Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment insgesamt sechs Tage lang die Vermehrung von Pantoffeltierchen in einer Nährlösung. Zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage verwendet er für $0 \le t \le 3$ die Funktion N_1 mit der Gleichung

$$N_1(t) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird *t* als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und $N_1(t)$ als Anzahl der Pantoffeltierchen zum Zeitpunkt *t* aufgefasst.

Der Graph von N_1 ist in *Abbildung 1* dargestellt.

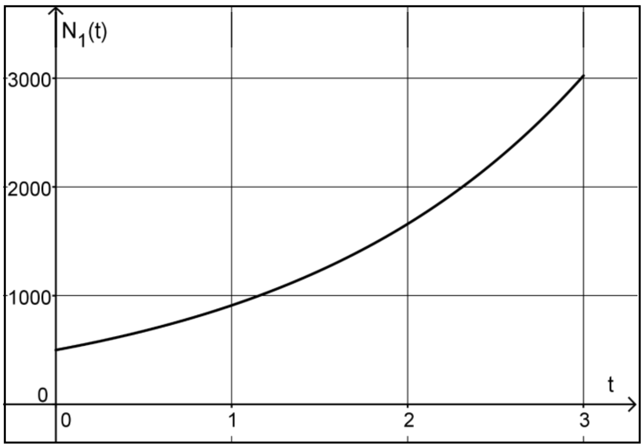


Abbildung 1

a) (1) *Berechnen Sie den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.*

Name: ____________________

(3) *Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung.*

[Zur Kontrolle: Die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung beträgt ungefähr 583.]

(4) Der Schüler berechnet einen Näherungswert für die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages, indem er das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ bildet.

Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ um weniger als 1 % von der in (3) berechneten durchschnittlichen Anzahl abweicht.

(5) *Weisen Sie nach, dass die prozentuale Abweichung des arithmetischen Mittels der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0{,}5)$ von der durchschnittlichen Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung in einem Zeitintervall $[a; a+0{,}5]$ mit $0 \le a \le 2{,}5$ unabhängig von a weniger als 1 % beträgt.*

(2 + 3 + 3 + 4 + 6 Punkte)

Während der ersten drei Tage (für $0 \le t \le 3$) wird im Modell des Schülers die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen durch die Funktion r_1 mit der Gleichung

$$r_1(t) = 300 \cdot e^{0{,}6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R},$$

beschrieben.

Dabei wird $r_1(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

b) Für die Funktion r_1 und die zugehörige Ableitungsfunktion r_1' gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage:

$$r_1(t) > 0 \text{ und } r_1'(t) > 0.$$

[Die Gültigkeit dieser Aussage müssen Sie nicht nachweisen.]

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.

(5 Punkte)

Name: ____________________

c) Bei der weiteren Beobachtung erkennt der Schüler, dass nach etwa drei Tagen die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen geringer wird. Um die Entwicklung ab dem Zeitpunkt $t = 3$ zu prognostizieren, sucht er eine Funktion, für deren momentane Änderungsrate r_2 zu jedem Zeitpunkt $t = 3 + a$ mit $0 \le a \le 3$ die Gleichung $r_2\left(3+a\right) = r_1\left(3-a\right)$ gilt.

(1) *Interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung* $r_2\left(3+a\right) = r_1\left(3-a\right)$, $0 \le a \le 3$, *im Sachzusammenhang.*

(2) *Leiten Sie aus der Gleichung* $r_1\left(t\right) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot t}$ *für die momentane Änderungsrate* r_1 *und der Gleichung* $r_2\left(3+a\right) = r_1\left(3-a\right)$, $0 \le a \le 3$, *die Gleichung*

$$r_2\left(t\right) = 300 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t},\ 3 \le t \le 6\,,$$

zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag her.

(3) *Ermitteln Sie ausgehend von den Funktionen* N_1 *und* r_2 *eine Gleichung der Funktion* N_2*, durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung (also für* $3 \le t \le 6$ *) beschrieben werden kann.*

[Zur Kontrolle: $N_2\left(t\right) = 1000 \cdot e^{1,8} - 500 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t}$.]

(4) Der Schüler verwendet die Funktion N_2 auch zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen für $t \ge 6$.

Begründen Sie, dass in diesem Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.

(3 + 4 + 5 + 3 Punkte)

d) Der Mathematiklehrer des Schülers schlägt eine alternative Modellierung vor: Statt die Anzahl der Pantoffeltierchen mit zwei Funktionen N_1 (für $0 \le t \le 3$) und N_2 (für $3 \le t \le 6$) zu beschreiben, rät er dem Schüler, zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung während der gesamten sechs Tage (also für $0 \le t \le 6$) nur eine Funktion N_{neu} mit

$$N_{\text{neu}}\left(t\right) = \frac{3\,781\,000}{625 + 6\,937 \cdot e^{-0,8023 \cdot t}}\ ,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

zu verwenden.

Name: ____________________

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von N_{neu} in die Abbildung 2 ein.*

[Die Gemeinsamkeiten und Abweichungen zwischen dem Graphen von N_{neu} und den Graphen von N_1 und N_2 müssen in Ihrer Zeichnung deutlich werden.]

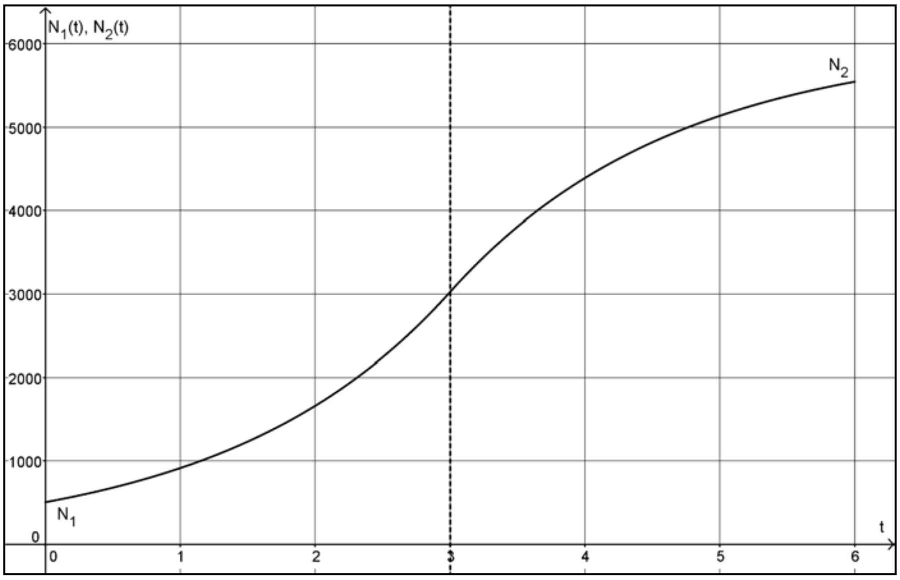


Abbildung 2

(2) Die mit der Funktion N_{neu} berechnete Anzahl der Pantoffeltierchen unterscheidet sich für $3 \le t \le 6$ maximal um ungefähr 215 Tierchen von der mit N_2 berechneten Anzahl.

Bestimmen Sie rechnerisch auch den maximalen Unterschied, der für $0 \le t \le 3$ zwischen der mit N_{neu} berechneten Anzahl von Pantoffeltierchen und der mit N_1 berechneten Anzahl auftritt, und vergleichen Sie diesen Unterschied mit dem oben angegebenen maximalen Unterschied im Intervall $[3;6]$.

(4 + 8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen sowie Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $N_1(3) = 500 \cdot e^{\frac{9}{5}} \approx 3025$.

Im gegebenen Modell sind drei Tage nach Beobachtungsbeginn ungefähr 3025 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden.

(2) $N_1(t) = 2000 \Leftrightarrow t = \dfrac{10 \cdot \ln(2)}{3} \approx 2{,}31$.

Nach dem Modell sind ungefähr 2,31 Tage nach Beobachtungsbeginn 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung enthalten.

(3) $\dfrac{1}{0{,}5-0} \cdot \displaystyle\int_0^{0{,}5} N_1(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{5000 \cdot \left(e^{\frac{3}{10}} - 1\right)}{3} \approx 583$.

Die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung am ersten halben Tag der Beobachtung beträgt ungefähr 583.

