a > 0$. Mit $a = \frac{5 \cdot e^{4\cdot\frac{1}{4}}}{2} = \frac{5e}{2}$

erhält man also: $f_{5e/2;-1/4}(t) = \frac{5e}{2} t \cdot e^{-\frac{1}{4}t}$ bzw. $f_{a,b}(t) \approx 6{,}8t \cdot e^{-0{,}25t} = f_{6{,}8;\,0{,}25}(t)$.

Alternativ können die Koordinaten des Hochpunktes aus Aufgabenteil a) zum Aufstellen des Funktionsterms benutzt werden.

Modelllösung d)



1) Die Lösungen der Gleichung $f_{6,8;\,025}(t) = 8$ sind die gesuchten Intervallgrenzen. Falls die solve-Funktion des verwendeten CAS nur eine Lösung liefert (siehe Abbildung), kann die zweite Lösung anhand des Graphen bestimmt werden: $t_1 \approx 1{,}88$ und $t_2 \approx 7{,}30$.

   Das Medikament ist 5,42 Stunden d. h. etwa $5\frac{1}{2}$ Stunden wirksam.

2) Die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f_{6,8;\,0,25}$ und der Geraden $y = 8$ im ersten Quadranten eingeschlossen wird, repräsentiert die Wirkungsgröße: $\int_{1,88}^{7,30} (f_{6,8;\,0,25}(t) - 8)dt \approx 7{,}05$.

3) Man kann die mittlere Wirkstoffkonzentration innerhalb des Zeitintervalls $[0;t_w]$ durch den Term $\frac{1}{t_w}\int_0^{t_w} f_{6,8;\,0,25}(t)dt$ berechnen.

Modelllösung e)

Beim Graphen der gesuchten linearen Funktion g handelt es sich um die Tangente an den Graphen von $f_{6,8;\,0,25}$ im Punkt $(25\,|\,f_{6,8;\,0,25}(25))$.

Daher gilt $g(t) = f'_{6,8;\,0,25}(25)\cdot(t-25) + f_{6,8;\,0,25}(25)$.

Daraus ergibt sich $g(t) \approx 2{,}051 - 0{,}0689t$.

Um herauszufinden, wann der Wirkstoff vollständig abgebaut ist, muss die Nullstelle berechnet werden: $g(t) = 0 \Rightarrow t \approx 29{,}8$.

Nach etwa 30 Stunden ist der Wirkstoff bei dieser Modellierung vollständig abgebaut.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	untersucht den Einfluss des Parameters a auf die Lage des Hochpunkts.	3 (II)
2	untersucht den Einfluss des Parameters b auf den Verlauf des Graphen und begründet rechnerisch die horizontale Verschiebung.	3 (II)
3	gibt die Schnittstelle an.	2 (I)
4	gibt das Verhalten für $t \to +\infty$ in Abhängigkeit von a und b an.	2 (I)
5	interpretiert die Ergebnisse im vorliegenden Sachzusammenhang.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet, dass die Wendestelle von $f_{a,b}(t)$ den Zeitpunkt t beschreibt, zu dem die Wirkstoffkonzentration am stärksten abnimmt.	2 (III)
2	berechnet die Wendestelle von $f_{a,b}(t)$.	2 (I)
3	bestimmt den Zeitpunkt der stärksten Abnahme der Wirkstoffkonzentration.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	4 (II)
2	berechnet a, b und $f_{a,b}(t)$.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d1)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt eine Gleichung zur Bestimmung der Intervallgrenzen.	2 (II)
2	gibt die Länge des Zeitintervalls an.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d2)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Ansatz für die Berechnung der Maßzahl der vom Graphen der Funktion $f_{6,8;\,0,25}$ und der Geraden $y = 8$ eingeschlossenen Fläche.	3 (II)
2	berechnet die Maßzahl dieser Fläche.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d3)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Term, mit dem man die mittlere Wirkstoffkonzentration innerhalb des Zeitintervalls $[0, t_w]$ berechnen kann.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	2 (II)
2	bestimmt eine Gleichung der linearen Funktion g.	3 (II)
3	berechnet den gesuchten Zeitpunkt als Schnittstelle mit der t-Achse.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	untersucht den Einfluss …	3 (II)			
2	untersucht den Einfluss …	3 (II)			
3	gibt die Schnittstelle …	2 (I)			
4	gibt das Verhalten …	2 (I)			
5	interpretiert die Ergebnisse …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass die …	2 (III)			
2	berechnet die Wendestelle …	2 (I)			
3	bestimmt den Zeitpunkt …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	4 (II)			
2	berechnet *a*, *b* …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d1)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt eine Gleichung …	2 (II)			
2	gibt die Länge …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d1)	**5**			

Teilaufgabe d2)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	3 (II)			
2	berechnet die Maßzahl …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d2)	**6**			

Teilaufgabe d3)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Term …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (3) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d3)	**3**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	2 (II)			
2	bestimmt eine Gleichung …	3 (II)			
3	berechnet den gesuchten …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Für Verpackungen wird gelegentlich die Form eines Halbzylinders gewählt (siehe *Abbildung 1*).
Im Folgenden ist mit dem „Materialverbrauch für die Verpackung“ ausschließlich die Oberfläche des halbzylindrischen Körpers gemeint. Dabei wird das Volumen in cm^3 und der Radius in cm angegeben.

Abbildung 1

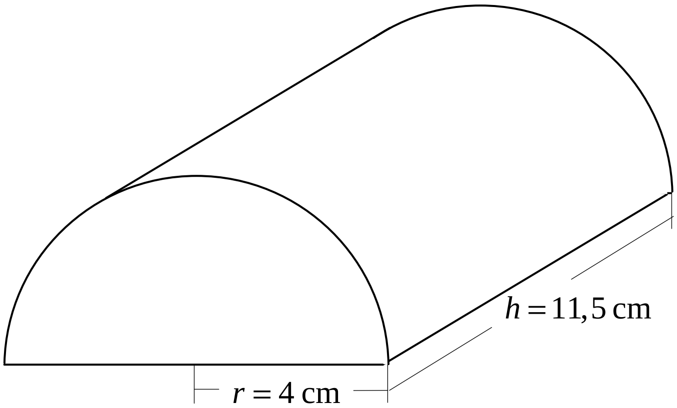


Abbildung 2

a) *Leiten Sie einen Funktionsterm $M_V(r)$ her, der bei einem Volumen V und einem Radius r den Materialverbrauch M für die Verpackung beschreibt.* (9 Punkte)

[Zur Kontrolle: $M_V(r) = \pi \cdot r^2 + \dfrac{2V \cdot (\pi + 2)}{\pi \cdot r}$]

b) *Beschreiben Sie – unabhängig vom Sachzusammenhang – den maximalen Definitionsbereich für die Funktion $M_V(r)$.*
Geben Sie einen Definitionsbereich für $M_V(r)$ an, der für die gegebene Sachsituation sinnvoll ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (7 Punkte)

Name: ____________________

c) *Skizzieren Sie den Graphen von* $M_{200}(r)$ *mit* $0 < r \le 10$ *in ein Koordinatensystem. Zeichnen Sie in Ihrer Skizze die Extrempunkte der Funktion ein und interpretieren Sie deren Bedeutung im vorliegenden Sachzusammenhang.* (6 Punkte)

d) *Ermitteln Sie für ein konstantes Volumen V einen Radius r, bei dem der geringste Materialverbrauch für die Oberfläche erreicht wird, und geben Sie den Materialverbrauchswert an.* (9 Punkte)

[Zur Kontrolle: $r = \dfrac{V^{\frac{1}{3}}(\pi+2)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}$]

e) (1) Eine Herstellerfirma wirbt für eine „optimale“ Verpackung in einer halbzylindrischen Form, die bei einem Radius von $r = 5{,}2$ cm den geringsten Materialverbrauch für die Oberfläche aufweist.

Ermitteln Sie das Volumen und die Oberfläche dieser „optimalen“ Verpackung.
(7 Punkte)

[Zur Kontrolle: $V \approx 269{,}91\,\text{cm}^3$, $M \approx 254{,}85\,\text{cm}^2$]

e) (2) Für eine „formschöne“ Verpackung soll die Höhe doppelt so groß sein wie der Radius.

Vergleichen Sie den Materialverbrauch und den Radius der optimalen Verpackung aus e) (1) mit den entsprechenden Werten der „formschönen“ Verpackung.
(9 Punkte)

f) Die Abhängigkeit des Materialverbrauchs vom Volumen kann durch die folgende Schar von Halbgeraden beschrieben werden: $M_r(V) = \dfrac{2(\pi+2)}{\pi \cdot r} V + \pi \cdot r^2$, $V \in I\!R^+$, $r \in I\!R^+$.

Interpretieren Sie die Bedeutung des Schnittpunktes zweier Halbgeraden der Schar im gegebenen Sachzusammenhang. (3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchung von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Herleiten des Funktionsterms:

1) $V_{Halbzylinder} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 h$, daraus erhält man: $h = \frac{2V}{\pi \cdot r^2}$

2) $M = M_1 + M_2 + M_3$ mit $M_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot d \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot r \cdot h$, $M_2 = \pi \cdot r^2$, $M_3 = 2r \cdot h$

Einsetzen von h aus (1) in M aus (2) ergibt: $M_V(r) = \pi \cdot r^2 + \frac{2V \cdot (\pi + 2)}{\pi \cdot r}$.

