Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

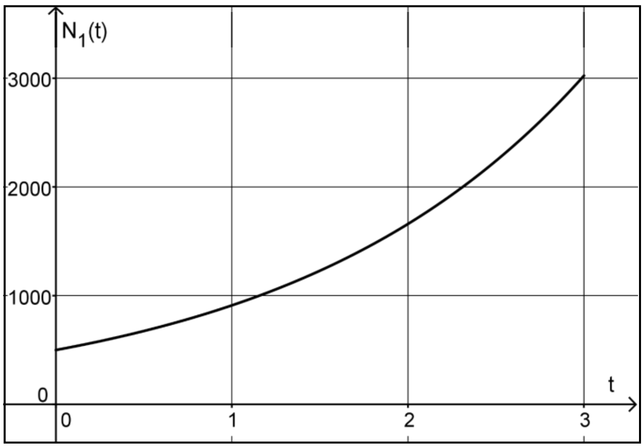
Aufgabenstellung

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment insgesamt sechs Tage lang die Vermehrung von Pantoffeltierchen in einer Nährlösung. Zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage verwendet er für $0 \le t \le 3$ die Funktion N_1 mit der Gleichung

$$N_1(t) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird *t* als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und $N_1(t)$ als Anzahl der Pantoffeltierchen zum Zeitpunkt *t* aufgefasst.

Der Graph von N_1 ist in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) (1) *Berechnen Sie den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.*

Name: ____________________

(3) *Berechnen Sie, um wie viele Tiere pro Tag die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung während der ersten drei Tage durchschnittlich wächst.*

(4) *Begründen Sie, warum eine Funktion mit dem Funktionsterm $500 \cdot e^{0,6 \cdot t}$ nur für einen begrenzten Zeitraum zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen geeignet ist.*

(3 + 4 + 3 + 4 Punkte)

Während der ersten drei Tage (für $0 \leq t \leq 3$) wird im Modell des Schülers die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen durch die Funktion r_1 mit der Gleichung

$$r_1(t) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R},$$

beschrieben.

Dabei wird $r_1(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

b) Für die Funktion r_1 und die zugehörige Ableitungsfunktion r_1' gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage:

$$r_1(t) > 0 \text{ und } r_1'(t) > 0.$$

[Die Gültigkeit dieser Aussage müssen Sie nicht nachweisen.]

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.

(6 Punkte)

c) Bei der weiteren Beobachtung erkennt der Schüler, dass nach etwa drei Tagen die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen geringer wird. Zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung (also für $3 \leq t \leq 6$) verwendet der Schüler die Funktion r_2 mit der Gleichung

$$r_2(t) = 300 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird $r_2(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

Name: ____________________

(1) *Zeigen Sie, dass für die Funktionen* r_1 *und* r_2 *für alle* $a \in \mathbb{R}$ *die Gleichung* $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ *gilt.*

(2) *Interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung* $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ *für* $0 \le a \le 3$ *im Sachzusammenhang.*

(3) *Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung* $F(x) = -\frac{5}{3} \cdot e^{3,6-0,6 \cdot x}$ *eine Stammfunktion der Funktion f mit der Gleichung* $f(x) = e^{3,6-0,6 \cdot x}$ *ist.*

(4) *Bestimmen Sie, wie viele Pantoffeltierchen in der Nährlösung im Laufe des vierten Tages (d. h. im Intervall [3;4]) hinzukommen, wenn die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen für* $3 \le t \le 6$ *durch die Funktion* r_2 *beschrieben wird.*

(5) *Ermitteln Sie ausgehend von den Funktionen* N_1 *und* r_2 *eine Gleichung der Funktion* N_2*, durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung beschrieben werden kann.*

[Zur Kontrolle: $N_2(t) = 1000 \cdot e^{1,8} - 500 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot t}$]

(6) Der Schüler verwendet die Funktion N_2 auch zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen für $t \ge 6$.

Begründen Sie, dass in diesem Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.

(5 + 4 + 4 + 6 + 7 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $N_1(3) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot 3} \approx 3025$.

Im gegebenen Modell sind drei Tage nach Beobachtungsbeginn ungefähr 3025 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden.

(2) $N_1(t) = 2000 \Leftrightarrow 500 \cdot e^{0,6 \cdot t} = 2000 \Leftrightarrow e^{0,6 \cdot t} = 4 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(4)}{0,6} \approx 2,31$.

Nach dem Modell sind ungefähr 2,31 Tage nach Beobachtungsbeginn 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung enthalten.

(3) $\frac{N_1(3) - N_1(0)}{3-0} \approx \frac{3025-500}{3} \approx 842$.

Die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung wächst nach dem Modell während der ersten drei Tage durchschnittlich um ungefähr 842 Tierchen pro Tag.

(4) Die Funktionswerte der Funktion mit dem Funktionsterm $500 \cdot e^{0,6 \cdot t}$ wachsen mit größer werdendem *t* unbeschränkt. Da in einer Nährlösung nur ein beschränktes Platzangebot besteht, ist eine Funktion mit diesem Funktionsterm nur für einen begrenzten Zeitraum zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen geeignet.

Teilaufgabe b)

Da für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage $r_1(t) > 0$ gilt, ist die Änderungsrate von N_1 immer positiv. Im Modell des Schülers nimmt daher die Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage ständig zu.

Da zusätzlich für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage $r_1'(t) > 0$ gilt, ist auch die Änderungsrate von r_1 immer positiv. Die Anzahl der Pantoffeltierchen wächst daher im Modell des Schülers immer schneller.

Teilaufgabe c)

(1) $r_2(3+a) = 300 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot(3+a)} = 300 \cdot e^{3{,}6-1{,}8-0{,}6\cdot a} = 300 \cdot e^{1{,}8-0{,}6\cdot a}$.

$r_1(3-a) = 300 \cdot e^{0{,}6\cdot(3-a)} = 300 \cdot e^{1{,}8-0{,}6\cdot a}$.

Somit gilt: $r_2(3+a) = r_1(3-a)$.

(2) Im Sachzusammenhang bedeutet die Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$, dass die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung im gleichen zeitlichen Abstand vor und nach dem Zeitpunkt „drei Tage nach Beobachtungsbeginn“ jeweils gleich schnell wächst.

(3) Mit der Kettenregel gilt:

$$F'(x) = \left(-\frac{5}{3} \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot x}\right)' = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot x} = e^{3{,}6-0{,}6\cdot x} = f(x).$$

Wegen $F'(x) = f(x)$ handelt es sich bei F um eine Stammfunktion von f.