(4) $\dfrac{N_1(0) + N_1(0{,}5)}{2} = 250 \cdot \left(e^{\frac{3}{10}} + 1\right) \approx 587$.

$$\frac{\dfrac{N_1(0) + N_1(0{,}5)}{2}}{\dfrac{1}{0{,}5-0} \cdot \displaystyle\int_0^{0{,}5} N_1(t)\,\mathrm{d}t} \approx 1{,}0075.$$

Das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ weicht um ungefähr 0,75 % und damit um weniger als 1 % von der in (3) berechneten durchschnittlichen Anzahl ab.

(5) Arithmetisches Mittel $M(a)$ der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0{,}5)$:

$$\frac{N_1(a)+N_1(a+0{,}5)}{2}=250\cdot e^{\frac{3\cdot a}{5}}\cdot\left(e^{\frac{3}{10}}+1\right).$$

Durchschnittliche Anzahl $D(a)$ der Pantoffeltierchen in einem Zeitintervall

$[a;a+0{,}5]$:

$$\frac{1}{a+0{,}5-a}\cdot\int_a^{a+0{,}5}N_1(t)\,\mathrm{d}t=\frac{5000\cdot e^{\frac{3\cdot a}{5}}\cdot\left(e^{\frac{3}{10}}-1\right)}{3}.$$

$$\frac{M(a)}{D(a)}\approx 1{,}0075.$$

Das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0{,}5)$ weicht also unabhängig von *a* um ungefähr 0,75 % und damit um weniger als 1 % von der durchschnittlichen Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung in einem Zeitintervall $[a;a+0{,}5]$ ab.

Teilaufgabe b)

Da für alle $t\in\mathbb{R}$ die Aussage $r_1(t)>0$ gilt, ist die Änderungsrate von N_1 immer positiv, im Modell des Schülers nimmt daher die Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage ständig zu.

Da zusätzlich für alle $t\in\mathbb{R}$ die Aussage $r_1'(t)>0$ gilt, ist auch die Änderungsrate von r_1 immer positiv, die Anzahl der Pantoffeltierchen wächst daher im Modell des Schülers immer schneller.

Teilaufgabe c)

(1) Im Sachzusammenhang bedeutet die Gleichung $r_2(3+a)=r_1(3-a)$, dass die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung im gleichen zeitlichen Abstand vor und nach dem Zeitpunkt „drei Tage nach Beobachtungsbeginn“ jeweils gleich schnell wächst.

(2) Mit $3+a=t \Leftrightarrow a=t-3$ ergibt sich:

$$r_2(t)=r_1\left(3-(t-3)\right)=300\cdot e^{\frac{18}{5}-\frac{3}{5}\cdot t}=300\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}.$$

(3) $$N_2(t)=N_1(3)+\int_3^t r_2(u)\,\mathrm{d}u=500\cdot\left(2\cdot e^{\frac{3}{5}\cdot t}-e^{\frac{9}{5}}\right)\cdot e^{\frac{9}{5}-\frac{3}{5}\cdot t}=1000\cdot e^{1,8}-500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}.$$

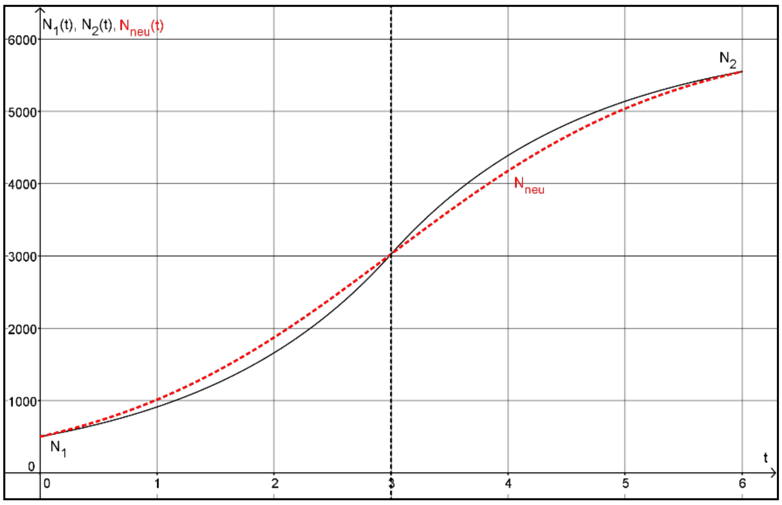
(4) Für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt $500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}>0$. Daraus folgt für alle $t\in\mathbb{R}$:

$$N_2(t)=1000\cdot e^{1,8}-500\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}<1000\cdot e^{1,8}\approx 6049,6<6050.$$

Bei Modellierung mit N_2 wird somit die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung nie größer als 6050.

Teilaufgabe d)

(1)



(2) Gesucht ist das Maximum der Differenzfunktion *d* mit $d(t) = N_{\text{neu}}(t) - N_1(t)$ im Intervall $[0;3]$.

Die Gleichung $d'(t) = 0$ hat die zwei Lösungen t_1 und t_2 mit $t_1 \approx -1{,}623$ (außerhalb des Intervalls $[0;3]$) und $t_2 \approx 2{,}130$. Wegen $d'(1) \approx 129{,}7 > 0$ und $d'(3) \approx -601{,}5 < 0$ ist die Stelle t_2 eine lokale Maximalstelle von *d*. Wegen $d(0) = 0$, $d(t_2) \approx 215$ und $d(3) \approx 0{,}017$ liegt bei t_2 auch das absolute Maximum von *d* im Intervall $[0;3]$ vor.

Der maximale Unterschied, der für $0 \le t \le 3$ zwischen der mit N_{neu} berechneten Anzahl von Pantoffeltierchen und der mit N_1 berechneten Anzahl auftritt, beträgt ungefähr 215.

Die maximalen Unterschiede der Anzahlen im Intervall $[0;3]$ und im Intervall $[3;6]$ sind (nahezu) gleich.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) bestimmt rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.	3			
3	(3) berechnet die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung.	3			
4	(4) zeigt, dass das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ um weniger als 1 % von der in (3) berechneten durchschnittlichen Anzahl abweicht.	4			
5	(5) weist nach, dass die prozentuale Abweichung des arithmetischen Mittels der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0{,}5)$ von der durchschnittlichen Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung in einem Zeitintervall $[a; a+0{,}5]$ mit $0 \le a \le 2{,}5$ unabhängig von a weniger als 1 % beträgt.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die Bedeutung der Aussage $r_1(t) > 0$ und $r_1'(t) > 0$ im Sachzusammenhang.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die Bedeutung der Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) leitet aus der Gleichung für die momentane Änderungsrate r_1 und der Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ die Gleichung $r_2(t) = 300 \cdot e^{3,6-0,6\cdot t}$ her.	4			
3	(3) ermittelt ausgehend von den Funktionen N_1 und r_2 eine Gleichung der Funktion N_2, durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag beschrieben werden kann.	5			
4	(4) begründet, dass im Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet den Graphen von N_{neu} in die Abbildung 2 ein.	4			
2	(2) bestimmt rechnerisch den maximalen Unterschied, der für $0 \leq t \leq 3$ zwischen der mit N_{neu} berechneten Anzahl von Pantoffeltierchen und der mit N_1 berechneten Anzahl auftritt, und vergleicht diesen Unterschied mit dem oben angegebenen maximalen Unterschied im Intervall $[3;6]$.	8			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Eine Familie will ihren Bedarf an Wärmeenergie (thermischer Energie) für Heizung und Warmwasser teilweise durch eine thermische Solaranlage (kurz: Solaranlage) decken. Anhand der Angaben des Solaranlagenherstellers und der Verbrauchswerte der Familie aus dem letzten Kalenderjahr wurde das folgende Modell für ein beispielhaftes Kalenderjahr aufgestellt.

Die **Leistung der Solaranlage** wird durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400,\ t \in \mathbb{R},$$

und der thermische **Leistungsbedarf** der Familie (kurz: Leistungsbedarf) durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -t^4 + 26t^3 - 167{,}5t^2 - 12{,}5t + 2053,\ t \in \mathbb{R},$$

modelliert, und zwar für das Zeitintervall [0;12], das dem Kalenderjahr entspricht.

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 Monat und $f(t)$ sowie $g(t)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 Kilowattstunde pro Monat [kWh/Monat] auf. (Im Modell umfasst jeder Monat 30 Tage.) Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Kalenderjahres.