Modelllösung b)

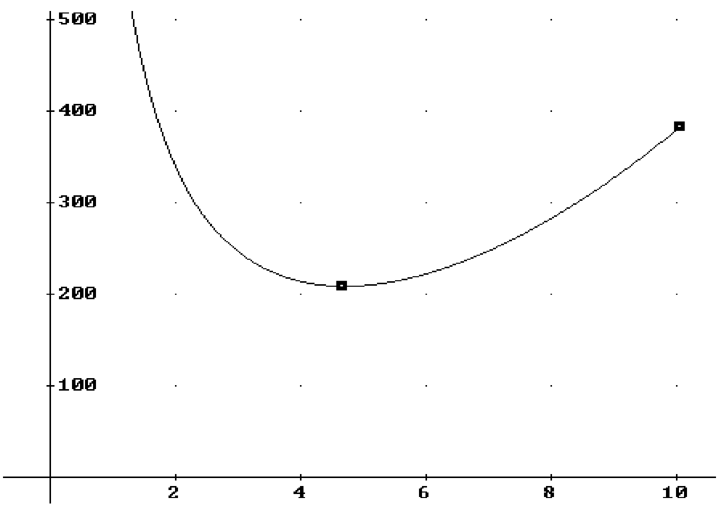
Maximaler Definitionsbereich: $M_V(r)$ ist definiert für alle $r \in IR \wedge r \neq 0$.

Sinnvoller Definitionsbereich: Zunächst sollte $r \in IR \wedge r > 0$ erfüllt sein. Allerdings hat ein sehr kleiner Radius (z. B. $r = 2$ mm) sowie ein sehr großer Radius (z. B. $r = 30$ cm) für Pralinenverpackungen nicht viel Sinn.

Ein möglicher, sinnvoller Definitionsbereich wäre also: $r \in \mathbb{R} \;\wedge\; 3 \leq r \leq 9$.

Alternative, begründete Lösungen sind möglich.

Modelllösung c)



Die Extrempunkte (relativer Extrempunkt und Randpunkt) können rechnerisch oder graphisch gefunden und eingezeichnet werden.

Interpretation: Die *x*-Koordinate ($\approx 4,7$) des absoluten Tiefpunkts gibt den Radius an, bei dem eine Verpackung, die 200 cm³ fasst, den geringsten Materialverbrauch aufweist. Die *y*-Koordinate gibt den Materialverbrauch (208,7 cm²) für die Oberfläche an. Zu dem Randpunkt $(10\,|\,379,6)$ gehört ein wesentlich höherer Materialverbrauch.

Modelllösung d)

Extremwertuntersuchung:

$M'_V(r) = 2\pi \cdot r - \dfrac{2V(\pi+2)}{\pi \cdot r^2}$. $M'_V(r) = 0$ liefert: $r = \dfrac{V^{\frac{1}{3}}(\pi+2)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}$. Durch Einsetzen erhält

man $M_V\left(\dfrac{V^{\frac{2}{3}}(\pi+2)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}\right) = \dfrac{3V^{\frac{2}{3}}(\pi+2)^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$. Aus $\lim\limits_{r\to 0} M_V(r) = \infty$ und $\lim\limits_{r\to\infty} M_V(r) = \infty$ ergibt

sich, dass an der gefundenen relativen Extremstelle ein absolutes Minimum von M vorliegt.

Somit wird mit einem Radius von $r = \dfrac{V^{\frac{1}{3}}(\pi+2)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}$ der geringste Materialverbrauch für die

Oberfläche erreicht.

Modelllösung e)

1) Unter der Vorlaussetzung, dass sich beim Radius von $r = 5{,}2$ cm der geringste Materialverbrauch ergibt, gilt:

$5{,}2 = \dfrac{V^{\frac{1}{3}}(\pi+2)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}$ und somit ein Volumen von $V = \dfrac{17576\pi^2}{125(\pi+2)} \approx 269{,}91\,\text{cm}^3$.

Der Materialverbrauch beträgt $M_{\frac{17576\pi^2}{125(\pi+2)}} = \dfrac{2028\pi}{25} \approx 254{,}85\,\text{cm}^2$.

2) Aus $h = 2r$ ergibt sich: $V = \pi \cdot r^3$ bzw. $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

Für die Oberfläche erhält man: $M = r^2(3\pi+4)$ und es ergibt sich:

$$M(V) = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2 (3\pi+4) = \frac{V^{\frac{2}{3}}(3\pi+4)}{\pi^{\frac{2}{3}}}.$$

Für ein Volumen von 270 m^3 erhält man: $M(270) \approx 261{,}45\,\text{cm}^2$.

Aus $V = \pi \cdot r^3$ mit V ≈ 269,91 cm^3 (oder aus $M = r^2(3\pi+4)$ mit M ≈ 261,45 cm^2) erhält man r ≈ 4,41 cm.

Bei der „formschönen“ Verpackung ist der Materialverbrauch für die Oberfläche somit fast 8 cm^2 größer, und der Radius ist mit 4,41 cm kleiner als bei der optimalen Verpackung.

Modelllösung f)

Schnittpunkt zweier Halbgeraden: $r_1 \neq r_2$ mit $V_1 = V_2$ und $M(V_1) = M(V_2)$.

Bedeutung: Bei zwei verschiedenen Radien wird bei gleichem Volumen gleich viel Material verbraucht.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	leitet einen Term für das Volumen des Halbzylinders her.	2 (I)
2	leitet einen Term für die Oberfläche des Halbzylinders her.	2 (I)
3	leitet den Funktionsterm $M_V(r)$ her.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	beschreibt den maximalen Definitionsbereich.	2 (I)
2	gibt einen Definitionsbereich an, der für die Sachsituation sinnvoll ist.	2 (I)
3	begründet die Entscheidung für den Definitionsbereich.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	skizziert den Funktionsgraphen im angegebenen Intervall und zeichnet die Extrempunkte ein.	2 (I)
2	interpretiert die Extrempunkte im Sachzusammenhang.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Term der ersten Ableitung.	2 (I)
2	ermittelt den Radius, bei dem der Materialverbrauch am geringsten ist.	5 (II)
3	gibt den minimalen Materialverbrauch an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e1)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt das Volumen für die „optimale“ Verpackung bei gegebenem Radius.	4 (II)
2	ermittelt die Oberfläche für diese Verpackung.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e2)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Funktionsterm, der den Materialverbrauch für die „formschöne“ Verpackung angibt.	3 (III)
2	berechnet für das gegebene Volumen den Materialverbrauch für die Oberfläche und den Radius.	3 (I)
3	vergleicht beide Verpackungen hinsichtlich Oberfläche und Radius.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	interpretiert die Bedeutung des Schnittpunktes.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	leitet einen Term …	2 (I)			
2	leitet einen Term …	2 (I)			
3	leitet den Funktionsterm …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt den maximalen …	2 (I)			
2	gibt einen Definitionsbereich …	2 (I)			
3	begründet die Entscheidung …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	skizziert den Funktionsgraphen …	2 (I)			
2	interpretiert die Extrempunkte …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Term …	2 (I)			
2	ermittelt den Radius …	5 (II)			
3	gibt den minimalen …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e1)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt das Volumen …	4 (II)			
2	ermittelt die Oberfläche …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e1)	**7**			

Teilaufgabe e2)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Funktionsterm …	3 (III)			
2	berechnet für das …	3 (I)			
3	vergleicht beide Verpackungen …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e2)	**9**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	interpretiert die Bedeutung …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (3) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe f)	**3**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

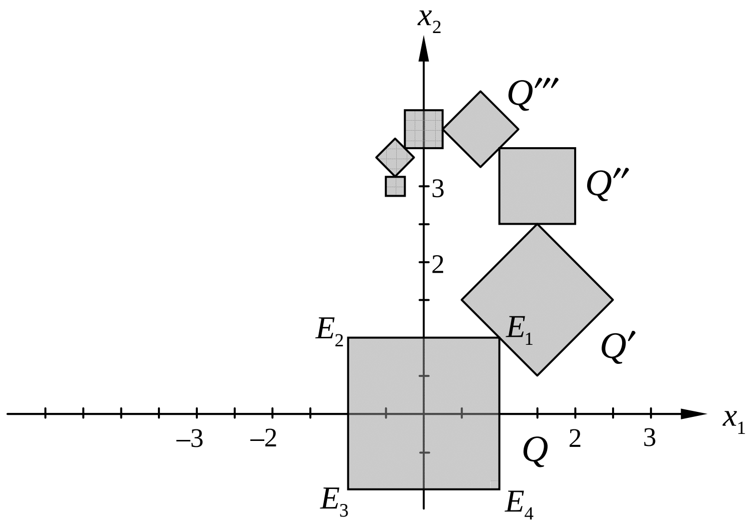
Aufgabenstellung:

Eine Abbildung α der Ebene ist gegeben durch

$$\vec{x}' = \alpha(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{v}$$

mit der Abbildungsmatrix $A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.

Sie bildet das Quadrat Q mit den Eckpunkten $E_1(1\,|\,1)$, $E_2(-1\,|\,1)$, $E_3(-1\,|\,-1)$ und $E_4(1\,|\,-1)$ auf das Quadrat Q' ab, Q' auf das Quadrat Q'' usw. (siehe *Abbildung*).



