Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Bei einem medizinischen Test leert eine Versuchsperson ein Glas Wein in einem Zug. Anschließend wird die zeitliche **Änderungsrate** der Blutalkoholkonzentration (in Promille pro Minute) aufgezeichnet. Diese wird im hier verwendeten Modell durch eine Funktion f' mit der Gleichung

$$f'(t) = \frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}$$

beschrieben. Dabei ist *t* die Zeit in Minuten, die seit der Alkoholaufnahme vergangen ist. (Die Funktion f' ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, aber nur für $0 \le t \le 140$ zur Modellierung geeignet. Beispielsweise bedeutet $f'(t) = 0{,}01$ eine zeitliche Änderungsrate der Blutalkoholkonzentration von 0,01 Promille pro Minute.)
In der *Abbildung 1* ist der Graph der Funktion f' dargestellt.

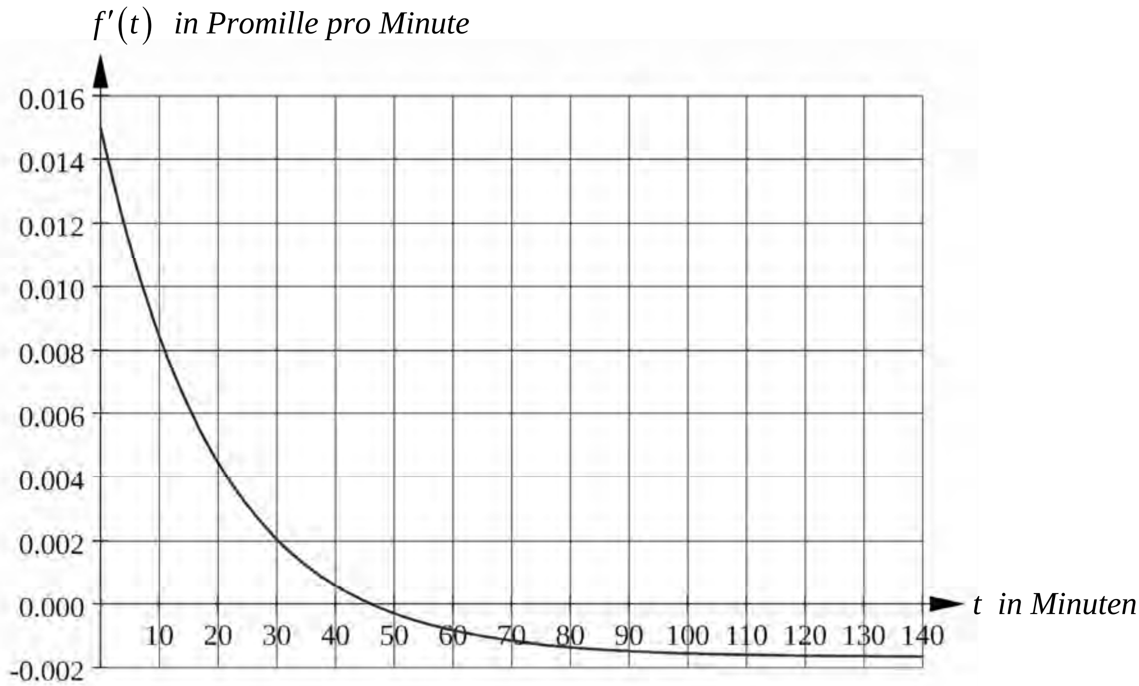


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Berechnen Sie* $f'(0)$ *und* $f'(140)$, *ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion* f' *und zeigen Sie, dass* $t_0 = 20\ln(10)$ *die einzige Nullstelle von* f' *ist.*

(2) *Beschreiben Sie anhand des Graphen von* f' *den zeitlichen Verlauf der Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson.*

(17 Punkte)

Wenn die Versuchsperson vor dem Leeren des Glases noch keinen Alkohol im Blut hatte, wird die Blutalkoholkonzentration (in Promille) im verwendeten Modell während der ersten 140 Minuten nach der Alkoholaufnahme durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3}$$

beschrieben.

b) (1) *Weisen Sie die Richtigkeit dieser Aussage nach.*

(2) *Ermitteln Sie die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson nach dem Leeren des Glases.*

(3) *Berechnen Sie die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson 140 Minuten nach dem Leeren des Glases.*

(16 Punkte)

c) Aus biologischen Gründen wird nach 140 Minuten die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson durch die Funktion f nicht mehr richtig beschrieben. Für die Modellierung besser geeignet ist die an der Stelle $t = 140$ zusammengesetzte Funktion h mit der Gleichung

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le 140 \\ g(t), & t > 140 \end{cases},$$

wobei $g(t) = u \cdot e^{-v \cdot t}$ mit $u \approx 1{,}01357$, $v \approx 0{,}01657$ gilt (siehe *Abbildung 2*).