Die Graphen von f und g sind in der *Abbildung 1* auf *Seite 3* dargestellt.

a) (1) *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage und berechnen Sie den Maximalwert.*

(3) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall [0;12], zu dem der durch g beschriebene Leistungsbedarf der Familie innerhalb eines Kalenderjahres am stärksten abnimmt.*

(5 + 7 + 8 Punkte)

Name: ____________________

Durch das Integral $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ist im Sachzusammenhang die **aus der Solaranlage im Zeitintervall [*a*; *b*] abrufbare Energie** und durch das Integral $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ der **Energiebedarf der Familie im Zeitintervall [*a*; *b*]** für $0 \leq a < b \leq 12$ in Kilowattstunden [kWh] gegeben.

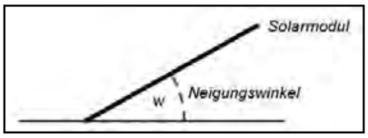
b) (1) *Berechnen Sie den Energiebedarf der Familie für das Kalenderjahr.*

(2) Zu jedem Zeitpunkt, zu dem die Leistung der Solaranlage größer ist als der Leistungsbedarf der Familie, soll die „überschüssige" Leistung zusätzlich zum Heizen eines Gartenpools genutzt werden.

Ermitteln Sie die Energie, die zum Heizen des Gartenpools in dem Kalenderjahr zur Verfügung steht.

(4 + 6 Punkte)

c) Die Leistung der Solaranlage ist abhängig von der Neigung der aufgestellten Solarmodule. Die Funktion f_a mit der Gleichung



$$f_a(t) = a \cdot \left(t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400\right) - 400 \cdot \left(a^2 - 1\right),\ t \in \mathbb{R},\ 0{,}5 \leq a \leq 1{,}5,$$

modelliert im Intervall [0;12] diese Leistung für ein Kalenderjahr, wobei der Parameter *a* eine Kennzahl für die Neigung der Solarmodule ist. Jedem Wert des Parameters *a* kann über die Gleichung $w = 116 - 66 \cdot a$ die Maßzahl für den entsprechenden Neigungswinkel in Grad zugeordnet werden.

In der *Abbildung 2* auf *Seite 3* sind beispielhaft für zwei Werte von *a* die Graphen der jeweils zugehörigen Funktion f_a sowie der Graph von *g* dargestellt.

(1) Die Funktion *f* ist eine der Funktionen f_a.

Ermitteln Sie für f den zugehörigen Neigungswinkel w der Solarmodule.

Name: ____________________

(2) *Zeigen Sie, dass der Neigungswinkel stets einen Einfluss auf die Leistung der Solaranlage hat, d. h. dass es keinen Zeitpunkt* t_0 *gibt, zu dem die Gleichung* $f_a(t_0) = f(t_0)$ *unabhängig vom Parameter a gilt.*

(3) *Weisen Sie nach, dass die in einem Jahr aus der Solaranlage abrufbare Energie für* $a = 1{,}364$ *(d. h.* $w \approx 26°$*) am größten ist.*

(4) Der Solaranlagenhersteller behauptet, dass eine Solaranlage mit der Kennzahl $a = 1$ den Energiebedarf der Familie (ohne Heizung des Gartenpools!) in dem Kalenderjahr besser deckt als eine Solaranlage mit der Kennzahl $a = 1{,}364$ (vgl. *Abbildung 2*).

Überprüfen Sie die Aussage rechnerisch.

(3 + 5 + 6 + 6 Punkte)

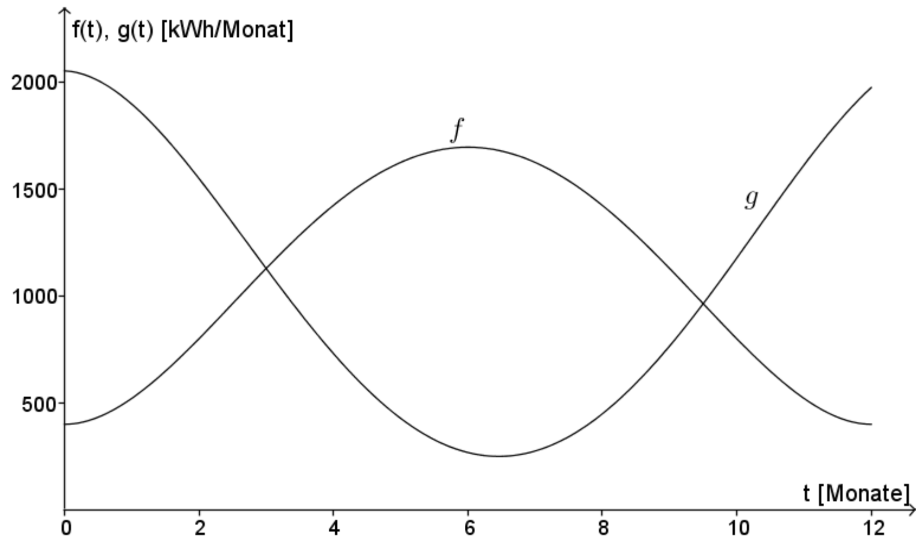


Abbildung 1

Name: ____________________

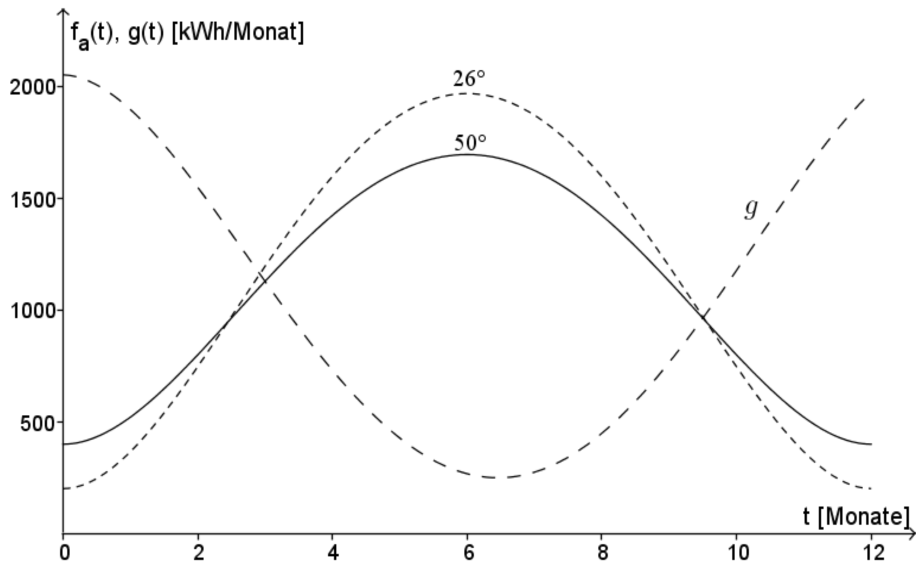


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen sowie Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Zu Beginn des Kalenderjahres ist der Leistungsbedarf maximal, während die Leistung der Solaranlage minimal ist. Bis zur Jahresmitte wächst die Leistung der Solaranlage an, während der Leistungsbedarf der Familie in diesem Zeitraum zurückgeht. In der zweiten Jahreshälfte nimmt der Leistungsbedarf dann wieder zu, während die Leistung der Solaranlage abnimmt. Von Anfang Januar bis etwa Ende März und von Mitte Oktober bis zum Jahresende übersteigt der Leistungsbedarf der Familie die Leistung der Solaranlage. Im Zeitraum von Anfang April bis Mitte Oktober ist die Leistung der Solaranlage dann größer als der Leistungsbedarf der Familie.

(2) Für den Zeitpunkt der maximalen Leistung, der im Intervall [0;12] angenommen wird, kommen nur Nullstellen von f' oder die Randstellen in Frage.

Für die Nullstellen von f' gilt:

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6 \vee t = 12$.

Mit $f(0) = f(12) = 400$ und $f(6) = 1696$ folgt somit, dass die maximale Leistung der Solaranlage nach 6 Monaten erreicht wird. Diese beträgt $1696 \ \frac{\text{kWh}}{\text{Monat}}$.

(3) Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres zu dem Zeitpunkt am stärksten ab, an dem g' minimal und negativ ist. Somit ist der Zeitpunkt des globalen Minimums von g', das im Intervall [0;12] angenommen wird, zu ermitteln. Dafür kommen nur die Nullstellen von g'' oder die Randstellen in Frage.

Es ist $g'(t) = -4t^3 + 78t^2 - 335t - 12{,}5$ und $g''(t) = -12t^2 + 156t - 335$.