Abbildung

a) *Berechnen Sie die Eckpunkte des Bildquadrats Q'. Beschreiben Sie qualitativ und quantitativ die geometrische Wirkung der Abbildung α.* (13 Punkte)

Name: ____________________

b) *Berechnen Sie die beiden Bildpunkte des Ursprungs* $(0\,|\,0)$*, die durch 8-fache bzw. durch 16-fache Anwendung der Abbildung* α *entstehen.*
Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix und den Verschiebungsvektor derjenigen Abbildung, die der 8-fachen Hintereinanderausführung der Abbildung α *entspricht.*
(13 Punkte)

c) *Ermitteln Sie den Fixpunkt der Abbildung* α *und interpretieren Sie seine Bedeutung für die in der Abbildung dargestellte Quadratspirale.* (6 Punkte)

d) *Bestimmen Sie für die Umkehrabbildung* α^{-1} *von* α *die Abbildungsmatrix und den Verschiebungsvektor. Zeichnen Sie das Urbild des Quadrates Q in die Abbildung ein.*
(10 Punkte)

e) Durch die Abbildungsmatrix $A^* = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 1,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist eine lineare Abbildung α^* des Raumes gegeben: $\vec{x}' = \alpha^*(\vec{x}) = A^* \cdot \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass α^* *jeden Punkt der Ebene* $x_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$*, wieder auf einen Punkt dieser Ebene abbildet.*
Begründen Sie die Aussage: „In der Ebene $x_3 = 1$ *findet man die Abbildung* α *wieder“, indem Sie die Wirkung der Abbildung* α^* *auf die Punkte* $(x_1\,|\,x_2\,|\,1)$ *mit der Wirkung der Abbildung* α *auf die Punkte* $(x_1\,|\,x_2)$ *der* x_1*-*x_2*-Ebene vergleichen.* (8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für n > 2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen, Eigenwerte und Eigenvektoren
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

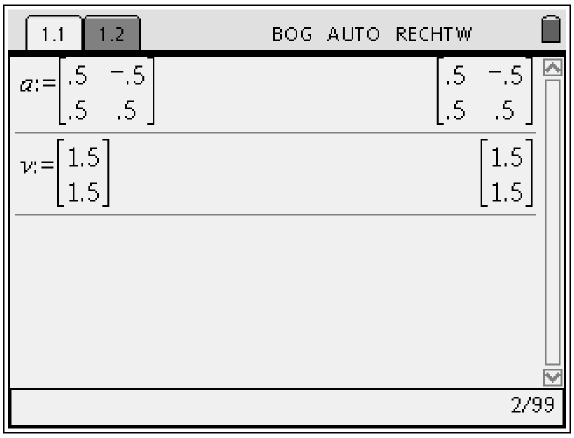
6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

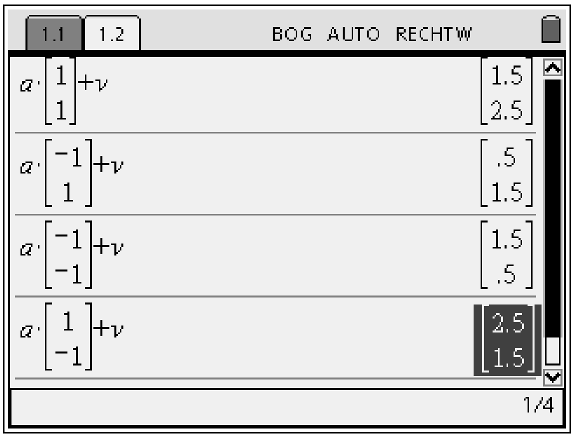
6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

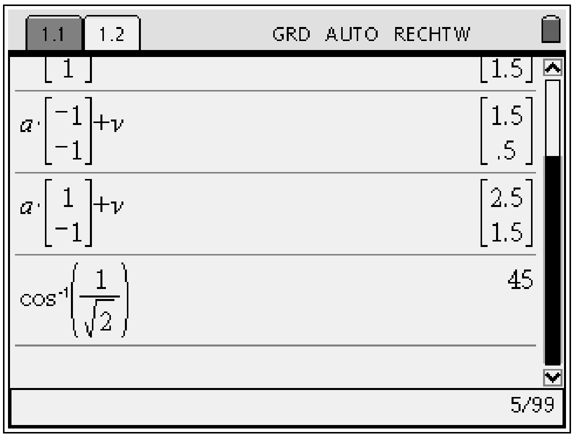
$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $E_1\,'(1{,}5\,|\,2{,}5)$.

Die weiteren Eckpunkte von Q' sind $E_2\,'(0{,}5\,|\,1{,}5)$, $E_3\,'(1{,}5\,|\,0{,}5)$ und $E_4\,'(2{,}5\,|\,1{,}5)$.





Qualitativ: Die Abbildung α bewirkt eine Linksdrehung um den Ursprung sowie eine Stauchung mit einem Faktor *k*, schließlich eine Verschiebung um den Vektor $\vec{v}$.



Quantitativ: Mit $\vec{x}_1 = \overrightarrow{OE_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

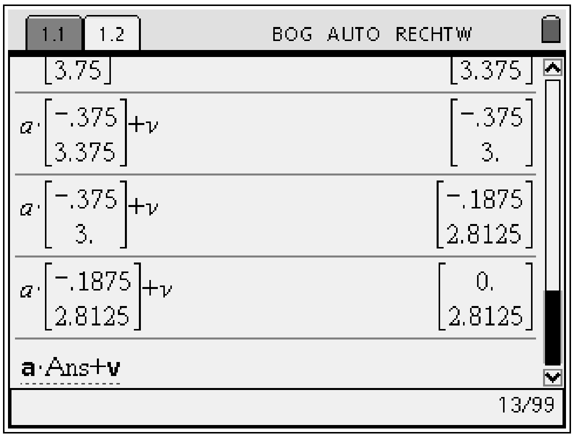
$\vec{x}_1\,' = A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beträgt der Drehwinkel

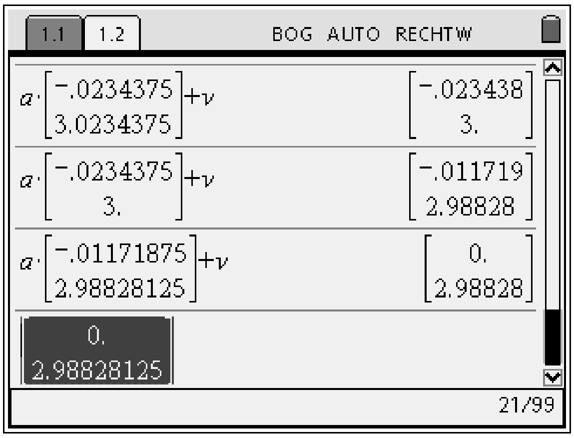
$\cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1\,'}{|\vec{x}_1| \cdot |\vec{x}_1\,'|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$ und

$k = \dfrac{|\vec{x}_1\,'|}{|\vec{x}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

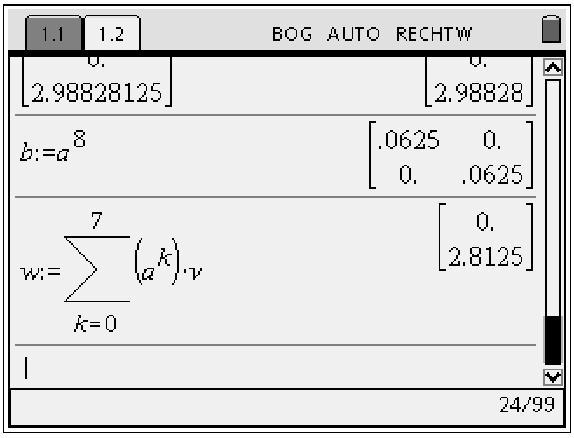
[Es darf auch geometrisch anhand der Abbildung argumentiert werden.]

Modelllösung b)





8-fache bzw. 16-fache Anwendung der Abbildung α liefert die beiden Bildpunkte $(0\,|\,2{,}8125)$ und $(0\,|\,2{,}98828125)$ [die beide auf der x_2-Achse liegen und eine Annäherung an den Punkt $(0\,|\,3)$ nahelegen].



$$\alpha^2(\vec{x}) = A\cdot(A\cdot\vec{x}+\vec{v})+\vec{v}$$
$$= A^2\cdot\vec{x}+A\cdot\vec{v}+\vec{v},$$
$$\alpha^3(\vec{x}) = A\cdot(A\cdot(A\cdot\vec{x}+\vec{v})+\vec{v})+\vec{v}$$
$$= A^3\cdot\vec{x}+A^2\cdot\vec{v}+A\cdot\vec{v}+\vec{v},$$

...

$\alpha^8(\vec{x}) = A^8\cdot\vec{x}+A^7\cdot\vec{v}+\ldots+A\cdot\vec{v}+\vec{v}$, also

$$\alpha^8(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0{,}0625 & 0 \\ 0 & 0{,}0625 \end{bmatrix}\cdot\vec{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}8125 \end{pmatrix}$$

Modelllösung c)

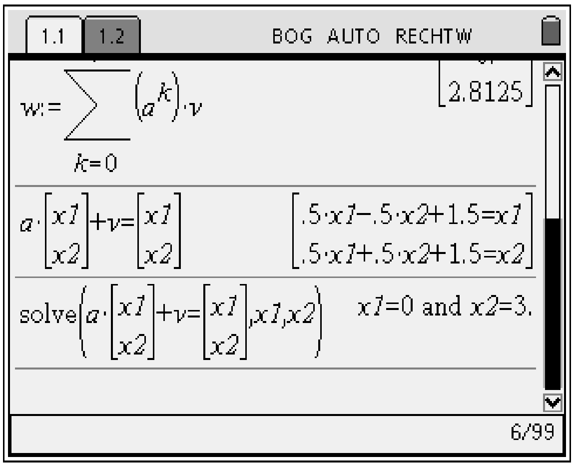
Das sich aus dem Ansatz $A \cdot \vec{x}_F = \vec{x}_F$ mit

$\vec{x}_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ergebende Gleichungssystem

$\left| \begin{matrix} 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5 & = & x_1 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5 & = & x_2 \end{matrix} \right|$ kann von Hand

oder mit dem CAS gelöst werden.

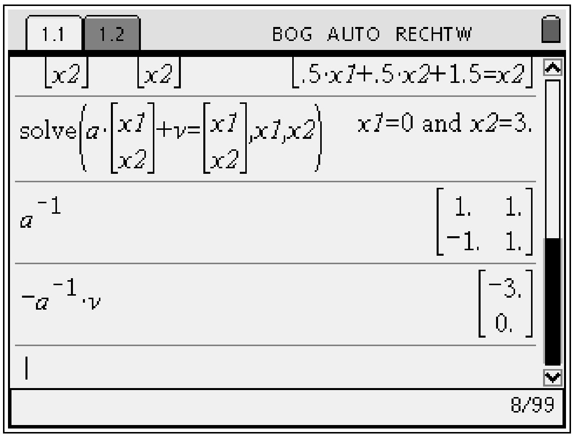
Der Fixpunkt ist $F(0\,|\,3)$.