Name: ____________________

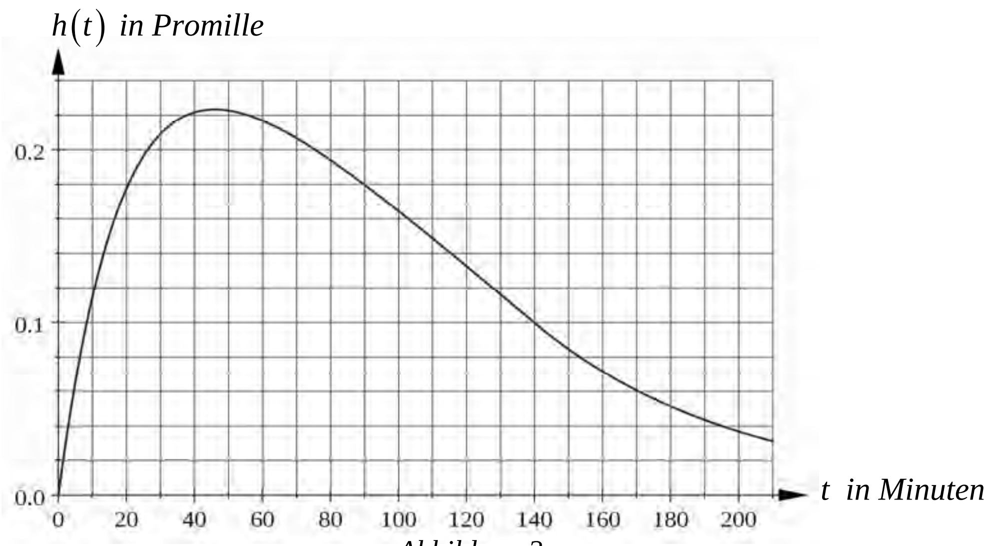


Abbildung 2

(1) *Berechnen Sie, nach wie viel Minuten in diesem Modell die Blutalkoholkonzentration erstmals unter 0,01 Promille gesunken ist.*

(2) *Begründen Sie, warum die Beschreibung der Blutalkoholkonzentration durch die Funktion f nicht für beliebige Zeiten $t > 140$ möglich ist. Begründen Sie, warum im Gegensatz dazu die Modellierung durch die Funktion h für $t > 140$ sinnvoller ist.*

(3) *Beurteilen Sie, ob die in der Abbildung 3 dargestellte Funktion k' zu einer alternativen Modellierung der* ***Änderungsrate*** *der Blutalkoholkonzentration prinzipiell geeignet ist.*

(17 Punkte)

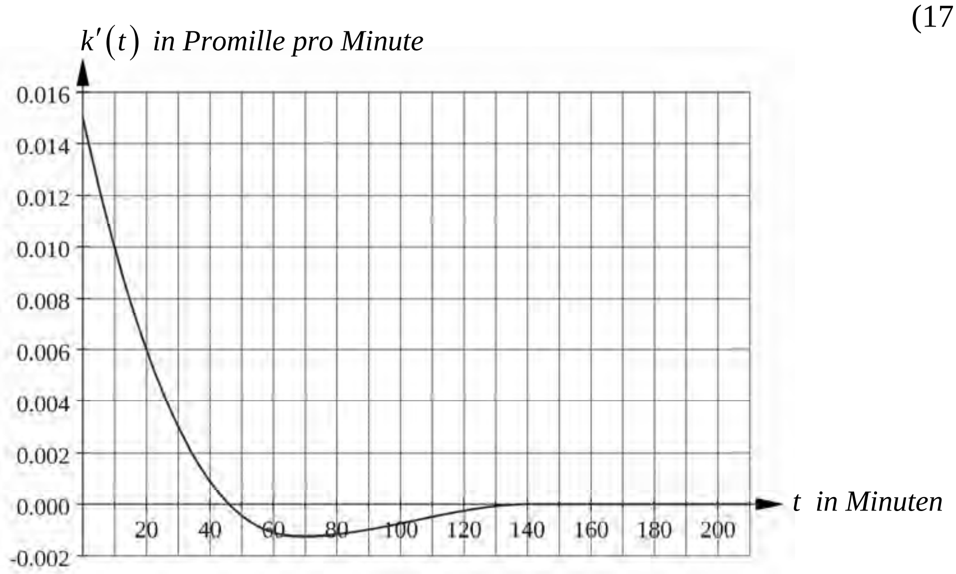


Abbildung 3

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) $f'(t) = \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}$.

$f'(0) = 0{,}015$, $f'(140) \approx -0{,}00165$.

$f''(t) = \left(\frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600} \right)' = -\frac{1}{1200} e^{-\frac{1}{20}t} < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also fällt die Funktion f' streng monoton, insbesondere im betrachteten Zeitintervall [0; 140].