(4) Mit Hilfe von c) (3) erhält man:

$$\int_3^4 r_2(t)\,\mathrm{d}t = \left[300 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t}\right]_3^4 = -500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot 4} - \left(-500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot 3}\right) \approx 1365.$$

Im Laufe des vierten Tages kommen in der Nährlösung ungefähr 1365 Pantoffeltierchen hinzu.

(5) $N_2(t) = N_1(3) + \int_3^t r_2(u)\,\mathrm{d}u = 500 \cdot e^{0{,}6\cdot 3} + \left[300 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot u}\right]_3^t$

$= 500 \cdot e^{1{,}8} - 500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t} + 500 \cdot e^{1{,}8} = 1000 \cdot e^{1{,}8} - 500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t}$.

[Alternative:

N_2 ist eine Stammfunktion von r_2, d. h.

$$N_2(t) = 300 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t} + c = -500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t} + c.$$

Aus $N_2(3) = N_1(3)$ ergibt sich $-500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot 3} + c = 500 \cdot e^{0{,}6\cdot 3}$. Also ist $c = 1000 \cdot e^{1{,}8}$.

Damit gilt: $N_2(t) = -500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t} + 1000 \cdot e^{1{,}8}$.]

(6) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t} > 0$. Daraus folgt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$N_2(t) = 1000 \cdot e^{1{,}8} - 500 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot t} < 1000 \cdot e^{1{,}8} \approx 6049{,}6 < 6050$.

Bei einer Modellierung mit N_2 wird somit die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung nie größer als 6050.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) bestimmt rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.	4			
3	(3) berechnet, um wie viele Tiere pro Tag die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung während der ersten drei Tage durchschnittlich wächst.	3			
4	(4) begründet, warum eine Funktion mit dem Funktionsterm $500 \cdot e^{0,6 \cdot t}$ nur für einen begrenzten Zeitraum zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen geeignet ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	interpretiert die Bedeutung der Aussage $r_1(t) > 0$ und $r_1'(t) > 0$ im Sachzusammenhang.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass für die Funktionen r_1 und r_2 für alle $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ gilt.	5			
2	(2) interpretiert die Bedeutung der Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ für $0 \le a \le 3$ im Sachzusammenhang.	4			
3	(3) zeigt, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = -\frac{5}{3} \cdot e^{3,6-0,6 \cdot x}$ eine Stammfunktion der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^{3,6-0,6 \cdot x}$ ist.	4			
4	(4) bestimmt, wie viele Pantoffeltierchen in der Nährlösung in diesem Modell im Laufe des vierten Tages hinzukommen.	6			
5	(5) ermittelt ausgehend von den Funktionen N_1 und r_2 eine Gleichung der Funktion N_2, durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag beschrieben werden kann.	7			
6	(6) begründet, dass im Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (30) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**30**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Eine Familie will ihren Bedarf an Wärmeenergie (thermischer Energie) für Heizung und Warmwasser teilweise durch eine thermische Solaranlage (kurz: Solaranlage) decken. Anhand der Angaben des Solaranlagenherstellers und der Verbrauchswerte der Familie aus dem letzten Kalenderjahr wurde das folgende Modell für ein beispielhaftes Kalenderjahr aufgestellt.

Die **Leistung der Solaranlage** wird durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

und der thermische **Leistungsbedarf** der Familie (kurz: Leistungsbedarf) durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -t^4 + 26t^3 - 167{,}5t^2 - 12{,}5t + 2053\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

modelliert, und zwar für das Zeitintervall [0;12], das dem Kalenderjahr entspricht.
Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 Monat und $f(t)$ sowie $g(t)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 Kilowattstunde pro Monat [kWh/Monat] auf. (Im Modell umfasst jeder Monat 30 Tage.) Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Kalenderjahres.

Die Graphen von f und g sind in der *Abbildung* auf *Seite 3* dargestellt.

a) (1) *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im Sachzusammenhang.*

(2) *Berechnen Sie* $\dfrac{f(0)}{g(0)}$ *und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.*

(3) *Zeigen Sie, dass die Leistung der Solaranlage zu den Zeitpunkten* $t_1 = 3$ und $t_2 = 9{,}5$ *dem Leistungsbedarf der Familie entspricht.*

(5 + 5 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage und berechnen Sie den Maximalwert.*

(2) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall [0;12], zu dem der durch g beschriebene Leistungsbedarf der Familie innerhalb eines Kalenderjahres am stärksten abnimmt.*

(8 + 10 Punkte)

Durch das Integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ist im Sachzusammenhang die **aus der Solaranlage im Zeitintervall [*a*; *b*] abrufbare Energie** und durch das Integral $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ der **Energiebedarf der Familie im Zeitintervall [*a*; *b*]** für $0 \le a < b \le 12$ in Kilowattstunden [kWh] gegeben.

c) (1) *Geben Sie eine Gleichung einer Stammfunktion G von g an und berechnen Sie den Energiebedarf der Familie für das Kalenderjahr.*

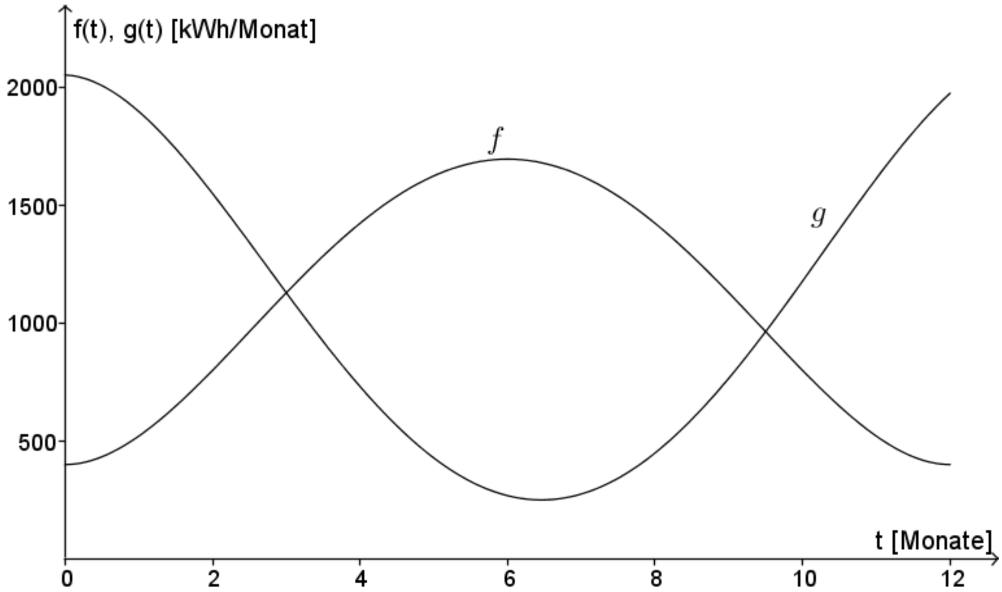
(2) Im Intervall [3; 9,5] wird der Leistungsbedarf der Familie zu jedem Zeitpunkt durch die Solaranlage gedeckt. Die den Bedarf übersteigende Leistung der Solaranlage soll in diesem Zeitraum zusätzlich zum Heizen eines Gartenpools genutzt werden. *Ermitteln Sie die Energie, die zum Heizen des Gartenpools im Intervall* $[3;9{,}5]$ *zur Verfügung steht.*