Der Fixpunkt ist derjenige Punkt, zu dem die immer kleiner werdenden Bildquadrate der Spirale bei fortgesetzter Anwendung der Abbildung hinstreben (evt.: Grenzpunkt der unendlich fortgesetzten Spirale).

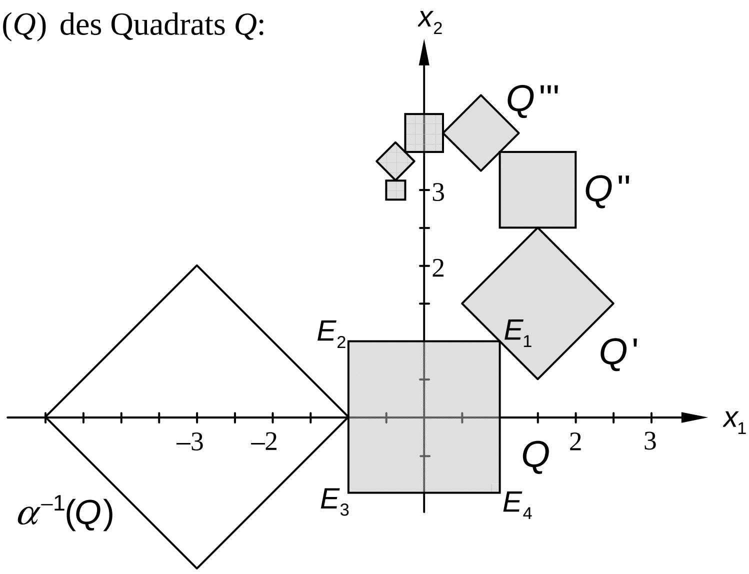
Modelllösung d)

$$\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x} + \vec{v} \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{x}\,' - \vec{v} = A \cdot \vec{x} \quad \Leftrightarrow$$
$$A^{-1} \cdot (\vec{x}\,' - \vec{v}) = \vec{x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x}\,' - A^{-1} \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}\,' + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung ist $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, der Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

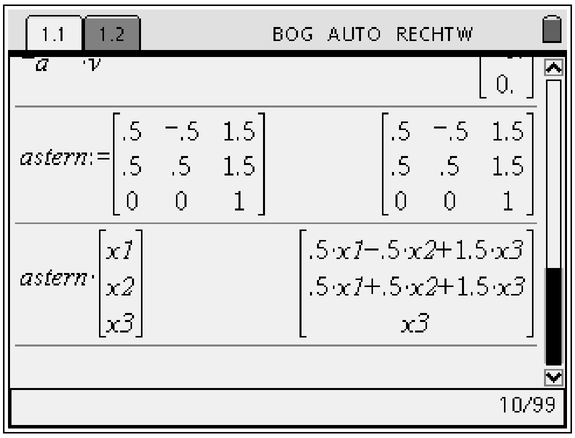
Urbild $\alpha^{-1}(Q)$ des Quadrats Q:



Modelllösung e)

Die Abbildung α^* bildet jeden Punkt der Ebene $x_3 = c$, $c \in I\!R$, wieder auf einen Punkt dieser Ebene ab, denn:

$$A^* \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} :$$



Die x_3-Koordinate bleibt also fest.

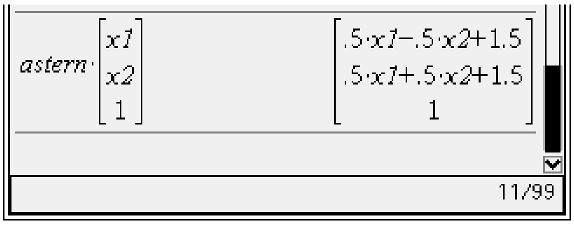
Begründung der Aussage:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A^* \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass für alle Punkte der Ebene $x_3 = 1$ die x_3-Koordinate der jeweiligen Bildpunkte unter der Abbildung α^* den festen Wert 1 hat. In der Ebene $x_3 = 1$ stimmen dann die beiden Abbildungsgleichungen für die x_1- und die x_2-Koordinate genau mit denjenigen der ebenen Abbildung α überein:

$x_1' = 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5$,

$x_2' = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5$.



[Formal:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^* \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

bzw. $\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(A^* \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	berechnet den ersten Eckpunkt.	3 (I)
2	berechnet die übrigen drei Eckpunkte.	3 (I)
3	beschreibt die Wirkung der Abbildung qualitativ.	3 (I)
4	beschreibt die Wirkung der Abbildung quantitativ.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet die beiden Bildpunkte des Ursprungs.	4 (I)
2	bestimmt die Abbildungsmatrix.	4 (II)
3	bestimmt den Verschiebungsvektor.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt den Fixpunkt.	3 (II)
2	interpretiert seine Bedeutung.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt die Abbildungsmatrix.	3 (II)
2	bestimmt den Verschiebungsvektor.	3 (II)
3	zeichnet das Urbild von Q.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass α^* jede Ebene $x_3 = c$ in sich abbildet.	3 (II)
2	begründet die Aussage.	5 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet den ersten …	3 (I)			
2	berechnet die übrigen …	3 (I)			
3	beschreibt die Wirkung …	3 (I)			
4	beschreibt die Wirkung …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die beiden …	4 (I)			
2	bestimmt die Abbildungsmatrix.	4 (II)			
3	bestimmt den Verschiebungsvektor.	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Fixpunkt.	3 (II)			
2	interpretiert seine Bedeutung.	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Abbildungsmatrix.	3 (II)			
2	bestimmt den Verschiebungsvektor.	3 (II)			
3	zeichnet das Urbild …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass α^* …	3 (II)			
2	begründet die Aussage.	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

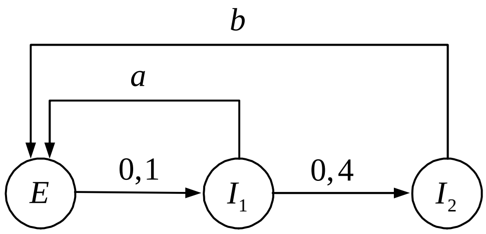
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Viele Insektenarten vermehren sich nicht nur durch befruchtete Eier sondern auch durch unbefruchtete Eier. Unter Laborbedingungen entwickelt sich die Population einer solchen Insektenart nach einem stark vereinfachten Modell in drei Entwicklungsstufen. Dabei schlüpfen aus Eiern (E) nach einer Woche Insekten der ersten Entwicklungsstufe (I_1), die nach einer Woche unbefruchtete Eier legen und sich in voll ausgebildete Insekten (I_2) verwandeln. Diese legen nach einer weiteren Woche befruchtete Eier und sterben danach. Gezählt werden neben den Eiern jeweils nur die weiblichen Insekten. Die wöchentliche Entwicklung der Population kann durch den abgebildeten Übergangsgraphen beschrieben werden.



a) *Begründen Sie, dass die in dem Übergangsgraphen dargestellte Populationsentwicklung durch die Übergangsmatrix* $\ddot{U}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ *angegeben wird, und erklären Sie die Bedeutung der Parameter a und b.* (8 Punkte)

b) Ein Laborversuch wird mit 1000 Eiern, aber ohne Insekten der Entwicklungsstufen I_1 und I_2 gestartet. Außerdem gelte $a = 10$ und $b = 5$.

Geben Sie die spezielle Übergangsmatrix an und untersuchen Sie die Entwicklung der Population für die folgenden drei Wochen. (10 Punkte)

Name: ____________________

c) Nach vier Wochen besteht die in Teilaufgabe b) beobachtete Population aus 1000 Eiern, 20 Insekten der Entwicklungsstufe I_1 und 40 Insekten der Entwicklungsstufe I_2.
Durch einen einmaligen Pestizideinsatz werden 60 % der Eier und 60 % der Insekten jeder der beiden Entwicklungsstufen I_1 und I_2 vernichtet. Zudem geht den Insekten der beobachteten Population dauerhaft die Fähigkeit verloren, auf der Entwicklungsstufe I_1 unbefruchtete Eier zu legen.
Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an. Prüfen Sie, ob die so geschwächte Population auf lange Sicht überlebensfähig ist. (11 Punkte)

d) *Ermitteln Sie die langfristige Entwicklung der Anfangspopulation (z. B. nach 4 Wochen) aus Teilaufgabe b) unter der Voraussetzung, dass die Überlebens- und Vermehrungsverhältnisse dauernd durch die Übergangsmatrix $\ddot{U}_{a,b}$ aus Teilaufgabe a) mit $a = 10$ und $b = 5$* gegeben sind. (11 Punkte)

e) Eine andere Insektenpopulation vermehre sich ebenfalls gemäß der Übergangsmatrix
$\ddot{U}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$, die Werte der Parameter *a* und *b* seien aber nicht bekannt.
Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, so dass sich eine Anfangspopulation aus 500 Eiern, 0 Insekten der Entwicklungsstufe I_1 und 50 Insekten der Entwicklungsstufe I_2 nach 3 Wochen zu einer Population von 600 Eiern, 30 Insekten der Entwicklungsstufe I_1 und 24 Insekten der Entwicklungsstufe I_2 entwickeln kann. Falls ja, bestimmen Sie a und b. (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für n > 2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Bei gegebener Matrix $\ddot{U}_{a,b}$ kann der Bestand durch den Vektor $\begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Aus $\begin{pmatrix} E' \\ I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \ddot{U}_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot I_1 + b \cdot I_2 \\ 0{,}1 \cdot E \\ 0{,}4 \cdot I_1 \end{pmatrix}$ ergeben sich damit die folgenden Zusammenhänge.

$E' = a \cdot I_1 + b \cdot I_2$: Gesamtzahl der Eier, die von Insekten der Entwicklungsstufen I_1 und I_2 gelegt werden,

$I_1' = 0{,}1 \cdot E$: Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe I_1, die sich aus 10 % der Eier entwickeln,

$I_2' = 0{,}4 \cdot I_1$: Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe I_2, in die sich 40 % der Insekten der Entwicklungsstufe I_1 verwandeln.