Die Gleichung $g''(t) = 0$ hat die Lösungen

$t_1 = \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{43}{3}} \approx 2{,}714$ und $t_2 = \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{43}{3}} \approx 10{,}286$.

Aus den Funktionswerten $g'(0) = -12{,}5$, $g'(12) = 287{,}5$, $g'(t_1) \approx -427{,}1 < 0$ und $g'(t_2) \approx 441{,}1$ folgt, dass t_1 die globale Minimalstelle von g' ist.

Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres somit nach etwa 2,7 Monaten am stärksten ab.

Teilaufgabe b)

(1) $\int_0^{12} g(t)\mathrm{d}t = 12273{,}6$.

Der Energiebedarf beträgt somit etwa 12274 kWh $\approx 12{,}3$ MWh.

(2) Die Leistung der Solaranlage ist genau dann größer als der Leistungsbedarf der Familie, wenn gilt: $f(t) > g(t)$.

$f(t) > g(t) \Leftrightarrow 3{,}5 < t < 9 \;\vee\; t < -2 \;\vee\; t > 14{,}5$.

Die Leistung der Solaranlage ist im Intervall [0;12] somit für alle *t* mit $3 < t < 9{,}5$ größer als der Leistungsbedarf der Familie. Die gesuchte Energie ist daher:

$$\int_3^{9,5} \left(f(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t \approx 6037{,}173.$$

Durch die Solaranlage stehen im Intervall $\left[3;9{,}5\right]$ etwa 6037 kWh Energie für die Heizung des Gartenpools zur Verfügung.

Teilaufgabe c)

(1) Durch Vergleich der Leitkoeffizienten kommt für den Parameter nur $a = 1$ in Frage.

[Nachweis: $f_1(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400 = f(t)$.]

Mit Hilfe der angegebenen Formel ergibt sich für $a = 1$ der Neigungswinkel $w = 116° - 66° \cdot 1 = 50°$.

(2) Es sei $f_a(t_0) = f(t_0)$. Es ist $f_a(t_0) = a \cdot f(t_0) - 400 \cdot (a^2 - 1)$.

Hieraus folgt $a \cdot f(t_0) - 400 \cdot (a^2 - 1) = f(t_0)$.

CAS liefert $a = 1 \vee a = \dfrac{t_0^2 \cdot \left(t_0 - 12\right)^2}{400}$.

[Alternative ohne Angabe der CAS-Lösung:
Eine quadratische Gleichung hat maximal zwei Lösungen, damit folgt die Behauptung.]

(3) Für die in einem Jahr abrufbare Energie E aus der Solaranlage gilt

$$E(a) = \int_0^{12} f_a(t)\mathrm{d}t = -4800a^2 + 13094,4a + 4800.$$

Da der Graph von E eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist die Energie genau dann maximal, wenn $E'(a) = 0$ gilt.

Mit $E'(1,364) = 0$ ist die Behauptung in der Aufgabe nachgewiesen.

(4) Für $a = 1$ gilt für die Maßzahl der Energie, die zur Deckung des Energiebedarfs im Kalenderjahr von der Solaranlage bereitgestellt wird:

$$\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t - \int_3^{9,5} \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t = \frac{3387469}{480} \approx 7057,23\,.$$

Bei einer Kennzahl $a = 1,364$ gilt:

$$f_{1,364}(t) = g(t) \Leftrightarrow t \approx -1,96 \vee t \approx 2,92 \vee t \approx 9,51 \vee t \approx 14,38\,.$$

Die *Abbildung 2* macht deutlich, dass die Leistung der Solaranlage den Leistungsbedarf somit im Intervall $\left]2,92;9,51\right[$ übersteigt.

Für $a = 1,364$ gilt für die Maßzahl der Energie, die zur Deckung des Energiebedarfs im Kalenderjahr von der Solaranlage bereitgestellt wird:

$$\int_0^{12} f_{1,364}(t)\mathrm{d}t - \int_{2,92}^{9,51} \big(f_{1,364}(t) - g(t)\big)\mathrm{d}t \approx 6469,67\,.$$

Bei einem Neigungswinkel von 50° ($a = 1$) deckt die Solaranlage etwa 7,06 MW Energie, bei einem Neigungswinkel von ca. 26° ($a = 1,364$) nur etwa 6,47 MW Energie, die Aussage des Herstellers ist zutreffend.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) vergleicht die Graphen von *f* und *g* im Sachzusammenhang.	5			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage.	5			
3	(2) berechnet den maximalen Wert.	2			
4	(3) ermittelt den Zeitpunkt für die stärkste Abnahme des Leistungsbedarfs.	8			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**20**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Energiebedarf der Familie.	4			
2	(2) ermittelt die zum Heizen des Gartenpools zur Verfügung stehende Energie.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt den Neigungswinkel.	3			
2	(2) zeigt, dass der Neigungswinkel stets einen Einfluss auf die Leistung der Solaranlage hat.	5			
3	(3) weist nach, dass die aus der Solaranlage abrufbare Energie für *a* = 1,364 am größten ist.	6			
4	(4) überprüft rechnerisch die Aussage des Solaranlagen-herstellers.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**20**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

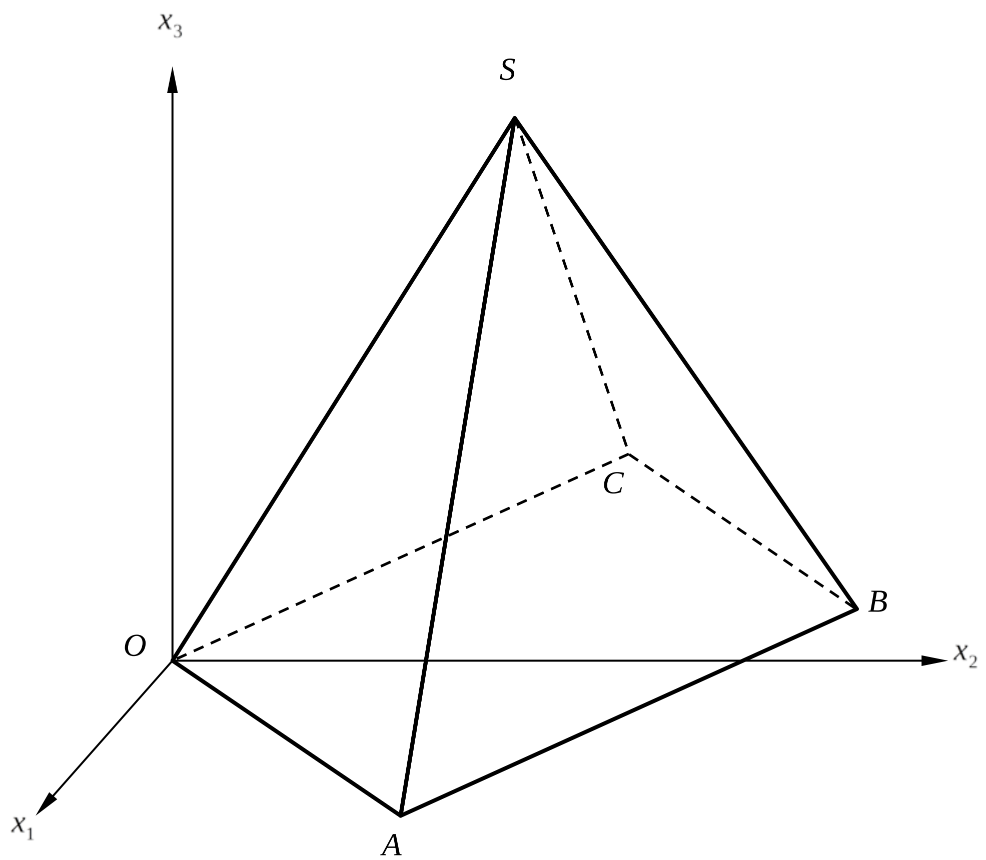
Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(6\,|\,8\,|\,0)$, $B(-2\,|\,14\,|\,0)$, $C(-8\,|\,6\,|\,0)$ und $S(-1\,|\,7\,|\,10)$ Eckpunkte der Pyramide *OABCS*, deren Grundfläche das Viereck *OABC* ist (siehe *Abbildung*).



Abbildung

Name: ____________________

Im Folgenden darf verwendet werden, dass die Seitendreiecke der Pyramide zueinander kongruent sind.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Viereck OABC ein Quadrat ist.*

(2) *Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide OABCS.*

(5 + 5 Punkte)

b) (1) *Leiten Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene E her, die durch die Punkte B, C und $Q(3\,|\,4\,|\,10)$ festgelegt ist.*

Diese Ebene gehört zu der durch $E_a: -4a \cdot x_1 + 3a \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 = 50a,\ a \in \mathbb{R},$ gegebenen Ebenenschar. [Zur Kontrolle: $E = E_5$.]