(3) *Skizzieren Sie in der Abbildung die Fläche, welche durch den Zähler des folgenden Bruches bestimmt wird, und interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im Sachzusammenhang.*

$$\frac{\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_3^{9{,}5} \left(f(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t}{\int_0^{12} g(t)\,\mathrm{d}t} \approx 0{,}575$$

(6 + 6 + 6 Punkte)

Name: ____________________



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Zu Beginn des Kalenderjahres ist der Leistungsbedarf maximal, während die Leistung der Solaranlage minimal ist. Bis zur Jahresmitte wächst die Leistung der Solaranlage an, während der Leistungsbedarf der Familie in diesem Zeitraum zurückgeht. In der zweiten Jahreshälfte nimmt der Leistungsbedarf dann wieder zu, während die Leistung der Solaranlage abnimmt. Von Anfang Januar bis etwa Ende März und von Mitte Oktober bis zum Jahresende übersteigt der Leistungsbedarf der Familie die Leistung der Solaranlage. Im Zeitraum von Anfang April bis Mitte Oktober ist die Leistung der Solaranlage dann größer als der Leistungsbedarf der Familie.

(2) $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{400}{2053} \approx 0{,}195$.

Der Term beschreibt den Anteil des Leistungsbedarfs der Familie, der zu Beginn des Kalenderjahres durch die Leistung der Solaranlage gedeckt wird. Dieser Anteil beträgt ca. 19,5 %.

(3) Die Leistung der Solaranlage entspricht dem Leistungsbedarf der Familie, wenn $f(t) = g(t)$ gilt.

$f(t_1) = f(3) = 1129 = g(3)$.
$f(t_2) = f(9{,}5) = 964{,}0625 = g(9{,}5)$.

Teilaufgabe b)

(1) Für den Zeitpunkt der maximalen Leistung, der im Intervall [0;12] angenommen wird, kommen nur Nullstellen von f' oder die Randstellen in Frage.

$f'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$.

Nullstellen von f':

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 72t^2 + 288t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 18t + 72 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6 \vee t = 12$.

Mit $f(0) = f(12) = 400$ und $f(6) = 1696$ folgt somit, dass die maximale Leistung der Solaranlage nach 6 Monaten erreicht wird. Diese beträgt $1696 \ \frac{\text{kWh}}{\text{Monat}}$.

(2) Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres zu dem Zeitpunkt am stärksten ab, zu dem g' minimal und negativ ist. Somit ist der Zeitpunkt des globalen Minimums von g', das im Intervall [0;12] angenommen wird, zu ermitteln. Dafür kommen nur die Nullstellen von g'' oder die Randstellen in Frage.

Es ist $g'(t) = -4t^3 + 78t^2 - 335t - 12{,}5$ und $g''(t) = -12t^2 + 156t - 335$.

Die Gleichung $g''(t) = 0$ hat die Lösungen

$t_1 = \frac{13}{2} - \sqrt{\frac{43}{3}} \approx 2{,}714$ und $t_2 = \frac{13}{2} + \sqrt{\frac{43}{3}} \approx 10{,}286$.

Aus den Funktionswerten $g'(0) = -12{,}5$, $g'(12) = 287{,}5$, $g'(t_1) \approx -427{,}1 < 0$ und $g'(t_2) \approx 441{,}1$ folgt, dass t_1 die globale Minimalstelle von g' ist.

Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres somit nach etwa 2,7 Monaten am stärksten ab.

Teilaufgabe c)

(1) Die Funktion G mit der Gleichung $G(t) = -\frac{1}{5}t^5 + \frac{13}{2}t^4 - \frac{335}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + 2053t$ ist eine mögliche Stammfunktion von g.

Für den Energiebedarf in dem Kalenderjahr gilt damit

$$\int_0^{12} g(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{13}{2}t^4 - \frac{335}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + 2053t\right]_0^{12} = 12273{,}6.$$

Der Energiebedarf beträgt somit etwa 12274 kWh $\approx 12{,}3$ MWh.

(2) Laut Voraussetzung gilt $f(t) \geq g(t)$ für alle $3 \leq t \leq 9{,}5$. Somit gilt für die zu ermittelnde Energie:

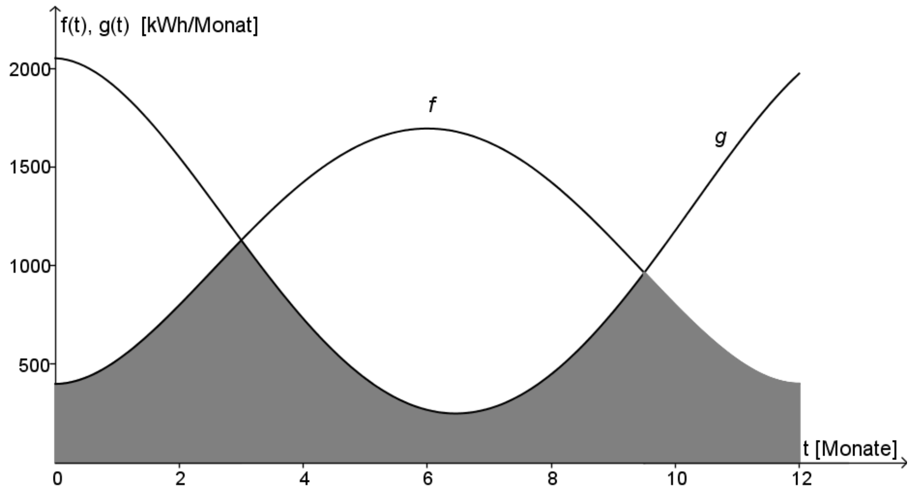
$$\int_3^{9{,}5} \left(f(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t = \int_3^{9{,}5} \left(2t^4 - 50t^3 + 311{,}5t^2 + 12{,}5t - 1653\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{25}{2}t^4 + \frac{623}{6}t^3 + \frac{25}{4}t^2 - 1653t\right]_3^{9{,}5}$$

$$\approx 3022{,}623 - \left(-3014{,}55\right) = 6037{,}173.$$

Durch die Solaranlage stehen im Intervall $[3; 9{,}5]$ etwa 6037 kWh Energie für die Heizung des Gartenpools zur Verfügung.