Das entspricht dem im Übergangsgraphen dargestellten Sachverhalt.
Die Parameter *a* bzw. *b* geben die Erzeugungsraten von Eiern durch Insekten der Entwicklungsstufe I_1 bzw. I_2 an.

Modelllösung b)

Mit $a = 10$ und $b = 5$ ergibt sich die Übergangsmatrix:

$\ddot{U} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$. Der Startvektor lautet $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit $\vec{x}_k = \ddot{U} \cdot \vec{x}_{k-1}$ $(k = 1, 2, 3)$ erhält man die Verteilungsvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Modelllösung c)

Aus den Angaben des Aufgabentextes ergibt sich die veränderte Übergangsmatrix

$\ddot{U}_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$. Für den Startvektor gilt nun $\vec{x}_0 = 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Für die zukünftigen Insektenpopulationen ergeben sich die Verteilungen

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 3,2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 80 \\ 1,6 \\ 3,2 \end{pmatrix} = 0,2 \cdot \vec{x}_0$. Daran erkennt man, dass die Population nicht überlebensfähig ist.

Zu dieser Aussage kann man auch durch allgemeine Rechnung oder unmittelbar durch Bildung des Produkts aus Erzeugungsrate und Überlebensraten kommen: $5 \cdot 0,1 \cdot 0,4 = 0,2 < 1$.

Modelllösung d)

$$\ddot{U}_{10;5}^4 = (\ddot{U}_{10;5}^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0,02 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0,08 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{U}_{10;5}^4 \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + 4 \cdot I_1 + I_2 \\ 0,02 \cdot E + I_1 + 0,5 \cdot I_2 \\ 0,04 \cdot E + 0,08 \cdot I_1 \end{pmatrix}.$$

Die Größe der Population $1,06 \cdot E + 5,08 \cdot I_1 + 1,5 \cdot I_2$ übertrifft nach vier Wochen die Größe $E + I_1 + I_2$ der Anfangspopulation wenigstens um einen Faktor $1,06$. Die Population wächst exponentiell und daher langfristig über alle Grenzen.

Alternative Lösungsmöglichkeiten:

Wenn man von einer Startpopulation ausgeht, die nur aus Eiern besteht, so ergibt sich:

$$\ddot{U}_{10;5}^2 \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix},\ \ddot{U}_{10;5}^4 \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0,02 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix},\ \ddot{U}_{10;5}^6 \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Eier hat nach 6 Wochen um 4 % zugenommen, die gesamte Population um 12 %. In der Startverteilung evtl. vorhandene Insekten (I_1 und I_2) legen zusätzliche Eier und erhöhen dadurch die Anzahl der Eier, auch wenn die Anzahl der Insekten (I_1 und I_2) selbst zwischenzeitlich rückläufig sein kann. Die Anzahl der Eier wächst also exponentiell mit einem Wachstumsfaktor von wenigstens $1{,}04$ bezogen auf 6 Wochen und mit ihr die Anzahl der daraus entstehenden Insekten (I_1 und I_2).

Alternativ kann auch anhand des Terms $0{,}1 \cdot a + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot b$, gebildet aus Erzeugungsraten von Eiern und Überlebensraten, argumentiert werden.

Modelllösung e)

Gesucht sind *a* und *b*, so dass $\ddot{U}^3_{a.b} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}$.

$$\ddot{U}^3_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1a & 0{,}4b & 0 \\ 0 & 0{,}1a & 0{,}1b \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}04b & 0{,}1a^2 & 0{,}1ab \\ 0{,}01a & 0{,}04b & 0 \\ 0 & 0{,}04a & 0{,}04b \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{U}^3_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20b + 5ab \\ 5a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Damit gibt es mit $a = 6$ und $b = 12$ Parameterwerte zur angegebenen Entwicklung der Populationszahlen.

Alternativ könnte man die 3 Folgepopulationen auch direkt mit $\ddot{U}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	begründet den Aufbau der Übergangsmatrix *Ü*.	6 (II)
2	erklärt die Bedeutung der Parameter a und b.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die spezielle Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	gibt den Startvektor an.	2 (I)
3	ermittelt den Ansatz für die Berechnung.	3 (II)
4	berechnet die Populationen der folgenden 3 Wochen.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die modifizierte Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	nennt den neuen Starvektor.	2 (I)
3	prüft die Fragestellung mit Hilfe der Folgepopulationen.	4 (II)
4	begründet, dass die Population nicht überlebensfähig ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (III)
2	bestimmt die Größe einer allgemeinen Population nach z. B. 4 Wochen.	5 (II)
3	begründet, dass die Population exponentiell wächst.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	2 (II)
2	berechnet $\ddot{U}_{a,b}^{3} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$.	5 (I)
3	bestimmt Werte für a und b und begründet damit ihre Existenz.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	begründet den Aufbau …	6 (II)			
2	erklärt die Bedeutung …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die spezielle …	2 (I)			
2	gibt den Startvektor …	2 (I)			
3	ermittelt den Ansatz …	3 (II)			
4	berechnet die Populationen …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die modifizierte …	2 (I)			
2	nennt den neuen …	2 (I)			
3	prüft die Fragestellung …	4 (II)			
4	begründet, dass die …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (III)			
2	bestimmt die Größe …	5 (II)			
3	begründet, dass die …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	2 (II)			
2	berechnet $\ddot{U}_{a,b}^{3} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$.	5 (I)			
3	bestimmt Werte für …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielt in der amerikanischen Profiliga NBA beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/2007 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90,4 %.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er*
   (1) *mindestens 35 Treffer bei 40 Versuchen erzielt,*
   (2) *höchstens vier Mal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist,*
   (3) *höchstens 170 von 200 Freiwürfen trifft.* (12 Punkte)

b) Bei Heimspielen hatte er eine Freiwurfbilanz von 267 Treffern bei 288 Versuchen, bei Auswärtsspielen lag die Quote bei 231 : 263. Ein Sportreporter berichtet, dass Dirk Nowitzki auswärts eine deutlich schwächere Freiwurfquote habe.

   Untersuchen Sie auf dem Signifikanzniveau von 5 %, inwiefern seine Auswärtsquote
   (1) *geringer als die Gesamtquote ist,*
   (2) *geringer als die Trefferquote bei Heimspielen ist.* (10 Punkte)

c) In der Vorbereitung zur nachfolgenden Saison vermutet der Trainer, dass die Quote seines Schützlings gesunken ist. Bevor er mit dieser Vermutung an die Öffentlichkeit geht, möchte er aber anhand der ersten 50 Freiwürfe in der neuen Saison überprüfen, ob diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von 10 % gesichert ist.

   Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel. (10 Punkte)

Name: ____________________

d) Dirk Nowitzki bestritt 41 Heim- und 37 Auswärtsspiele mit den bei b) gegebenen Trefferbilanzen. Es sei bekannt, dass er in einem Spiel der Saison 10 von 10 Freiwürfen getroffen hat.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei diesem Spiel um ein Heimspiel handelte. (8 Punkte)

e) Es wird nun allgemein ein Spieler betrachtet, der einen Freiwurf mit der Wahrscheinlichkeit p trifft. Ganz am Ende eines Spieles kann es zu der Situation kommen, dass der Spieler noch 2 Freiwürfe erhält und das Spiel unmittelbar danach beendet ist. Für einen verwandelten Freiwurf erhält die Mannschaft einen Punkt.

(1) *Beurteilen Sie in Abhängigkeit des vorherigen Spielstandes die Siegchancen für die Mannschaft des Spielers, der die letzten 2 Freiwürfe erhält. Gehen Sie dabei davon aus, dass im Fall eines Unentschiedens in der folgenden Verlängerung die Siegchance für beide Mannschaften 50 % beträgt. Geben Sie für die einzelnen Fälle die Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p an.*

(2) *Vor den beiden letzten Freiwürfen sei Gleichstand. Bestimmen Sie p so, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Mannschaft des werfenden Spielers mindestens 99,5 % beträgt.* (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Tabelle 1: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \quad = \quad \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p									
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
		p									

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k)\ =\ \binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	85	
	15			0,9601	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	84	
	16			0,9794	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	83	
	17			0,9900	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	82	
	18			0,9954	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	81	
	19			0,9980	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	80	
	20			0,9992	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	79	
	21			0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	78	
	22			0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0000	77	
	23				0,8109	0,3711	0,0755	0,0000	76	
	24				0,8686	0,4617	0,1136	0,0000	75	
	25				0,9125	0,5535	0,1631	0,0000	74	
	26				0,9442	0,6417	0,2244	0,0000	73	
	27				0,9658	0,7224	0,2964	0,0000	72	
	28				0,9800	0,7925	0,3768	0,0000	71	
	29				0,9888	0,8505	0,4623	0,0000	70	
	30				0,9939	0,8962	0,5491	0,0000	69	
	31				0,9969	0,9307	0,6331	0,0001	68	
	32				0,9984	0,9554	0,7107	0,0002	67	
	33				0,9993	0,9724	0,7793	0,0004	66	
100	34				0,9997	0,9836	0,8371	0,0009	65	100
	35				0,9999	0,9906	0,8839	0,0018	64	
	36				0,9999	0,9948	0,9201	0,0033	63	
	37					0,9973	0,9470	0,0060	62	
	38					0,9986	0,9660	0,0105	61	
	39					0,9993	0,9790	0,0176	60	
	40					0,9997	0,9875	0,0284	59	
	41					0,9999	0,9928	0,0443	58	
	42					0,9999	0,9960	0,0666	57	
	43						0,9979	0,0967	56	
	44						0,9989	0,1356	55	
	45						0,9995	0,1841	54	
	46						0,9997	0,2421	53	
	47						0,9999	0,3086	52	
	48						0,9999	0,3822	51	
	49							0,4602	50	
	50							0,5398	49	
	51							0,6178	48	
	52							0,6914	47	
	53							0,7579	46	
	54							0,8159	45	
	55							0,8644	44	
	56							0,9033	43	
	57							0,9334	42	
	58							0,9557	41	
	59							0,9716	40	
	60							0,9824	39	
	61							0,9895	38	
	62							0,9940	37	
	63							0,9967	36	
	64							0,9982	35	
	65							0,9991	34	
	66	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9996	33	
	67							0,9998	32	
	68							0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200 und *n* = 300