(2) *Zeigen Sie, dass die Punkte B und C in jeder Ebene E_a liegen.*

(3) *Nennen Sie ohne Nachweis die verschiedenen Arten von Schnittgebilden, die beim Schnitt einer der Ebenen E_a mit der Pyramide OABCS entstehen können.*

(4) Für genau einen Wert von a ist das Schnittgebilde von Ebene und Pyramide ein Dreieck.
Bestimmen Sie den entsprechenden Wert von a.

(5) Die Ebene E zerlegt die Pyramide *OABCS* in zwei Teilkörper. Sie können ohne Nachweis verwenden, dass das Schnittgebilde den Flächeninhalt $\frac{400}{9} \cdot \sqrt{2}$ [FE] besitzt.
Bestimmen Sie ein Verhältnis der Rauminhalte der beiden Teilkörper.

(5 + 3 + 4 + 3 + 8 Punkte)

Name: ____________________

c) Auf der Geraden AS gibt es genau einen Punkt P, so dass die Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{BP}$ senkrecht zu AS sind.

(1) *Bestimmen Sie die Koordinaten von P.*

[Zur Kontrolle: $P = \left(\frac{11}{3} \middle| \frac{23}{3} \middle| \frac{10}{3}\right)$.]

(2) *Begründen Sie, dass der Streckenzug $\overline{OPB}$ ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide (Mantel: Oberfläche ohne Grundfläche) ist, und berechnen Sie die Länge des Streckenzuges.*

(3) Es gibt einen weiteren Streckenzug $\overline{ONB}$ $(N \neq P)$, der ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide ist.

Begründen Sie diese Aussage und bestimmen Sie die Koordinaten von N.

(6 + 5 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Vektorielle Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen
   - Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) (*) Die Punkte O, A, B und C liegen in der x_1x_2-Ebene.

(**) Wegen der Kongruenz der Seitendreiecke gilt $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$.

(***) Wegen $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ besitzt das Viereck bei O einen rechten Winkel.

Aus (*), (**) und (***) folgt, dass das Viereck $OABC$ ein Quadrat ist.

(2) Berechnung der Oberfläche der Pyramide:

Es gilt $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit folgt $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{100} = 10\,[\text{LE}]$.

$M_{\overline{OA}} = (3\,|\,4\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OA}$.

Mit der Kongruenz der Seitendreiecke ergibt sich:

$$F_{\Delta OAS} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SM_{\overline{OA}}}\right| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = 5 \cdot \sqrt{125} = 25 \cdot \sqrt{5}\ [\text{FE}].$$

$$O_{\text{Pyramide}} = G + 4 \cdot F_{\Delta OAS} = 100 + 100 \cdot \sqrt{5} = 323{,}606... \approx 323{,}61\,[\text{FE}].$$

Teilaufgabe b)

(1) Als eine Gleichung der Ebene E in Parameterform ergibt sich:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + u \cdot \overrightarrow{CB} + v \cdot \overrightarrow{QB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix},\ u,v \in \mathbb{R}\text{, bzw.}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E, d. h.

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$. Man erhält das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} 3n_1 + 4n_2 &= 0 \\ -n_1 + 2n_2 - 2n_3 &= 0 \end{aligned} \right| .$$

Mit $n_1 = -4$ erhält man $n_2 = 3$ und $n_3 = 5$.

Es ergibt sich $E: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$ und somit $E: \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0.$

Daraus folgt die Koordinatengleichung

$E: -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 50$.

(2) $-4a \cdot (-2) + 3a \cdot 14 + 25 \cdot 0 = 50a$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ wahr. Also ist $B \in E_a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

$-4a \cdot (-8) + 3a \cdot 6 + 25 \cdot 0 = 50a$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ wahr. Also ist $C \in E_a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(3) Schnittgebilde:

Strecke $\overline{CB}$ [für $a < 0 \vee a > 10$]

Dreieck CBS [für $a = 10$]

gleichschenkliges Trapez [für $0 < a < 10$]

Quadrat $OABC$ [für $a = 0$]

(4) Die Punkte *C* und *B* liegen in allen Ebenen E_a.

$S \in E_a \Leftrightarrow -4a \cdot (-1) + 3a \cdot 7 + 25 \cdot 10 = 50a \Leftrightarrow a = 10$.

Für $a = 10$ ist das Dreieck *BCS* das Schnittgebilde von Ebene und Pyramide.

(5) Die Ebene *E* teilt die Pyramide *OABCS* in eine „kleine“ Pyramide (ebenfalls mit der Spitze *S*) und einen „Restkörper“. Die Höhe der „kleinen“ Pyramide ist der Abstand des Punktes *S* von der Ebene *E*.

Hesse’sche Normalenform von *E*: $\frac{-4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 50}{\sqrt{50}} = 0$.

Die Höhe der kleinen Pyramide beträgt

$h_1 = \left| \frac{-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 10 - 50}{\sqrt{50}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$ [LE] , ihr Volumen

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{400 \cdot \sqrt{2}}{9} \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{400 \cdot \sqrt{2}}{9} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2000}{27}$ [VE].

Das Volumen *V* der Pyramide *OABCS* beträgt:

$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 = \frac{9000}{27}$ [VE]. Somit gilt für das Volumen V_2 des Restkörpers:

$V_2 = V - V_1 = \frac{7000}{27}$ [VE].

Ein gesuchtes Verhältnis ist $V_1 : V_2 = 2 : 7$.

[Auch der Kehrwert ist möglich.]

Teilaufgabe c)

(1) Gleichung der Geraden durch A und S: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-7\\-1\\10\end{pmatrix}$ $(r\in\mathbb{R})$.

Da P auf g liegt, gilt $P=(6-7r\,|\,8-r\,|\,10r)$.

$\overline{OP}$ ist orthogonal zu AS, also orthogonal zum Richtungsvektor $\overrightarrow{a_g}$ von g, also gilt

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{a_g}=0$. $\begin{pmatrix}6-7r\\8-r\\10r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-1\\10\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow -42+49r-8+r+100r=0\Leftrightarrow r=\dfrac{1}{3}$.

Da man nur eine mögliche Lösung erhält, ist $P=\left(\frac{11}{3}\middle|\frac{23}{3}\middle|\frac{10}{3}\right)$ der gesuchte Punkt.

(2) Der Punkt P liegt auf $\overline{AS}$, da beispielsweise $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AS}$ gilt.

Wenn man über die Kante $\overline{AS}$ geht, ist der kürzeste Weg von O zur Geraden g das Lot von O auf g. Entsprechendes gilt für den kürzesten Weg von B zur Geraden g. Da P nach c (1) Fußpunkt des Lotes von O auf g und Fußpunkt des Lotes von B auf g ist, ist der Streckenzug $\overline{OPB}$ der kürzeste Weg von A nach C über die Dreiecksflächen OAS und ABS der Pyramide. Da die Ebene H, die durch O, B und S bestimmt ist, eine Symmetrieebene der Pyramide ist, gibt es keinen kürzeren Weg über die Dreiecksflächen OCS und CBS.

Länge des kürzesten Weges: $l=\left|\overrightarrow{OP}\right|+\left|\overrightarrow{BP}\right|=\dfrac{10}{3}\cdot\sqrt{30}=18{,}257...\approx 18{,}26\,[\mathrm{LE}]$.

(3) Da die Ebene H (siehe c (2)) eine Symmetrieebene der Pyramide ist, ist ein zu $\overline{OPB}$ entsprechender Streckenzug $\overline{ONB}$ „über“ die Kante $\overline{CS}$ ebenso lang wie der Streckenzug $\overline{OPB}$ und damit auch ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide. Die Ebene H ist orthogonal zur x_1x_2-Ebene. Also liegt der Punkt $N(t_1 \mid t_2 \mid t_3)$ in „gleicher Höhe über der Grundfläche“ wie der Punkt P. Deswegen ist N auch der Schnittpunkt der Geraden durch C und S mit der Ebene mit der Gleichung $x_3 = \frac{10}{3}$.