(3)



Der Term gibt den Anteil des Energiebedarfs der Familie an, der durch die Solaranlage in dem Modelljahr bereitgestellt wird („solarer Deckungsanteil“). Der angegebene Wert besagt, dass dieser Deckungsanteil bei etwa 57,5 % liegt.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) vergleicht die Graphen von f und g im Sachzusammenhang.	5			
2	(2) berechnet den genannten Quotienten.	2			
3	(2) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	3			
4	(3) zeigt, dass t_1 und t_2 die angegebene Bedingung erfüllen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage.	6			
2	(1) berechnet den Maximalwert.	2			
3	(2) ermittelt den Zeitpunkt für die stärkste Abnahme des Leistungsbedarfs.	10			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Gleichung einer Stammfunktion G von g an.	3			
2	(1) berechnet den Energiebedarf der Familie.	3			
3	(2) ermittelt die zum Heizen des Gartenpools zur Verfügung stehende Energie.	6			
4	(3) skizziert die Fläche.	3			
5	(3) interpretiert den Wert des Quotienten im Sachzusammenhang.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

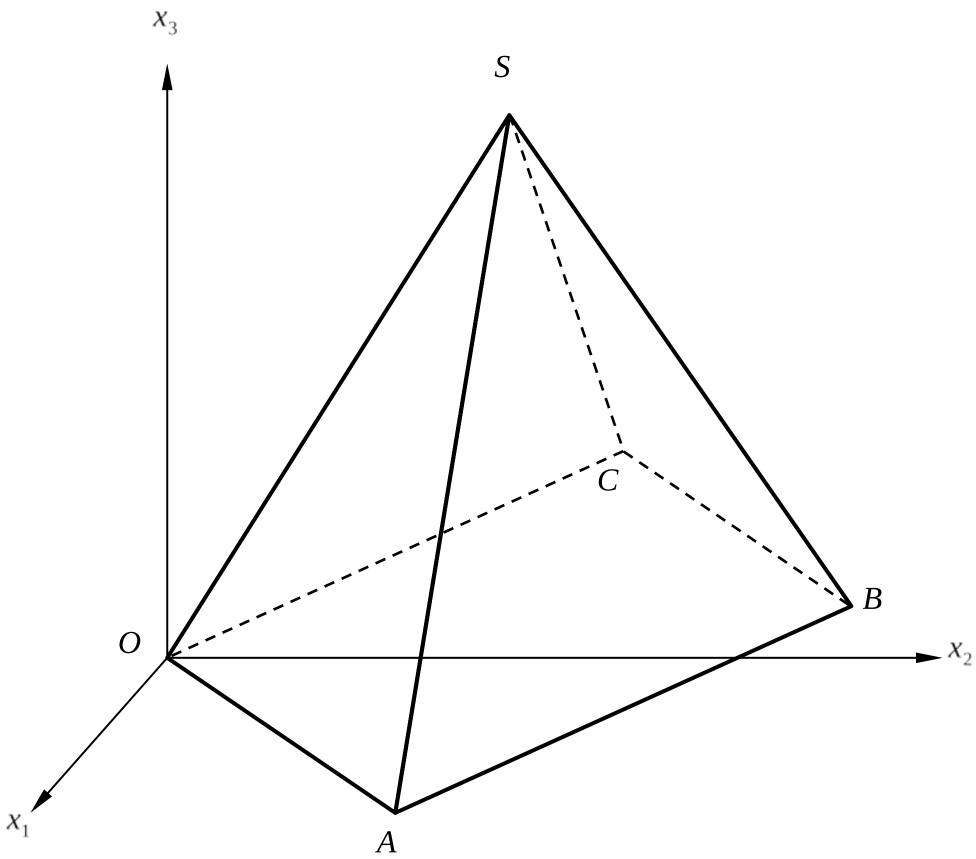
Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(9|12|0)$, $B(-3|21|0)$, $C(-12|9|0)$ und $S(-1{,}5|10{,}5|15)$ Eckpunkte der Pyramide *OABCS*, deren Grundfläche das Viereck *OABC* ist (siehe *Abbildung*).



Abbildung

Name: ____________________

Im Folgenden darf verwendet werden, dass die Seitendreiecke der Pyramide zueinander kongruent sind.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Viereck OABC ein Quadrat ist.*
   (2) *Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche der Pyramide OABCS.*

(6 + 8 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie, dass der Punkt* $R(5\,|\,15\,|\,0)$ *auf der Strecke* $\overline{AB}$ *liegt.*
   (2) *Zeigen Sie, dass die Strecke* $\overline{OR}$ *die Grundfläche der Pyramide im Verhältnis 5:1 bzw. 1:5 teilt.*
   (3) *Leiten Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene E her, die durch die Punkte O,* $Q(1\,|\,1\,|\,2)$ *und* R *festgelegt ist.*
   [Mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 - x_2 - x_3 = 0$]

(3 + 5 + 7 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P der Geraden g durch S und A mit der Ebene E aus Aufgabe b) (3).*
   [Zur Kontrolle: Der Schnittpunkt ist $P(5{,}5\,|\,11{,}5\,|\,5)$.]
   (2) *Weisen Sie nach, dass die Strecken* $\overline{OP}$ *und* $\overline{BP}$ *senkrecht zur Geraden g verlaufen.*
   (3) *Begründen Sie, dass der Streckenzug* $\overline{OPB}$ *ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide (Mantel: Oberfläche ohne Grundfläche) ist, und berechnen Sie die Länge des Streckenzuges.*
   (4) Es gibt einen weiteren Streckenzug $\overline{ONB}$ $(N \neq P)$, der ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide ist.

   Begründen Sie diese Aussage und beschreiben Sie die Lage des Punktes N.

(6 + 4 + 6 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Vektorielle Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameter- und Koordinatenform
   - Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) (*) Die Punkte O, A, B und C liegen in der x_1x_2-Ebene.

(**) Wegen der Kongruenz der Seitendreiecke gilt $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$.

(***) Wegen $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ besitzt das Viereck bei O einen rechten Winkel.

Aus (*), (**) und (***) folgt, dass das Viereck *OABC* ein Quadrat ist.

(2) Berechnung des Volumens der Pyramide:

Da *O*, *A*, *B* und *C* in der x_1x_2-Ebene liegen, ist die Höhe der Pyramide der Betrag der x_3-Koordinate von *S*.