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = 200			
	p		
k	0,2	0,25	
19	0,0000	0,0000	180
20	0,0001	0,0000	179
21	0,0002	0,0000	178
22	0,0005	0,0000	177
23	0,0010	0,0000	176
24	0,0020	0,0000	175
25	0,0036	0,0000	174
26	0,0064	0,0000	173
27	0,0110	0,0000	172
28	0,0179	0,0001	171
29	0,0283	0,0002	170
30	0,0430	0,0004	169
31	0,0632	0,0008	168
32	0,0899	0,0014	167
33	0,1239	0,0026	166
34	0,1656	0,0044	165
35	0,2151	0,0073	164
36	0,2717	0,0117	163
37	0,3345	0,0182	162
38	0,4019	0,0276	161
39	0,4718	0,0405	160
40	0,5422	0,0578	159
41	0,6108	0,0804	158
42	0,6758	0,1089	157
43	0,7355	0,1438	156
44	0,7887	0,1852	155
45	0,8349	0,2332	154
46	0,8738	0,2870	153
47	0,9056	0,3458	152
48	0,9310	0,4083	151
49	0,9506	0,4729	150
50	0,9655	0,5379	149
51	0,9764	0,6017	148
52	0,9843	0,6626	147
53	0,9897	0,7192	146
54	0,9934	0,7707	145
55	0,9959	0,8162	144
56	0,9975	0,8555	143
57	0,9985	0,8885	142
58	0,9991	0,9157	141
59	0,9995	0,9375	140
60	0,9997	0,9546	139
61	0,9998	0,9677	138
62	0,9999	0,9774	137
63	1,0000	0,9846	136
64	1,0000	0,9897	135
65	1,0000	0,9932	134
66	1,0000	0,9956	133
67	1,0000	0,9972	132
68	1,0000	0,9983	131
69	1,0000	0,9990	130
70	1,0000	0,9994	129
71	1,0000	0,9996	128
72	1,0000	0,9998	127
73	1,0000	0,9999	126
74	1,0000	0,9999	125
75	1,0000	1,0000	124

n = 300			
	p		
k	0,2	0,25	
34	0,0000	0,0000	265
35	0,0001	0,0000	264
36	0,0002	0,0000	263
37	0,0003	0,0000	262
38	0,0006	0,0000	261
39	0,0010	0,0000	260
40	0,0017	0,0000	259
41	0,0028	0,0000	258
42	0,0044	0,0000	257
43	0,0069	0,0000	256
44	0,0106	0,0000	255
45	0,0158	0,0000	254
46	0,0230	0,0000	253
47	0,0328	0,0001	252
48	0,0457	0,0001	251
49	0,0622	0,0002	250
50	0,0830	0,0003	249
51	0,1084	0,0006	248
52	0,1388	0,0009	247
53	0,1745	0,0015	246
54	0,2152	0,0024	245
55	0,2607	0,0037	244
56	0,3106	0,0057	243
57	0,3639	0,0084	242
58	0,4197	0,0123	241
59	0,4770	0,0175	240
60	0,5345	0,0246	239
61	0,5910	0,0338	238
62	0,6455	0,0456	237
63	0,6970	0,0606	236
64	0,7447	0,0790	235
65	0,7879	0,1013	234
66	0,8264	0,1278	233
67	0,8600	0,1586	232
68	0,8888	0,1938	231
69	0,9131	0,2333	230
70	0,9330	0,2767	229
71	0,9492	0,3235	228
72	0,9621	0,3732	227
73	0,9721	0,4250	226
74	0,9798	0,4778	225
75	0,9856	0,5310	224
76	0,9899	0,5834	223
77	0,9930	0,6342	222
78	0,9953	0,6827	221
79	0,9968	0,7281	220
80	0,9979	0,7699	219
81	0,9986	0,8077	218
82	0,9991	0,8414	217
83	0,9995	0,8709	216
84	0,9997	0,8963	215
85	0,9998	0,9178	214
86	0,9999	0,9357	213
87	0,9999	0,9504	212
88	1,0000	0,9623	211
89	1,0000	0,9717	210
90	1,0000	0,9790	209
91	1,0000	0,9847	208
92	1,0000	0,9890	207
93	1,0000	0,9922	206
94	1,0000	0,9945	205
95	1,0000	0,9962	204
96	1,0000	0,9974	203
97	1,0000	0,9983	202
98	1,0000	0,9989	201
99	1,0000	0,9993	200
100	1,0000	0,9995	199
101	1,0000	0,9997	198
102	1,0000	0,9998	197
103	1,0000	0,9999	196
104	1,0000	0,9999	195
105	1,0000	1,0000	194
	0,8	0,75	*k*
	p		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1$-abgelesener Wert.

Name: ____________________

Tabelle 5: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

1. Die Zufallsvariable X für die Anzahl der Treffer bei 40 Versuchen ist $B_{40;0,904}$–verteilt.

   Also ist $P(X \geq 35) = \sum_{k=35}^{40} \binom{40}{k} \cdot 0{,}904^k \cdot 0{,}096^{40-k} \approx 0{,}8187 = 81{,}87\ \%$.

2. Man betrachtet das Gegenereignis, dass er fünf Treffer nacheinander schafft. Hierfür beträgt die Wahrscheinlichkeit $0{,}904^5 \approx 0{,}604$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $1-0{,}604 = 0{,}396 = 39{,}6\ \%$.

   [Alternative Lösung über Pfadregeln möglich: $\sum_{k=0}^{4} 0{,}096 \cdot 0{,}904^k \approx 0{,}396$]

3. Die Zufallsvariable Y ist $B_{200;0,904}$–verteilt:

   $B_{200;0,904} = P(Y \leq 170) = \sum_{k=0}^{170} \binom{200}{k} \cdot 0{,}904^k \cdot (1-0{,}904)^{200-k} \approx 0{,}0096$.

Modelllösung b)

Es sei p die Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Auswärtsspiel.

1. Die Nullhypothese lautet: $H_0 : p < 0{,}904$. Sei X $B_{263;0,904}$–verteilt.

   $B(263;0{,}904) = P(X \leq 231) \approx 9{,}82\ \%$. Somit wird H_0 auf dem 5 %-Signifikanzniveau abgelehnt, d. h., es ist gerechtfertigt zu behaupten, dass seine Auswärtsquote geringer als seine Gesamttrefferquote ist.

2. Die Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Heimspiel beträgt $\frac{267}{288} \approx 0{,}927$. Nun lautet die Nullhypothese $H_0 : p < 0{,}927$. X sei $B_{263;0,927}$–verteilt. Es gilt dann:

   $B(263;0{,}927) = P(X \leq 231) \approx 0{,}0033$. Somit kann H_0 auf dem 5 %-Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden, d. h., es kann nicht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von maximal 5 % behauptet werden, dass seine Auswärtsquote geringer als seine Heimquote ist.

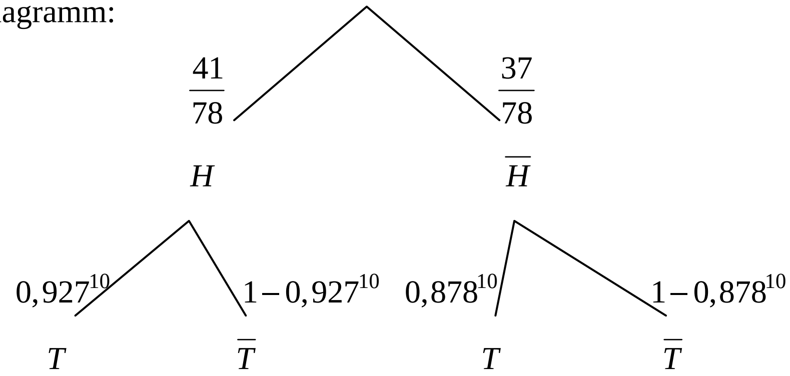
Modelllösung c)

Als Nullhypothese wird $H_0 : p > 0{,}9$ gewählt, da diese möglichst mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von maximal 10 % verworfen werden soll. Es sei $\{k, k+1, ..., 50\}$ der Annahmebereich. Dann ist k die größte ganze Zahl, für die $P(X < k) \le 0{,}1$ gilt, wobei X $B_{50;0,904}$–verteilt ist. Mit CAS erhält man nach gezieltem Suchen $P(X \le 42) = 0{,}1025$ und $P(X \le 41) = 0{,}0467$. Somit ist $k = 42$ und die Entscheidungsregel lautet: Bei weniger als 42 Treffern wird die Hypothese verworfen, d. h., der Trainer geht mit seiner Vermutung an die Öffentlichkeit.

Modelllösung d)

Die Einzelwahrscheinlichkeiten für verwandelte Freiwürfe betragen $\frac{267}{288} \approx 92{,}7\,\%$ bei Heimspielen und $\frac{231}{263} \approx 87{,}8\,\%$ bei Auswärtsspielen. H bezeichne das Ereignis „Heimspiel“ und T das Ereignis „10 Treffer bei 10 Versuchen“.

Baumdiagramm:



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{41 \cdot 0{,}927^{10}}{41 \cdot 0{,}927^{10} + 37 \cdot 0{,}878^{10}} \approx 0{,}656$.