Gleichung der Geraden durch C und S: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Schnittpunktberechnung von h und der Ebene mit der Gleichung $x_3 = \frac{10}{3}$:

$\frac{10}{3} = 10 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ und damit $N\left(-\frac{17}{3} \middle| \frac{19}{3} \middle| \frac{10}{3}\right)$.

[Alternative:

Aufgrund der Symmetrie zur Ebene H und wegen $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$ erhält man

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ \frac{19}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}.]$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das Viereck *OABC* ein Quadrat ist.	5			
2	(2) berechnet die Oberfläche der Pyramide *OABCS*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) leitet eine Parametergleichung der Ebene E her.	2			
2	(1) leitet eine Koordinatengleichung der Ebene E her.	3			
3	(2) zeigt, dass die Punkte B und C in jeder Ebene E_a liegen.	3			
4	(3) nennt ohne Nachweis die verschiedenen Arten von Schnittgebilden, die beim Schnitt einer der Ebenen E_a mit der Pyramide *OABCS* entstehen können.	4			
5	(4) bestimmt den entsprechenden Wert von a.	3			
6	(5) bestimmt die Höhe der „Teilpyramide“.	3			
7	(5) bestimmt ein Verhältnis der Rauminhalte der beiden Teilkörper.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (23) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**23**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Koordinaten von P.	6			
2	(2) begründet, dass der Streckenzug $\overline{OPB}$ ein kürzester Weg von A nach C über den Mantel der Pyramide ist.	3			
3	(2) berechnet die Länge des Streckenzuges.	2			
4	(3) begründet, dass es einen weiteren Streckenzug als kürzesten Weg von O nach B gibt.	4			
5	(3) bestimmt die Koordinaten von N.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 60
mangelhaft plus	3	59 – 50
mangelhaft	2	49 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Im Folgenden betrachten wir die Entwicklung von Wolfspopulationen. Dabei beschränken wir uns **ausschließlich** auf die **weiblichen** Mitglieder einer Population, die aus Welpen (w), jungen Fähen (j) sowie ausgewachsenen Fähen (a) bestehen soll. Alle Fähen sind vermehrungsfähig. Die Welpen entwickeln sich ein Jahr nach der Geburt zu jungen Fähen und ein Jahr später zu ausgewachsenen Fähen.

Die folgende *Tabelle* zeigt die Verteilung einer in der Wildnis lebenden Population für die Jahre 2013 und 2014:

	2013	2014
w	65	52
j	8	26
a	20	16

Tabelle

Modellhaft lässt sich die Entwicklung mit der Matrix A beschreiben:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von:} \; w \quad j \quad a \\ \text{nach:} & & \\ \begin{matrix} w \\ j \\ a \end{matrix} & A = & \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) (1) *Begründen Sie mit den Daten aus der Tabelle, dass* $b = 0{,}4$ *gilt.*

(2) *Interpretieren Sie die weiteren von Null verschiedenen Einträge in der Matrix A im Sachzusammenhang.*

(3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Berechnen Sie die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2015 zu erwarten ist.*

(2) *Bestimmen Sie die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2012 vorgelegen hätte.*

(3) Ein Biologe behauptet, dass weniger als 15 % aller Welpen mindestens ein Alter von drei Jahren erreichen.

Prüfen Sie, ob nach der obigen Modellierung mit der Matrix A die Behauptung des Biologen zutrifft.

(3 + 5 + 4 Punkte)

c) Wölfe, die in einem Tierpark leben, haben andere Überlebens- und Fortpflanzungsraten. Für einen Tierpark kann die Entwicklung seiner Wolfspopulation durch die folgende Matrix B modelliert werden:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad c > 0, d > 0.$$

(1) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Einträge in der dritten Zeile der Matrix B im Vergleich zu den Einträgen in der dritten Zeile der Matrix A.*

(2) Wegen der räumlichen Beschränkung will die Tierparkleitung die Gesamtzahl der Wölfe konstant halten. Das soll durch eine strikte Geburtenkontrolle gewährleistet werden.

Zeigen Sie, dass nur für $d = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot c$ *eine von* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschiedene stationäre Verteilung existiert, d. h. eine Verteilung, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.*

(3) *Ermitteln Sie für* $d = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot c$ *die kleinstmögliche Gesamtpopulation mit stationärer Verteilung* $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit natürlichen Zahlen* n_1, n_2 *und* n_3.

(2 + 7 + 4 Punkte)

Name: ____________________

d) Für die Population in dem obigen Tierpark wird eine neue Modellierung gewählt: Die Entwicklungsstufe der Welpen wird mit der Überlebensrate von 80 % beibehalten, die Entwicklungsstufen der jungen Fähen und ausgewachsenen Fähen werden zu einer Stufe zusammengefasst. Die neue Modellierung soll durch die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix}$$

mit $g > 0$ und $0 \leq h < 1$ dargestellt werden. Die Population der Welpen und Fähen soll mit insgesamt 19 Tieren konstant bleiben.

(1) *Zeigen Sie, dass in dem neuen Modell eine stationäre Verteilung mit mehr als 10 Welpen nicht vorkommen kann.*

(2) *Ermitteln Sie die Einträge g und h in der Matrix C so, dass sich eine stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen ergibt.*

(3) Mit den Werten aus (2) ist $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0{,}8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$. Ein Taschenrechner liefert z. B.

$$C^{17} = \begin{pmatrix} 0{,}2222222218 & 0{,}2777777779 \\ 0{,}6222222226 & 0{,}7777777777 \end{pmatrix}.$$

Die Potenzen C^n der Matrix C streben mit wachsendem n gegen eine Matrix G.

Ermitteln Sie die exakten Werte der Einträge von G aus den Ansätzen
$G \cdot C = G$ *und* $G \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(8 + 3 + 7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Matrizenrechnung
   - Übergangsmatrizen
   - Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
   - Fixvektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Von 65 Welpen im Jahr 2013 entwickeln sich im folgenden Jahr 26 zu jungen Fähen, also ist $b = 0,4$.

(2) Von den jungen Fähen erreichen 50 % das dritte Lebensjahr und von den ausgewachsenen Fähen erreichen 60 % das nächste Lebensjahr. Eine junge Fähe bringt im Durchschnitt 1,5 Welpen zur Welt und eine ausgewachsene Fähe durchschnittlich zwei Welpen.

Teilaufgabe b)

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 26 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 20{,}8 \\ 22{,}6 \end{pmatrix}$.

Im Jahr 2015 sind 71 Welpen, 21 junge Fähen und 23 ausgewachsene Fähen zu erwarten.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 1{,}5\cdot j + 2\cdot a & = & 65 \\ 0{,}4\cdot w & = & 8 \\ 0{,}5\cdot j + 0{,}6\cdot a & = & 20 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 0{,}2\cdot a & = & 5 \\ 0{,}4\cdot w & = & 8 \\ 0{,}5\cdot j + 0{,}6\cdot a & = & 20 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} w & = & 20 \\ j & = & 10 \\ a & = & 25 \end{matrix} \right|$.

Für das Jahr 2012 hätte sich eine Verteilung von 20 Welpen, 10 jungen und 25 ausgewachsenen Fähen ergeben.

(3) Der Anteil q der Welpen, die älter als drei Jahre werden, beträgt $q = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 = 12\,\% < 15\,\%$. Damit ergibt sich die Behauptung des Biologen aus der Modellierung.

Teilaufgabe c)

(1) Die Überlebensraten für die jungen Fähen steigen von 0,5 auf 0,75 und für die ausgewachsenen Fähen von 0,6 auf 0,7.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} c \cdot j + d \cdot a & = & w \\ 0{,}8 \cdot w & = & j \\ 0{,}75 \cdot j + 0{,}7 \cdot a & = & a \end{array} \right|.$

Mit Hilfe des CAS ergeben sich die Lösungen:

1. c, d beliebig und $w = j = a = 0$.

2. $d = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot c$ und a beliebig, $j = 0{,}4 \cdot a, w = 0{,}5 \cdot a$, $a \neq 0$.

Nur für $d = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot c$ gibt es die vom Nullvektor verschiedene Lösung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot a \\ 0{,}4 \cdot a \\ a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

(3) Die kleinstmögliche Population ergibt sich aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit 19 Tieren.

Teilaufgabe d)

(1) Es ist $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ 19 - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 19 - w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} g \cdot (19 - w) & = & w \\ 0{,}8 \cdot w + h \cdot (19 - w) & = & 19 - w \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} g & = & \dfrac{w}{19 - w} \\ h & = & \dfrac{19 - 1{,}8 \cdot w}{19 - w} \end{array} \right|.$

(Für $w = 19$ folgt der Widerspruch $w = 0$. Also kann bei der Auflösung $w \neq 19$ vorausgesetzt werden.)