Es gilt $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit folgt $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{225} = 15\,[\text{LE}]$.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (15 \cdot 15) \cdot 15 = 1125\,[\text{VE}].$$

Berechnung der Oberfläche der Pyramide:

$M_{\overline{OA}} = (4{,}5\,|\,6\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OA}$.

Mit der Kongruenz der Seitendreiecke ergibt sich:

$$F_{\Delta OAS} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SM_{\overline{OA}}}\right| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4{,}5 \\ -15 \end{pmatrix}\right| = 7{,}5 \cdot \sqrt{281{,}25}\,[\text{FE}].$$

$$O_{\text{Pyramide}} = G + 4 \cdot F_{\Delta OAS} = 225 + 30 \cdot \sqrt{281{,}25} = 728{,}115... \approx 728{,}12\,[\text{FE}].$$

Teilaufgabe b)

(1) Gleichung der Geraden durch A und B:

$$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \ (r \in I\!R); \text{ es gilt: } \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-12r \\ 12+9r \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r = \frac{1}{3} \\ r = \frac{1}{3} \\ 0 = 0 \end{array} \right|.$$

Wegen $0 \le r \le 1$ liegt R auf der Strecke $\overline{AB}$.

(2) Die Strecke $\overline{OR}$ teilt die Grundfläche der Pyramide in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{OA}$ und $\overline{AR}$ und ein „Restviereck“ [Trapez].

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt: $D = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{OA}\right| \cdot \left|\overline{AR}\right| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 = 37{,}5 \text{ [FE]}$,

also beträgt das Verhältnis (*Fläche „Restviereck“*): $D = (225 - 37{,}5) : 37{,}5 = 5 : 1$

[analog ist *D:* (*Fläche „Restviereck“*) = 1:5].

Alternativ kann beispielsweise das Verhältnis der Flächeninhalte über eine geometrische Zerlegung der Grundfläche erhalten werden.

(3) Für eine Gleichung der Ebene E in Parameterform ergibt sich:

$$E: \quad \vec{x} = s \cdot \overrightarrow{OQ} + t \cdot \overrightarrow{OR} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \ (s, t \in I\!R).$$

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = s + 5t \\ x_2 = s + 15t \\ x_3 = 2s \end{array} \right|.$$

Durch Elimination der Parameter s und t erhält man eine Koordinatenform von E:

$$E: \quad 3x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Teilaufgabe c)

(1) Gleichung der Geraden durch A und S: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-10{,}5\\-1{,}5\\15\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ bzw.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-7\\-1\\10\end{pmatrix}\ (r\in\mathbb{R}).$$

Für den zum Schnittpunkt P von g und E gehörigen Parameter r gilt:

$3\cdot(9-7r)-(12-r)-10r=0 \Leftrightarrow r=0{,}5$.

Durch Einsetzen in die Gleichung von g erhält man den Schnittpunkt $P(5{,}5\,|\,11{,}5\,|\,5)$.

(2) Da für den Richtungsvektor $\overrightarrow{a_g}$ von g gilt:

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{a_g}=\begin{pmatrix}5{,}5\\11{,}5\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-1\\10\end{pmatrix}=0$ und $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{a_g}=\begin{pmatrix}8{,}5\\-9{,}5\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-1\\10\end{pmatrix}=0$, sind $\overline{OP}$ und $\overline{BP}$

senkrecht zur Geraden g. (Eine der beiden Rechnungen könnte beispielsweise auch durch den Hinweis auf die Symmetrie der Pyramide ersetzt werden.)

(3) Wenn man über die Kante $\overline{AS}$ geht, ist der kürzeste Weg von O zur Geraden g das Lot von O auf g. Entsprechendes gilt für den kürzesten Weg von B zur Geraden g. Da P nach c (1) und c (2) Fußpunkt des Lotes von O auf g und Fußpunkt des Lotes von B auf g ist, ist der Streckenzug $\overline{OPB}$ der kürzeste Weg von A nach C über die Dreiecksflächen OAS und ABS der Pyramide. Da die Ebene H, die durch O, B und S bestimmt ist, eine Symmetrieebene der Pyramide ist, gibt es keinen kürzeren Weg über die Dreiecksflächen OCS und CBS.

Länge des kürzesten Weges: $l=\left|\overrightarrow{OP}\right|+\left|\overrightarrow{BP}\right|=2\cdot\sqrt{187{,}5}=27{,}386...\approx 27{,}39\,[\text{LE}]$.

(4) Da die Ebene H (siehe c (3)) eine Symmetrieebene der Pyramide ist, ist ein zu $\overline{OPB}$ entsprechender Streckenzug $\overline{ONB}$ „über“ die Kante $\overline{CS}$ ebenso lang wie der Streckenzug $\overline{OPB}$ und damit auch ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide.

Der Punkt N kann beispielsweise als Bildpunkt der Spiegelung von P an der Ebene H erhalten werden.

[Alternative: Die Ebene H ist orthogonal zur x_1x_2-Ebene. Also liegt der Punkt $N(t_1 \mid t_2 \mid t_3)$ in „gleicher Höhe über der Grundfläche“ wie der Punkt P. Deshalb ist N auch der Schnittpunkt der Geraden durch C und S mit der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 5$.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das Viereck *OABC* ein Quadrat ist.	6			
2	(2) berechnet das Volumen der Pyramide *OABCS*.	3			
3	(2) berechnet die Oberfläche der Pyramide *OABCS*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass der Punkt *R* auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.	3			
2	(2) zeigt, dass die Strecke $\overline{OR}$ die Grundfläche der Pyramide im Verhältnis 5:1 bzw. 1:5 teilt.	5			
3	(3) leitet eine Parametergleichung der Ebene *E* her.	3			
4	(3) leitet eine Koordinatengleichung der Ebene *E* her.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes P der Geraden g durch S und A mit der Ebene E.	6			
2	(2) weist nach, dass die Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{BP}$ senkrecht zur Geraden g verlaufen.	4			
3	(3) begründet, dass der Streckenzug $\overline{OPB}$ ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide ist.	4			
4	(3) berechnet die Länge des Streckenzuges.	2			
5	(4) begründet die Aussage.	3			
6	(4) beschreibt die Lage des Punktes N.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (21) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**21**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 34
mangelhaft	2	33 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Im Folgenden betrachten wir die Entwicklung von Wolfspopulationen. Dabei beschränken wir uns **ausschließlich** auf die **weiblichen** Mitglieder einer Population, die aus Welpen (w), jungen Fähen (j) sowie ausgewachsenen Fähen (a) bestehen soll. Alle Fähen sind vermehrungsfähig. Die Welpen entwickeln sich ein Jahr nach der Geburt zu jungen Fähen und ein Jahr später zu ausgewachsenen Fähen.