Modelllösung e)

Die Zufallsvariable X für die Anzahl der Treffer ist $B_{2;p}$–verteilt; dann ist

$$P(X=2)=p^2$$
$$P(X=1)=2p(1-p)$$
$$P(X=0)=(1-p)^2$$

1. Es sind 3 Spielstände zu untersuchen: 2 Punkte Rückstand, 1 Punkt Rückstand und Gleichstand.

   2 Punkte Rückstand: Die Wahrscheinlichkeit, noch zu gewinnen, beträgt $\frac{1}{2}p^2$ (2 Treffer und anschließend Gewinn der Verlängerung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$).

   1 Punkt Rückstand: Gewinnwahrscheinlichkeit $p^2+\frac{1}{2}\cdot 2p(1-p)=p$ (2 Treffer oder 1 Treffer und Gewinn der Verlängerung).

   Gleichstand: Die Wahrscheinlichkeit, noch zu verlieren, ist $\frac{1}{2}(1-p)^2$ (kein Treffer und Verlust der Verlängerung), daher ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $1-\frac{1}{2}(1-p)^2$.

2. $1-\frac{1}{2}(1-p)^2 \ge 0{,}995 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-p)^2 \le 0{,}005 \Leftrightarrow (1-p)^2 \le 0{,}01 \Leftrightarrow 1-p \le 0{,}1 \Leftrightarrow p \ge 0{,}9$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**Maximal Erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	ermittelt die Parameter der Binomialverteilung.	2 (II)
2	berechnet die erste gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2 (I)
3	berechnet die zweite gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3 (I)
4	berechnet die dritte gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	Maximal Erreichbare Punktzahl (AFB)
1	untersucht die erste Hypothese.	5 (II)
2	untersucht die zweite Hypothese.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beschreibt das Testverfahren und ermittelt eine sinnvolle Nullhypothese.	4 (II)
2	ermittelt den Wert der Variablen k.	4 (II)
3	nennt die Entscheidungsregel.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeichnet ein geeignetes Baumdiagramm.	3 (II)
2	ermittelt die benötigten Wahrscheinlichkeiten.	3 (III)
3	berechnet die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) ermittelt eine sinnvolle Fallunterscheidung.	3 (II)
2	(1) bestimmt die einzelnen Gewinnwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p.	4 (III)
3	(2) bestimmt das passende p.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Parameter …	2 (II)			
2	berechnet die erste …	2 (I)			
3	berechnet die zweite …	3 (I)			
4	berechnet die dritte …	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht die erste …	5 (II)			
2	untersucht die zweite …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt das Testverfahren …	4 (II)			
2	ermittelt den Wert …	4 (II)			
3	nennt die Entscheidungsregel.	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeichnet ein geeignetes …	3 (II)			
2	ermittelt die benötigten …	3 (III)			
3	berechnet die gesuchte…	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine sinnvolle …	3 (II)			
2	(1) bestimmt die einzelnen …	4 (III)			
3	(2) bestimmt das passende …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Kultur: Wieder mehr Leseratten

Bertelsmann Stiftung ließ 2.500 Bundesbürger befragen

■**München** (AP). In Deutschland gibt es wieder mehr Leseratten. Wie die Bertelsmann Stiftung gestern mitteilte, ist der Anteil der Lesefans seit 1996 von 22 auf 25 Prozent gestiegen. Die Zahl der Buchmuffel sank dagegen um fünf Punkte auf 15 Prozent. Dies ist das Ergebnis einer Befragung von 2.500 Bundesbürgern ab 14 Jahren, die das infas-Institut für Bertelsmann durchführte.

Auszug aus der Neuen Westfälischen vom 06.12.1999

a) Angenommen, die Zeitungsmeldung stimmt und die Prozentsätze von 1999 gelten auch heute noch.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 8 zufällig ausgesuchten Personen

(1) *genau 2 zu den Lesefans gehören,*

(2) *keine Person Lesefan ist,*

(3) *mindestens 3 Personen Lesefans sind.* (11 Punkte)

b) Anna will die Stichprobe vom Umfang 8 in Aufgabe a) durch ein Modell simulieren. Sie legt in einen Behälter 40 Kugeln, davon 10 rote und 30 weiße, durchmischt sie gut und zieht nacheinander 8 Kugeln, ohne diese zurückzulegen.

(1) *Beschreiben Sie, weshalb Anna das Modell so wählt.*

(2) *Begründen Sie, weshalb Annas Modell die Situation in Aufgabe a) dennoch nicht angemessen simuliert. Zeigen Sie an einem Beispiel, weshalb in Aufgabe a) näherungsweise eine Binomialverteilung vorliegt.* (10 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Bertelsmannstiftung lässt die Hypothese, dass der Anteil der Lesefans 25 % beträgt, durch eine neue Untersuchung vom Umfang 200 überprüfen. Man will weiterhin von der Richtigkeit der Hypothese ausgehen, wenn sich in der Stichprobe mindestens 38 und höchstens 62 Lesefans befinden.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Fehlers.*

(2) *In der Stichprobe findet man 58 Lesefans. Erklären Sie ohne weitere Rechnung, inwieweit die Bertelsmann-Stiftung davon ausgehen kann, dass die Hypothese bestätigt ist.* (10 Punkte)

d) Firma „Intersoft“, die sich sehr stark im Internetbereich engagiert, behauptet, dass der Anteil der Lesefans kleiner ist als 22 %. Sie lässt diese Behauptung durch eine neue Untersuchung vom Umfang 2500 prüfen. In der Stichprobe findet man 502 Lesefans.

Bestimmen Sie einen Hypothesentest, den die Firma durchführen wird (Signifikanzniveau 5 %). Beschreiben Sie den Fehler, den die Firma in dieser Situation begehen kann. (11 Punkte)

e) Angenommen, der wirkliche Anteil der Lesefans beträgt 27 % ($p = 0{,}27$). Die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ der Lesefans in der Stichprobe vom Umfang n soll sich um höchstens 0,02 vom wirklichen Anteil p unterscheiden.

(1) *Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis gegeben ist durch* $P(\mu - 0{,}02 \cdot n \le X \le \mu + 0{,}02 \cdot n)$.

(2) *Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Stichprobenumfang n, so dass diese Wahrscheinlichkeit mindestens 95 % beträgt. Zeigen Sie zunächst, dass Letzteres erfüllt ist, wenn* $0{,}02 \cdot n \ge 1{,}96 \cdot \sigma$. *Gehen Sie davon aus, dass* $\sigma > 3$. (8 Punkte)

Wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, können Sie bei der Lösung Ihrer Aufgaben nebenstehende Näherungswerte benutzen.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit Standardabweichung $\sigma > 3$ gilt näherungsweise:

$$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$$
$$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$$
$$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$$

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Tabelle 1: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \quad = \quad \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p: 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		n
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n
					p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$. gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		n
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	85	
	15			0,9601	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	84	
	16			0,9794	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	83	
	17			0,9900	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	82	
	18			0,9954	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	81	
	19			0,9980	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	80	
	20			0,9992	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	79	
	21			0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	78	
	22			0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0000	77	
	23				0,8109	0,3711	0,0755	0,0000	76	
	24				0,8686	0,4617	0,1136	0,0000	75	
	25				0,9125	0,5535	0,1631	0,0000	74	
	26				0,9442	0,6417	0,2244	0,0000	73	
	27				0,9658	0,7224	0,2964	0,0000	72	
	28				0,9800	0,7925	0,3768	0,0000	71	
	29				0,9888	0,8505	0,4623	0,0000	70	
	30				0,9939	0,8962	0,5491	0,0000	69	
	31				0,9969	0,9307	0,6331	0,0001	68	
	32				0,9984	0,9554	0,7107	0,0002	67	
	33				0,9993	0,9724	0,7793	0,0004	66	
100	34				0,9997	0,9836	0,8371	0,0009	65	100
	35				0,9999	0,9906	0,8839	0,0018	64	
	36				0,9999	0,9948	0,9201	0,0033	63	
	37					0,9973	0,9470	0,0060	62	
	38					0,9986	0,9660	0,0105	61	
	39					0,9993	0,9790	0,0176	60	
	40					0,9997	0,9875	0,0284	59	
	41					0,9999	0,9928	0,0443	58	
	42					0,9999	0,9960	0,0666	57	
	43						0,9979	0,0967	56	
	44						0,9989	0,1356	55	
	45						0,9995	0,1841	54	
	46						0,9997	0,2421	53	
	47						0,9999	0,3086	52	
	48						0,9999	0,3822	51	
	49							0,4602	50	
	50							0,5398	49	
	51							0,6178	48	
	52							0,6914	47	
	53							0,7579	46	
	54							0,8159	45	
	55							0,8644	44	
	56							0,9033	43	
	57							0,9334	42	
	58							0,9557	41	
	59							0,9716	40	
	60							0,9824	39	
	61							0,9895	38	
	62							0,9940	37	
	63							0,9967	36	
	64							0,9982	35	
	65							0,9991	34	
	66							0,9996	33	
	67							0,9998	32	
	68							0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	k	n
					p					