Die Bedingung $g > 0$ erfordert zunächst $w < 19$. (Das ergibt sich auch aus dem Sachzusammenhang.)

Die Bedingung $0 \leq h < 1$ erfordert $0 < w < 11$. Nur für $w < 11$ ist die Überlebensrate h der Fähen positiv.

(2) Einsetzen von $w = 5$ in die Lösungen des obigen Gleichungssystems ergibt $g = \frac{5}{14}$ und $h = \frac{5}{7}$. Unabhängig davon lassen sich g und h aus $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$ bestimmen.

(3) $\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0{,}8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot y & \frac{5}{14} \cdot x + \frac{5}{7} \cdot y \\ 0{,}8 \cdot z & \frac{5}{14} \cdot u + \frac{5}{7} \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcl} x & = & 0{,}8 \cdot y \\ y & = & \frac{5}{14} \cdot x + \frac{5}{7} \cdot y \\ u & = & 0{,}8 \cdot z \\ z & = & \frac{5}{14} \cdot u + \frac{5}{7} \cdot z \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcl} x & = & 0{,}8 \cdot y \\ u & = & 0{,}8 \cdot z \end{array} \right|.$$

Weiterhin ist $\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcl} 5 \cdot x + 14 \cdot y & = & 5 \\ 5 \cdot u + 14 \cdot z & = & 14 \end{array} \right|$ und somit, wegen $x = 0{,}8 \cdot y$ bzw. $u = 0{,}8 \cdot z$, $y = \frac{5}{18}$ bzw. $z = \frac{7}{9}$. Insgesamt erhalten wir als Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{28}{45} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	(1) begründet mit den Daten aus der Tabelle, dass $b = 0{,}4$ gilt.	3			
2	(2) interpretiert die weiteren von Null verschiedenen Einträge in der Matrix A im Sachzusammenhang.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) berechnet die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2015 zu erwarten ist.	3			
2	(2) bestimmt die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2012 vorgelegen hätte.	5			
3	(3) prüft, ob nach der Modellierung durch die Matrix A die Behauptung des Biologen zutrifft.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt im Sachzusammenhang die Einträge in der dritten Zeile der Matrix *B* im Vergleich zu den Einträgen in der dritten Zeile der Matrix *A*.	2			
2	(2) zeigt, dass nur für $d = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot c$ eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung existiert.	7			
3	(3) ermittelt für $d = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot c$ die kleinstmögliche Gesamtpopulation mit stationärer Verteilung $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit natürlichen Zahlen n_1, n_2 und n_3.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass in dem neuen Modell eine stationäre Verteilung mit mehr als 10 Welpen nicht vorkommen kann.	8			
2	(2) ermittelt die Einträge *g* und *h* in der Matrix *C* so, dass sich eine stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen ergibt.	3			
3	(3) ermittelt die exakten Werte der Einträge in der Matrix *G*.	7			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 60
mangelhaft plus	3	59 – 50
mangelhaft	2	49 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Eine Firma stellt mit zwei verschiedenen Maschinen *A* und *B* Bodenfliesen aus Keramik her. Damit eine Fliese als „1. Wahl" gilt, muss sie strenge Qualitätsnormen erfüllen. Alle anderen Fliesen werden als „2. Wahl" bezeichnet. Eine Fliese, die mit Maschine *A* produziert wurde, ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 „1. Wahl" (d. h. mit der Wahrscheinlichkeit von 0,1 „2. Wahl"). Maschine *B* produziert lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 „1. Wahl"-Fliesen. Dabei kann für beide Maschinen davon ausgegangen werden, dass die Produktion von Fliesen 1. und 2. Wahl jeweils stochastisch unabhängig erfolgt. Fliesen, die von Maschine *A* produziert wurden, werden im Folgenden als *A*-Fliesen bezeichnet, Fliesen von Maschine *B* als *B*-Fliesen. Jede Packung enthält 20 Fliesen, die von derselben Maschine stammen.

a) (1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung A-Fliesen genau zwei „2. Wahl"-Fliesen enthalten sind.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung A-Fliesen maximal 80 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl" haben.*

Die 20 Fliesen einer Packung *B*-Fliesen wurden in 4 Reihen mit jeweils 5 Fliesen verlegt.

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit* $\tilde{p}$ *dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.* [Kontrollergebnis $\tilde{p} = 0{,}32768$]

(4) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.*

(2 + 3 + 2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) An Großabnehmer verkauft die Firma auch Paletten, die jeweils 500 Packungen Fliesen von derselben Maschine enthalten. Ein Bauunternehmer bestellt eine Palette mit *A*-Fliesen. Da die Packungen bei der Lieferung nicht gekennzeichnet sind, befürchtet er, versehentlich eine Palette mit *B*-Fliesen erhalten zu haben.

Er beschließt, für einen Test der Lieferung zufällig 100 Fliesen zu entnehmen und die Anzahl X der „2. Wahl“-Fliesen in dieser Stichprobe zu bestimmen.

(1) *Begründen Sie, dass X als binomialverteilte Zufallsgröße aufgefasst werden kann, wobei die Trefferwahrscheinlichkeit bei A-Fliesen p = 0,1 und bei B-Fliesen p = 0,2 beträgt.*

(2) Es wird ein Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}2$ durchgeführt. Wird H_0 verworfen, wird die Palette angenommen, sonst wird sie zurückgeschickt.

Erklären Sie die Wahl der Nullhypothese.

(3) *Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel (auf Basis der genannten Nullhypothese) für die oben genannte Stichprobe von 100 Fliesen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (d. h. Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art) von höchstens 5 %.*
[Zur Kontrolle: H_0 wird für $X \leq 13$ abgelehnt.]

(4) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit* p_A*, dass die Hypothese* H_0 *aufgrund der Entscheidungsregel aus (3) irrtümlich nicht abgelehnt wird, obwohl die Palette tatsächlich A-Fliesen enthält, also p = 0,1 gilt.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_B*, dass die Hypothese* H_0 *irrtümlich abgelehnt wird, obwohl die Palette tatsächlich B-Fliesen enthält, also p = 0,2 gilt.*
[Zur Kontrolle: $p_A \approx 0{,}1239$, $p_B \approx 0{,}0469$]

(5) Im Lager des Herstellers befanden sich 7 Paletten mit *A*-Fliesen und 3 Paletten mit *B*-Fliesen, aus denen die angelieferte Palette zufällig ausgewählt wurde.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten p_A *und* p_B *die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit für den Test.*

(3 + 4 + 5 + 6 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) Für besonders anspruchsvolle Kunden soll eine Sorte „Premium“ angeboten werden, die nur aus „1. Wahl“-Fliesen besteht.
Dazu will die Firma die „2. Wahl“-Fliesen aus der **Produktion der Maschine A** aussortieren. Für einen ersten Sortiervorgang wird ein Testgerät verwendet, das allerdings nicht immer optimal funktioniert:
Das Testgerät erkennt eine „2. Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von $w = 0,8$ („Aussortierwahrscheinlichkeit“) und sortiert sie aus. Andererseits wird eine „1. Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 zu Unrecht als „2. Wahl“ aussortiert.

(1) *Stellen Sie die Situation graphisch dar (mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten).*
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl“ einstuft (also nicht aussortiert).

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit eine „2. Wahl“-Fliese ist.

(3) Bestimmen Sie, wie groß die „Aussortierwahrscheinlichkeit“ w des Testgeräts mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit aus (2) (und damit der erwartete Anteil der „2. Wahl“-Fliesen nach dem Aussortieren) durch die Prüfung auf unter 1 % gesenkt wird.