Die folgende *Tabelle* zeigt die Verteilung einer in der Wildnis lebenden Population für die Jahre 2013 und 2014:

	2013	2014
w	65	52
j	8	26
a	20	16

Tabelle

Modellhaft lässt sich die Entwicklung mit der Matrix A beschreiben:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von:} \quad w \quad\; j \quad\; a \\ \text{nach:} & & \\ \begin{array}{c} w \\ j \\ a \end{array} & A = & \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) (1) *Begründen Sie mit den Daten aus der Tabelle, dass $b = 0{,}4$ gilt.*

(2) *Interpretieren Sie die weiteren von Null verschiedenen Einträge in der Matrix A im Sachzusammenhang.*

(3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Berechnen Sie die Verteilungen, die nach diesem Modell in den Jahren 2015 und 2016 zu erwarten sind.*

(2) *Bestimmen Sie die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2012 vorgelegen hätte.*

(3) *Zeigen Sie, dass sich in diesem Modell die Population aus 2011 nicht bestimmen lässt.*

(4) Ein Biologe behauptet, dass weniger als 15 % aller Welpen mindestens ein Alter von drei Jahren erreichen.

Prüfen Sie, ob nach der obigen Modellierung mit der Matrix A die Behauptung des Biologen zutrifft.

(4 + 5 + 3 + 4 Punkte)

c) Wölfe, die in einem Tierpark leben, haben andere Überlebens- und Fortpflanzungsraten. Für einen Tierpark kann die Entwicklung seiner Wolfspopulation durch die folgende Matrix *B* modelliert werden:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

(1) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Einträge in der zweiten Spalte der Matrix B im Vergleich zu den Einträgen in der zweiten Spalte der Matrix A.*

(2) Wegen der räumlichen Beschränkung will die Tierparkleitung die Gesamtzahl der Wölfe konstant halten. Das soll durch eine strikte Geburtenkontrolle gewährleistet werden.

Zeigen Sie, dass eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschiedene stationäre Verteilung existiert, d. h. eine Verteilung, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.*

(3) *Ermitteln Sie die kleinstmögliche Gesamtpopulation mit stationärer Verteilung* $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit natürlichen Zahlen* n_1, n_2 *und* n_3.

(2 + 7 + 4 Punkte)

Name: ____________________

d) Für die Population in dem obigen Tierpark wird eine neue Modellierung gewählt: Die Entwicklungsstufe der Welpen wird mit der Überlebensrate von 80 % beibehalten, die Entwicklungsstufen der jungen Fähen und ausgewachsenen Fähen werden zu einer Stufe zusammengefasst. Die neue Modellierung soll durch die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix}$$

mit $g > 0$ und $0 \le h < 1$ dargestellt werden. Die Population der Welpen und Fähen soll mit insgesamt 19 Tieren konstant bleiben.

(1) *Zeigen Sie, dass in dem neuen Modell eine stationäre Verteilung mit 11 Welpen nicht vorkommen kann.*

(2) *Zeigen Sie, dass sich für* $g = \frac{5}{14}$ *und* $h = \frac{5}{7}$ *eine stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen ergibt.*

(3) Mit den Werten aus (2) ist $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0{,}8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$. Ein Taschenrechner liefert z. B.

$$C^{17} = \begin{pmatrix} 0{,}2222222218 & 0{,}2777777779 \\ 0{,}6222222226 & 0{,}7777777777 \end{pmatrix}.$$

Die Potenzen C^n der Matrix C streben mit wachsendem n gegen die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{28}{45} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Matrix G lässt sich die langfristige Entwicklung einer Population ermitteln.

Leider fallen in einem Jahr alle fünf Welpen der Population einer Infektionskrankheit zum Opfer. Daraufhin beschließt die Tierparkleitung die Anschaffung von vier zusätzlichen Fähen.

Ermitteln Sie die langfristige Entwicklung der neuen Population.

(7 + 2 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Matrizenrechnung
   - Übergangsmatrizen
   - Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Von 65 Welpen im Jahr 2013 entwickeln sich im folgenden Jahr 26 zu jungen Fähen, also ist $b = 0,4$.

(2) Von den jungen Fähen erreichen 50 % das dritte Lebensjahr und von den ausgewachsenen Fähen erreichen 60 % das nächste Lebensjahr. Eine junge Fähe bringt im Durchschnitt 1,5 Welpen zur Welt und eine ausgewachsene Fähe durchschnittlich zwei Welpen.

Teilaufgabe b)

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 26 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 20{,}8 \\ 22{,}6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 71 \\ 20{,}8 \\ 22{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76{,}4 \\ 28{,}4 \\ 23{,}96 \end{pmatrix}$.

Im Jahr 2015 sind 71 Welpen, 21 junge Fähen und 23 ausgewachsene Fähen zu erwarten und im Jahr 2016 sind 76 Welpen, 28 junge Fähen und 24 ausgewachsene Fähen zu erwarten.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 1{,}5 \cdot j + 2 \cdot a & = & 65 \\ 0{,}4 \cdot w & = & 8 \\ 0{,}5 \cdot j + 0{,}6 \cdot a & = & 20 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 0{,}2 \cdot a & = & 5 \\ 0{,}4 \cdot w & = & 8 \\ 0{,}5 \cdot j + 0{,}6 \cdot a & = & 20 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} w & = & 20 \\ j & = & 10 \\ a & = & 25 \end{array} \right|$.

Für das Jahr 2012 hätte sich eine Verteilung von 20 Welpen, 10 jungen und 25 ausgewachsenen Fähen ergeben.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 1{,}5 \cdot j + 2 \cdot a & = & 20 \\ 0{,}4 \cdot w & = & 10 \\ 0{,}5 \cdot j + 0{,}6 \cdot a & = & 25 \end{array} \right|$.

Aus der ersten und dritten Zeile erhält man: $0{,}2 \cdot a = -55$ (Widerspruch, da es keine negativen Anzahlen gibt).

(4) Der Anteil q der Welpen, die mindesten drei Jahre alt werden, beträgt $q = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 = 12\,\% < 15\,\%$. Damit ergibt sich die Behauptung des Biologen aus der Modellierung.

Teilaufgabe c)

(1) Die Überlebensrate für die jungen Fähen steigt von 0,5 auf 0,75 und ihre Fortpflanzungsrate fällt von 1,5 auf 1.