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200 und *n* = 300

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = 200

k	*p* = 0,2	*p* = 0,25	
19	0,0000	0,0000	180
20	0,0001	0,0000	179
21	0,0002	0,0000	178
22	0,0005	0,0000	177
23	0,0010	0,0000	176
24	0,0020	0,0000	175
25	0,0036	0,0000	174
26	0,0064	0,0000	173
27	0,0110	0,0000	172
28	0,0179	0,0001	171
29	0,0283	0,0002	170
30	0,0430	0,0004	169
31	0,0632	0,0008	168
32	0,0899	0,0014	167
33	0,1239	0,0026	166
34	0,1656	0,0044	165
35	0,2151	0,0073	164
36	0,2717	0,0117	163
37	0,3345	0,0182	162
38	0,4019	0,0276	161
39	0,4718	0,0405	160
40	0,5422	0,0578	159
41	0,6108	0,0804	158
42	0,6758	0,1089	157
43	0,7355	0,1438	156
44	0,7887	0,1852	155
45	0,8349	0,2332	154
46	0,8738	0,2870	153
47	0,9056	0,3458	152
48	0,9310	0,4083	151
49	0,9506	0,4729	150
50	0,9655	0,5379	149
51	0,9764	0,6017	148
52	0,9843	0,6626	147
53	0,9897	0,7192	146
54	0,9934	0,7707	145
55	0,9959	0,8162	144
56	0,9975	0,8555	143
57	0,9985	0,8885	142
58	0,9991	0,9157	141
59	0,9995	0,9375	140
60	0,9997	0,9546	139
61	0,9998	0,9677	138
62	0,9999	0,9774	137
63	1,0000	0,9846	136
64	1,0000	0,9897	135
65	1,0000	0,9932	134
66	1,0000	0,9956	133
67	1,0000	0,9972	132
68	1,0000	0,9983	131
69	1,0000	0,9990	130
70	1,0000	0,9994	129
71	1,0000	0,9996	128
72	1,0000	0,9998	127
73	1,0000	0,9999	126
74	1,0000	0,9999	125
75	1,0000	1,0000	124

n = 300

k	*p* = 0,2	*p* = 0,25	
34	0,0000	0,0000	265
35	0,0001	0,0000	264
36	0,0002	0,0000	263
37	0,0003	0,0000	262
38	0,0006	0,0000	261
39	0,0010	0,0000	260
40	0,0017	0,0000	259
41	0,0028	0,0000	258
42	0,0044	0,0000	257
43	0,0069	0,0000	256
44	0,0106	0,0000	255
45	0,0158	0,0000	254
46	0,0230	0,0000	253
47	0,0328	0,0001	252
48	0,0457	0,0001	251
49	0,0622	0,0002	250
50	0,0830	0,0003	249
51	0,1084	0,0006	248
52	0,1388	0,0009	247
53	0,1745	0,0015	246
54	0,2152	0,0024	245
55	0,2607	0,0037	244
56	0,3106	0,0057	243
57	0,3639	0,0084	242
58	0,4197	0,0123	241
59	0,4770	0,0175	240
60	0,5345	0,0246	239
61	0,5910	0,0338	238
62	0,6455	0,0456	237
63	0,6970	0,0606	236
64	0,7447	0,0790	235
65	0,7879	0,1013	234
66	0,8264	0,1278	233
67	0,8600	0,1586	232
68	0,8888	0,1938	231
69	0,9131	0,2333	230
70	0,9330	0,2767	229
71	0,9492	0,3235	228
72	0,9621	0,3732	227
73	0,9721	0,4250	226
74	0,9798	0,4778	225
75	0,9856	0,5310	224
76	0,9899	0,5834	223
77	0,9930	0,6342	222
78	0,9953	0,6827	221
79	0,9968	0,7281	220
80	0,9979	0,7699	219
81	0,9986	0,8077	218
82	0,9991	0,8414	217
83	0,9995	0,8709	216
84	0,9997	0,8963	215
85	0,9998	0,9178	214
86	0,9999	0,9357	213
87	0,9999	0,9504	212
88	1,0000	0,9623	211
89	1,0000	0,9717	210
90	1,0000	0,9790	209
91	1,0000	0,9847	208
92	1,0000	0,9890	207
93	1,0000	0,9922	206
94	1,0000	0,9945	205
95	1,0000	0,9962	204
96	1,0000	0,9974	203
97	1,0000	0,9983	202
98	1,0000	0,9989	201
99	1,0000	0,9993	200
100	1,0000	0,9995	199
101	1,0000	0,9997	198
102	1,0000	0,9998	197
103	1,0000	0,9999	196
104	1,0000	0,9999	195
105	1,0000	1,0000	194
	0,8	0,75	*k*
	p		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ______________________

Tabelle 5: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Lesefans in der Stichprobe. X sei binomialverteilt mit $p = 0{,}25$ und $n = 8$.

(1) $P(X=2)=\binom{8}{2}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^6 \approx 0{,}3115$

(2) $P(X=0)=0{,}75^8 \approx 0{,}1001$

(3) $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))\approx 0{,}3214$, wobei

$P(X=1)=8\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75^7 \approx 0{,}2670$

Modelllösung b)

(1) Das Entnehmen einer Stichprobe entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Man hat zwei mögliche Versuchsergebnisse auf jeder Stufe (rot oder weiß). Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen ist $p=\frac{10}{40}=0{,}25$. Diese ist gleich dem Anteil der Lesefans in der Bevölkerung.

(2) Wenn im ersten Zug eine rote Kugel gezogen wird, ist die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel im zweiten Zug gleich $\frac{9}{39}\approx 0{,}2308$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich von Stufe zu Stufe deutlich, d. h., die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe ist nicht binomialverteilt.

In Aufgabe a) ist die Grundgesamtheit groß im Vergleich zum Stichprobenumfang. Deshalb ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit von Stufe zu Stufe nur unwesentlich. Hier liegt deshalb trotz des Ziehens ohne Zurücklegen annähernd eine Binomialverteilung vor.

Beispiel: Umfang der Grundgesamtheit: 200000, davon 50000 Lesefans. Ist 1 Lesefan befragt, so beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit bei der 2. Befragung:

$p(Lesefan)=\frac{49999}{199999}\approx 0{,}25$. p bleibt annähernd konstant.

Anmerkung: Hier muss nicht der ungünstigste Fall gewählt werden.

Modelllösung c)

(1) Getestet wird $H_0: p = 0,25$ gegen $H_1: p \neq 0,25$ mit dem Annahmebereich [38; 62].

Damit gilt für die Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 1 - P(38 \leq X \leq 62)$.

$P(38 \leq X \leq 62) \approx 0,9592 \Rightarrow \alpha = 0,0408$.

Bei dem Fehler 1. Art handelt es sich um den Fehler, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie stimmt, d. h. fälschlicherweise davon auszugehen, dass der Anteil der Lesefans nicht 25 % beträgt.

(2) 58 liegt im Annahmebereich. Die Hypothese ist damit nicht widerlegt, aber auch nicht bestätigt, da das Ergebnis verträglich ist mit anderen Erfolgswahrscheinlichkeiten.

Modelllösung d)

Der gravierendere Fehler für die Firma ist, fälschlicherweise von der Richtigkeit der Behauptung auszugehen. Sie testet $H_0: p \geq 0,22$ gegen $H_1: p < 0,22$. Für n = 2500 und p = 0,22 erhält man $\mu = n \cdot p = 550$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 20,71 > 3$. Mit der Näherungslösung und aufgrund der Symmetrie der Verteilung gilt für das Signifikanzniveau:
$\alpha = P(X < \mu - 1,64 \cdot \sigma) \approx 0,05$. $\mu - 1,64 \cdot \sigma \approx 516,03$. Die Hypothese wird also abgelehnt, falls weniger als 517 Lesefans in der Stichprobe sind.
Die Firma lehnt H_0 ab und geht von der Richtigkeit ihrer Behauptung aus. Der mögliche Fehler ist der Fehler 1. Art, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie stimmt, d. h. fälschlicherweise von der Richtigkeit der Behauptung auszugehen.
Anmerkung: Mit einer anderen Begründung, etwa dem Interesse der Firma, die Behauptung für Werbezwecke nutzen zu wollen, kann $H_0: p < 0,22$ zugelassen werden.

Modelllösung e)

(1) Für die relative Häufigkeit muss gelten:

$$0,27 - 0,02 \leq \frac{X}{n} \leq 0,27 + 0,02 \Leftrightarrow 0,27 \cdot n - 0,02 \cdot n \leq X \leq 0,27 \cdot n + 0,02 \cdot n$$

$\Leftrightarrow \mu - 0,02 \cdot n \leq X \leq \mu + 0,02 \cdot n$. Daraus folgt die Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten.

(2) $0,02 \cdot n \geq 1,96 \cdot \sigma \Rightarrow [\mu - 1,96 \cdot \sigma; \mu + 1,96 \cdot \sigma] \subset [\mu - 0,02 \cdot n; \mu + 0,02 \cdot n]$. Wegen der Näherungslösung muss dann gelten: $P(\mu - 0,02 \cdot n \leq X \leq \mu + 0,02 \cdot n) \geq 0,95$.

$0,02 \cdot n \geq 1,96 \cdot \sigma = 1,96 \cdot \sqrt{0,27 \cdot 0,73 \cdot n}$ führt zu $n \geq 1892,95$.

Die Stichprobe muss mindestens 1893 Personen umfassen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	gibt die Zufallsvariable und die Parameter an und berechnet $P(X=2)$.	4 (I)
2	berechnet $P(X=0)$.	2 (I)
3	berechnet $P(X \geq 3)$.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	beschreibt die Analogie zur Realsituation.	3 (I)
2	begründet, dass keine Binomialverteilung vorliegt.	3 (II)
3	zeigt an einem Beispiel, weshalb in Aufgabe a) näherungsweise eine Binomialverteilung vorliegt.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.	6 (II)
2	beschreibt die Bedeutung dieses Fehlers.	2 (I)
3	erklärt, inwieweit die Hypothese bestätigt ist.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt die Nullhypothese.	3 (II)
2	bestimmt eine Entscheidungsregel.	6 (II)
3	beschreibt den Fehler 1. Art.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	weist die genannte Wahrscheinlichkeit nach.	2 (III)
2	bestimmt den notwendigen Stichprobenumfang.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die Zufallsvariable …	4 (I)			
2	berechnet $P(X = 0)$.	2 (I)			
3	berechnet $P(X \geq 3)$.	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt die Analogie …	3 (I)			
2	begründet, dass keine …	3 (II)			
3	zeigt an einem …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Wahrscheinlichkeit …	6 (II)			
2	beschreibt die Bedeutung …	2 (I)			
3	erklärt, inwieweit die …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Nullhypothese.	3 (II)			
2	bestimmt eine Entscheidungsregel.	6 (II)			
3	beschreibt den Fehler …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	weist die genannte …	2 (III)			
2	bestimmt den notwendigen …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0