(7 + 4 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \; = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000										
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000										
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilungen für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B\left(n;p;0\right) + \ldots + B\left(n;p;k\right) \;=\; \binom{n}{0} p^0 \left(1-p\right)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

							p							
n	*k*	0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		*n*
	0	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,0371	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,1183	0,0258	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,2578	0,0744	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,4360	0,1632	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,6160	0,2914	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,7660	0,4443	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,8720	0,5988	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9369	0,7340	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9	0,9718	0,8380	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10	0,9885	0,9092	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11	0,9957	0,9531	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12	0,9985	0,9776	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13	0,9995	0,9901	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14	0,9999	0,9959	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15		0,9984	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16		0,9994	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	83	
	17		0,9998	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	82	
	18		0,9999	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	81	
	19			0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	80	
	20			0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	79	
	21			0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	77	
	23				0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	76	
	24				0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	75	
	25				0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	74	
	26				0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	73	
	27				0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	72	
	28				0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	71	
	29				0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	70	
100	30					0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	69	100
	31					0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	68	
	32						0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	67	
	33						0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	66	
	34						0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	65	
	35						0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	64	
	36						0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	63	
	37							0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	62	
	38							0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	61	
	39							0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	60	
	40							0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	59	
	41							0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	58	
	42							0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	57	
	43								0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	56	
	44								0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	55	
	45									0,9995	0,9943	0,8689	54	
	46									0,9997	0,9969	0,9070	53	
	47									0,9999	0,9983	0,9362	52	
	48									0,9999	0,9991	0,9577	51	
	49										0,9996	0,9729	50	
	50										0,9998	0,9832	49	
	51										0,9999	0,9900	48	
	52											0,9942	47	
	53											0,9968	46	
	54			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9983	45	
	55											0,9991	44	
	56											0,9996	43	
	57											0,9998	42	
	58											0,9999	41	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	*k*	*n*
							p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0{,}5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Man betrachtet die Zufallsgröße *X*: Anzahl der „2. Wahl"-Fliesen in einer Packung *A*-Fliesen. *X* ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$ und dem Stichprobenumfang $n = 20$.

(1) $P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} \approx 0{,}2852 = 28{,}52\,\%$

(2) Sind maximal 80 % der Fliesen „1. Wahl", so müssen mindestens 4 Fliesen „2. Wahl" sein.
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0{,}133$

(3) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Reihe mit *B*-Fliesen nur „1. Wahl"-Fliesen befinden, beträgt $\tilde{p} = 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

(4) Man betrachtet die Zufallsgröße *Y*: „Anzahl der Reihen, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthalten". *Y* ist binomialverteilt mit dem Stichprobenumfang $n = 4$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $\tilde{p} = 0{,}8^5$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt dann
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - \tilde{p})^4 = 1 - (1 - 0{,}8^5)^4 \approx 0{,}7957 = 79{,}57\,\%$.

Teilaufgabe b)

(1) Da alle Fliesen auf der Palette von derselben Maschine produziert wurden, enthält diese entweder ausschließlich *A*-Fliesen oder ausschließlich *B*-Fliesen.
Jede Fliese ist demnach mit derselben Wahrscheinlichkeit „2. Wahl“, nämlich entweder mit $p = 0{,}1$ (*A*-Fliese) oder $p = 0{,}2$ (*B*-Fliese).
Die Qualität jeder Fliese ist stochastisch unabhängig von der der anderen Fliesen; denn die laufende Produktion der beiden Maschinen erzeugt stochastisch unabhängig Fliesen „1. Wahl“ oder „2. Wahl“.

(2) Es soll ausgeschlossen werden, irrtümlich eine Palette mit *B*-Fliesen anzunehmen. Daher wird man die H_1-Hypothese $H_1 : p < 0{,}2$ und somit die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}2$ wählen. Die Wahl der Hypothese H_0 deutet darauf hin, dass man jede Kiste als tatsächlich von Maschine A stammend akzeptieren möchte, bei der der Anteil von „2. Wahl“-Fliesen signifikant unter 20 % liegt.

(3) *X* ist nach (1) binomialverteilt mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p, wobei $p \in \{0{,}1; 0{,}2\}$ gilt.
Aufgrund der Aufgabenstellung und der Hypothesenwahl soll für die kritische Grenze k die Aussage $P_p\left(X \leq k\right) \leq 0{,}05$ für alle $p \geq 0{,}2$ gelten. Für $p = 0{,}2$ erhält man $k = 13$.

[Hinweis für Lehrkräfte: Die zugehörige Operationscharakteristik ist monoton fallend.]

Man erhält somit als Entscheidungsregel: H_0 wird abgelehnt, wenn $X \leq 13$ ist.

[Alternative: Nimmt man die Gültigkeit der Hypothese H_0 mit $p = 0{,}2$ an, so ist *X* binomialverteilt mit *n* = 100, *p* = 0,2. Bei Gültigkeit von H_0 ist $\mu = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$.
Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und wegen der σ-Regel $0{,}95 \approx P(X > \mu - 1{,}64\sigma)$ und $\mu - 1{,}64\sigma = 20 - 1{,}64 \cdot 4 = 13{,}44$ erhält man die zuvor genannte Entscheidungsregel.]

(4) Es gilt $p_A = P_{p=0{,}1}(X > 13) = 1 - P_{p=0{,}1}(X \leq 13) = 1 - 0{,}8761 \approx 0{,}1239$
und $p_B = P_{p=0{,}2}(X \leq 13) \approx 0{,}0469$.

(5) Es ist $P(Irrtum) = 0{,}7 \cdot p_A + 0{,}3 \cdot p_B \approx 0{,}1008$.

Teilaufgabe c)

Definiere folgende Ereignisse:

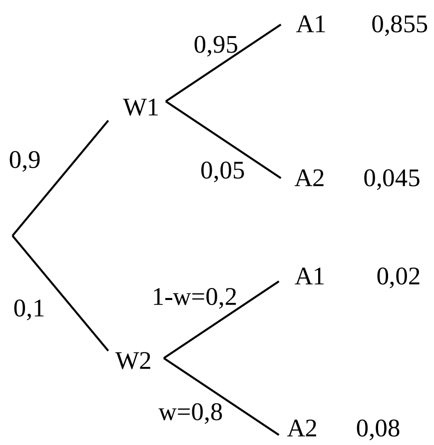
W1: Die Fliese ist „1. Wahl“.

W2: Die Fliese ist „2. Wahl“.

A1: Die Fliese wird als „1. Wahl“ angezeigt.

A2: Die Fliese wird als „2. Wahl“ angezeigt.

(1)



Alternative:

	A1	A2	Summe
W1	0,855	0,045	0,9
W2	0,02	0,08	0,1
Summe	0,875	0,125	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt: $P_1 = P(A1) = 0,855 + 0,02 = 0,875$.

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P_{A1}(W2) = \frac{P(A1 \cap W2)}{P(A1)} = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,0229 = 2,29\ \%.$$

(3) Mit allgemeinem *w* bestimmt man die Wahrscheinlichkeit aus (2) so:

$$P_{A1}(W2) = \frac{P(A1 \cap W2)}{P(A1)} = \frac{(1-w)\cdot 0{,}1}{(1-w)\cdot 0{,}1 + 0{,}855}.$$

Um diese unter 1 % = 0,01 zu senken, bestimmt man *w* mit folgendem Ansatz:

$$\frac{(1-w)\cdot 0{,}1}{(1-w)\cdot 0{,}1 + 0{,}855} < 0{,}01 \Leftrightarrow (1-w)\cdot 0{,}1 < 0{,}01\cdot\big((1-w)\cdot 0{,}1 + 0{,}855\big)$$

$$\Leftrightarrow (1-w)\cdot 0{,}1 < 0{,}001\cdot(1-w) + 0{,}00855$$

$$\Leftrightarrow 0{,}099\cdot(1-w) < 0{,}00855$$

$$\Leftrightarrow 1-w < \frac{0{,}00855}{0{,}099}$$

$$\Leftrightarrow w > 1 - \frac{0{,}00855}{0{,}099} = \frac{201}{220}.$$

Die in der Aufgabenstellung genannte Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Wahrscheinlichkeit *w* größer als $\frac{201}{220} \approx 0{,}9136$ ist.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung *A*-Fliesen genau zwei „2. Wahl“-Fliesen enthalten sind.	2			
2	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung *A*-Fliesen maximal 80 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl“ haben.	3			
3	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1. Wahl“-Fliesen enthält.	2			
4	(4) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl“-Fliesen enthält.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass X als binomialverteilte Zufallsgröße mit $p = 0{,}1$ oder $p = 0{,}2$ aufgefasst werden kann.	3			
2	(2) erklärt die Wahl der Nullhypothese.	4			
3	(3) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
4	(4) berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	6			
5	(5) bestimmt die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit für den Test.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (22) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**22**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die Situation mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten graphisch dar.	5			
2	(1) gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit an.	2			
3	(2) bestimmt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	4			
4	(3) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit *w*.	3			
5	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit *w*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 60
mangelhaft plus	3	59 – 50
mangelhaft	2	49 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0