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ j \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} j + 0{,}1 \cdot a & = & w \\ 0{,}8 \cdot w & = & j \\ 0{,}75 \cdot j + 0{,}7 \cdot a & = & a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} -w + j + 0{,}1 \cdot a & = & 0 \\ 0{,}8 \cdot w - j & = & 0 \\ 0{,}75 \cdot j - 0{,}3 \cdot a & = & 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} -w + j + 0{,}1 \cdot a & = & 0 \\ -0{,}2 \cdot j + 0{,}08 \cdot a & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right|.$$

Jede Lösung des Gleichungssystems ist von der Form $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot a \\ 0{,}4 \cdot a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

(3) Die kleinstmögliche Population mit natürlichen Zahlen ergibt sich aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit 19 Tieren.

Teilaufgabe d)

(1) Der Ansatz $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 8 \cdot g & = & 11 \\ 8{,}8 + 8 \cdot h & = & 8 \end{array} \right|$

führt zu $h = -0{,}1 < 0$, was im Widerspruch zum Sachzusammenhang ($h \geq 0$) steht.

(2) Es ist $\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0{,}8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(3) Es ist $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{28}{45} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$. Also stellt sich langfristig wieder die stationäre Verteilung aus 5 Welpen und 14 Fähen ein.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet mit den Daten aus der Tabelle, dass $b = 0,4$ gilt.	3			
2	(2) interpretiert die weiteren von Null verschiedenen Einträge in der Matrix A im Sachzusammenhang.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Verteilungen, die nach diesem Modell in den Jahren 2015 und 2016 zu erwarten sind.	4			
2	(2) bestimmt die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2012 vorgelegen hätte.	5			
3	(3) zeigt, dass man die Population von 2011 in diesem Modell nicht bestimmen kann.	3			
4	(4) prüft, ob nach der Modellierung durch die Matrix A die Behauptung des Biologen zutrifft.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**16**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt im Sachzusammenhang die Einträge in der zweiten Spalte der Matrix B im Vergleich zu den Einträgen in der zweiten Spalte der Matrix A.	2			
2	(2) zeigt, dass eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung existiert.	7			
3	(3) ermittelt die kleinstmögliche Gesamtpopulation mit stationärer Verteilung $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit natürlichen Zahlen n_1, n_2 und n_3.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass in dem neuen Modell eine stationäre Verteilung mit 11 Welpen nicht vorkommen kann.	7			
2	(2) zeigt, dass sich für $g = \frac{5}{14}$ und $h = \frac{5}{7}$ eine stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen ergibt.	2			
3	(3) ermittelt die langfristige Entwicklung der neuen Population.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 34
mangelhaft	2	33 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Eine Firma stellt Bodenfliesen aus Keramik her. Damit eine Fliese als „1. Wahl“ gilt, muss sie strenge Qualitätsnormen erfüllen. Alle anderen Fliesen werden als „2. Wahl“ bezeichnet.

Eine Fliese ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ „2. Wahl“ (d. h. mit der Wahrscheinlichkeit von 0,8 „1. Wahl“), unabhängig von allen anderen Fliesen.

Jede Packung enthält 20 Fliesen.

a) (1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung genau vier „2. Wahl“-Fliesen enthalten sind.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mindestens 90 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl“ haben.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung die Anzahl der „2. Wahl“-Fliesen höchstens um 2 von der erwarteten Anzahl abweicht.*

(2 + 3 + 4 Punkte)

b) Die 20 Fliesen einer Packung wurden in 4 Reihen mit jeweils 5 Fliesen verlegt.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit* $\tilde{p}$ *dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1. Wahl“-Fliesen enthält.* [Kontrollergebnis $\tilde{p} = 0{,}32768$]

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl“-Fliesen enthält.*

(3) In einer Reihe wurden sogar genau zwei Fliesen der Qualität „2. Wahl“ verlegt. *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fliesen direkt nebeneinander liegen.*

(2 + 5 + 6 Punkte)

Name: ____________________

c) Für besonders anspruchsvolle Kunden soll eine Sorte „Premium“ angeboten werden, die nur aus „1. Wahl“-Fliesen besteht.
Dazu will die Firma die „2. Wahl“-Fliesen aus der Produktion aussortieren. Für einen ersten Sortiervorgang wird ein Testgerät verwendet, das allerdings nicht immer optimal funktioniert:
Das Testgerät erkennt eine „2. Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 und sortiert sie aus. Andererseits wird eine „1. Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 zu Unrecht als „2. Wahl“ aussortiert.

(1) *Stellen Sie die Situation graphisch dar (mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten).*
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl“ einstuft (also nicht aussortiert).

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit eine „2. Wahl“-Fliese ist.

(8 + 4 Punkte)

d) Die Maschine, mit der die Fliesen hergestellt werden, wird neu eingestellt, da die „2. Wahl“-Wahrscheinlichkeit von $p = 0,2$ zu groß ist. Der Produktionsleiter möchte mit einem Test überprüfen, ob die neue Einstellung tatsächlich zu einer Verringerung des Ausschussanteils geführt hat. Er entnimmt daher der Tagesproduktion der neu eingestellten Maschine zufällig 100 Fliesen und lässt die Anzahl der „2. Wahl“-Fliesen in dieser Stichprobe bestimmen.

(1) *Ermitteln Sie einen geeigneten Hypothesentest (geben Sie geeignete Hypothesen an, begründen Sie die Wahl von H_0 und ermitteln Sie eine Entscheidungsregel) für die genannte Stichprobe von 100 Fliesen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.*

(2) Die Wahrscheinlichkeit für „2. Wahl“-Fliesen wurde durch die neue Einstellung tatsächlich auf $p = 0,15$ gesenkt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ihre Entscheidungsregel aus (1) zu einer Fehlentscheidung führt.

(11 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5	*k*	*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		*p* = 0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilungen für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

							p							
n	*k*	0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		*n*
	0	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,0371	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,1183	0,0258	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,2578	0,0744	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,4360	0,1632	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,6160	0,2914	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,7660	0,4443	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,8720	0,5988	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9369	0,7340	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9	0,9718	0,8380	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10	0,9885	0,9092	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11	0,9957	0,9531	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12	0,9985	0,9776	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13	0,9995	0,9901	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14	0,9999	0,9959	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15		0,9984	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16		0,9994	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	83	
	17		0,9998	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	82	
	18		0,9999	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	81	
	19			0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	80	
	20			0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	79	
	21			0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	77	
	23				0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	76	
	24				0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	75	
	25				0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	74	
	26				0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	73	
	27				0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	72	
	28				0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	71	
	29				0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	70	
100	30					0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	69	100
	31					0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	68	
	32						0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	67	
	33						0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	66	
	34						0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	65	
	35						0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	64	
	36						0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	63	
	37							0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	62	
	38							0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	61	
	39							0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	60	
	40							0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	59	
	41							0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	58	
	42							0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	57	
	43								0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	56	
	44								0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	55	
	45									0,9995	0,9943	0,8689	54	
	46									0,9997	0,9969	0,9070	53	
	47									0,9999	0,9983	0,9362	52	
	48									0,9999	0,9991	0,9577	51	
	49										0,9996	0,9729	50	
	50										0,9998	0,9832	49	
	51										0,9999	0,9900	48	
	52											0,9942	47	
	53											0,9968	46	
	54			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9983	45	
	55											0,9991	44	
	56											0,9996	43	
	57											0,9998	42	
	58											0,9999	41	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	*k*	*n*
							p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2015

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Man betrachtet die Zufallsgröße X: Anzahl der „2. Wahl“-Fliesen in einer Packung.

X ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ und dem Stichprobenumfang $n = 20$.

(1) $P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} \approx 0{,}2182 = 21{,}82\ \%$.

(2) Haben mindestens 90 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl“, so treten höchstens 2 Fliesen der Qualität „2. Wahl“ auf. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also
$P(X \le 2) \approx 0{,}2061 = 20{,}61\ \%$.

(3) Die erwartete Anzahl von „2. Wahl“-Fliesen beträgt $20 \cdot 0{,}2 = 4$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann:
$P(2 \le X \le 6) \approx 0{,}9133 - 0{,}0692 = 0{,}8441 = 84{,}41\ \%$.

Teilaufgabe b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer zufällig ausgewählten Reihe nur „1. Wahl“-Fliesen befinden, beträgt $\tilde{p} = 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

(2) Sei Y die Anzahl der Reihen, die nur „1. Wahl“-Fliesen enthalten. Dann ist Y binomialverteilt mit $n = 4$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $\tilde{p} = 0{,}8^5$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt dann

$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - \tilde{p})^4 = 1 - (1 - 0{,}8^5)^4 \approx 0{,}7957 = 79{,}57\ \%$.

(3) In dieser Reihe befinden sich laut Aufgabenstellung zwei „2. Wahl“-Fliesen und drei „1. Wahl“-Fliesen. Die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen, diese Fliesen in einer Reihe anzuordnen, beträgt $\binom{5}{2} = 10$. Die Anzahl der Reihenfolgen, bei der die „2. Wahl“-Fliesen nebeneinanderliegen, beträgt 4 (die möglichen Anordnungen für die „2. Wahl“-Fliesen sind 1 2, 2 3, 3 4, 4 5). Da jede dieser Möglichkeiten mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach Laplace $p = \frac{4}{10} = 0,4$.

Teilaufgabe c)

Definiere folgende Ereignisse:

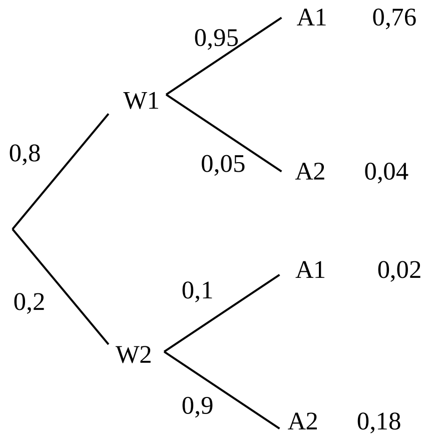
W1: Die Fliese ist „1. Wahl“.

W2: Die Fliese ist „2. Wahl“.

A1: Die Fliese wird als „1. Wahl“ angezeigt.

A2: Die Fliese wird als „2. Wahl“ angezeigt.

(1)



Alternative:

	A1	A2	Summe
W1	0,76	0,04	0,8
W2	0,02	0,18	0,2
Summe	0,78	0,22	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt: $P_1 = P(A1) = 0,76 + 0,02 = 0,78$.

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P_{A1}(W2) = \frac{P(A1 \cap W2)}{P(A1)} = \frac{0,02}{0,02+0,76} = \frac{1}{39} \approx 0,0256 = 2,56\ \%\ .$$

Teilaufgabe d)

(1) Es soll nachgewiesen werden, dass die Wahrscheinlichkeit der Produktion einer „2. Wahl"-Fliese gesenkt wurde. Dies führt zu der H_1-Hypothese $H_1: p < 0,2$ und damit zur Nullhypothese $H_0: p \geq 0,2$.

Sei X die Anzahl der „2. Wahl"-Fliesen in der entnommenen Stichprobe. Dann ist X binomialverteilt mit einer unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit p.

Aufgrund der Aufgabenstellung und der Hypothesenwahl soll für die kritische Grenze k die Aussage $P_p\left(X \leq k\right) \leq 0,05$ für alle $p \geq 0,2$ gelten. Für $p = 0,2$ erhält man $k = 13$.

Man erhält somit als Entscheidungsregel: H_0 wird abgelehnt, wenn $X \leq 13$ ist.

[Alternative: Nimmt man die Gültigkeit der Hypothese H_0 mit $p = 0,2$ an, so ist X binomialverteilt mit n = 100, p = 0,2. Bei Gültigkeit von H_0 ist $\mu = 100 \cdot 0,2 = 20$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4$. Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und wegen der σ-Regel $0,95 \approx P(X > \mu - 1,64\sigma)$ und $\mu - 1,64\sigma = 20 - 1,64 \cdot 4 = 13,44$ erhält man die zuvor genannte Entscheidungsregel.]

(2) Das Sinken der Ausschusswahrscheinlichkeit p auf unter 0,2 wird durch den Test irrtümlich nicht erkannt, wenn die Stichprobe trotz $p < 0,2$ mehr als 13 „2. Wahl"-Fliesen enthält.

Die gesuchte Fehlerwahrscheinlichkeit beträgt also

$P_{p=0,15}(X > 13) \approx 1 - 0,3474 = 0,6526$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung genau vier „2. Wahl"-Fliesen enthalten sind.	2			
2	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mindestens 90 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl" haben.	3			
3	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der „2. Wahl"-Fliesen höchstens um 2 von der erwarteten Anzahl abweicht.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.	2			
2	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.	5			
3	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Fliesen direkt nebeneinanderliegen.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die Situation mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten graphisch dar.	6			
2	(1) gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit an.	2			
3	(2) bestimmt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt geeignete Hypothesen an.	3			
2	(1) begründet die Wahl der Hypothese H_0.	3			
3	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
4	(2) ermittelt die gesuchte Fehlerwahrscheinlichkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**16**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 34
mangelhaft	2	33 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0