Da die Funktion f' streng monoton fällt, hat sie höchstens eine Nullstelle:

$$\begin{aligned} f'(t_0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20}t_0} - \frac{1}{600} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}t_0} = \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{20}t_0 = -\ln(10) \\ &\Leftrightarrow t_0 = 20\ln(10) \ [\approx 46{,}05] \end{aligned}$$

(2) Die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson nimmt bis zum Zeitpunkt $t_0 \approx 46$ [Minuten] bei kontinuierlich abnehmender Änderungsrate zu. Anschließend nimmt sie wieder ab, bei zum Ende des betrachteten Zeitintervalls gegen ca. –0,00165 Promille pro Minute strebender Änderungsrate.

Modelllösung b)

(1) Im verwendeten Modell ist für $0 \le t \le 140$ die Blutalkoholkonzentration der zuvor nüchternen Versuchsperson zum Zeitpunkt *t* gegeben durch $\int_0^t f'(u)\,du$.

Wegen $\left(-\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3} \right)' = \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600} = f'(t)$ ist *f* eine Stammfunktion von f'.

Da zusätzlich $f(0) = 0$ ist, gilt $\int_0^t f'(u)\,du = f(t)$. Damit ist die Aussage nachgewiesen.

(2) Da die Funktion f' [im betrachteten Zeitintervall] streng monoton fällt, hat ihre Stammfunktion f an der Nullstelle $t_0 = 20\ln(10) \approx 46,05$ von f' (vgl. Teilaufgabe a) (1)) das lokale und zugleich globale Maximum $f(20\ln(10)) = \frac{3}{10} - \frac{\ln(10)}{30} \approx 0,223$.

Die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson [wird nach ca. 46 Minuten gemessen und] beträgt ca. 0,22 Promille.

(3) $f(140) = \frac{1}{10} - \frac{1}{3}e^{-7} \approx 0,100$.

Die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson beträgt 140 Minuten nach dem Leeren des Glases ca. 0,100 Promille.

Modelllösung c)

(1) Für den gesuchten Zeitpunkt t gilt offenbar $t > 140$ und daher $h(t) = g(t) = u \cdot e^{-v \cdot t}$.

Es ist $u \cdot e^{-v\cdot t} = 0,01 \Leftrightarrow -v \cdot t = \ln\left(\frac{0,01}{u}\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{v}\ln(100u)$ [$\approx 278,7$ bei Verwendung der angegebenen gerundeten Werte von u und v].

Nach 279 Minuten ist die Blutalkoholkonzentration erstmals unter 0,01 Promille gesunken. [Auch systematisches Probieren wird akzeptiert.]

(2) Es gilt z. B. $f(200) = -\frac{1}{3}e^{-10} < 0$. Negative Werte der Blutalkoholkonzentration können jedoch nicht existieren.

Für $t > 140$ gilt: $h(t) = g(t)$. Im Gegensatz zu $f(t)$ ist $g(t) = u \cdot e^{-v\cdot t}$ für alle $t > 140$ positiv und nähert sich für größer werdendes t dem Wert 0 [im Einklang mit der Tatsache, dass die Blutalkoholkonzentration nach endlicher Zeit unter die Nachweisbarkeitsgrenze sinkt].

(3) Die vom Graphen der Funktion k' und den Koordinatenachsen im 1. Quadranten berandete Fläche ist offensichtlich größer als die Fläche zwischen dem Graph von k' und der t-Achse im 4. Quadranten. Zusätzlich ist $k'(t) = 0$ für $t \geq 140$. Der Abbau des Alkohols wäre abgeschlossen, obwohl die Blutalkoholkonzentration noch größer ist als 0. Das steht im Widerspruch zur Realität. Die Funktion k' ist daher nicht geeignet, die Änderungsrate der Blutalkoholkonzentration zu beschreiben.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet $f'(0)$ und $f'(140)$.	4
2	(1) ermittelt das Monotonieverhalten der Funktion f'.	5
3	(1) zeigt, dass $t_0 = 20\ln(10)$ die einzige Nullstelle von f' ist.	4
4	(2) beschreibt anhand des Graphen von f' den zeitlichen Verlauf der Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) weist die Richtigkeit dieser Aussage nach.	6
2	(2) ermittelt die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson nach dem Leeren des Glases.	7
3	(3) berechnet die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson 140 Minuten nach dem Leeren des Glases.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet, nach wie viel Minuten in diesem Modell die Blutalkoholkonzentration erstmals unter 0,01 Promille gesunken ist.	4
2	(2) begründet, warum die Beschreibung der Blutalkoholkonzentration durch die Funktion f nicht für beliebige Zeiten $t > 140$ möglich ist.	4
3	(2) begründet, warum die Modellierung durch die Funktion h für $t > 140$ sinnvoller ist.	5
4	(3) beurteilt, ob die Funktion k' zur Modellierung prinzipiell geeignet ist.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $f'(0)$ und …	4			
2	(1) ermittelt das Monotonieverhalten …	5			
3	(1) zeigt, dass $t_0 = 20\ln(10)$ …	4			
4	(2) beschreibt anhand des …	4			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist die Richtigkeit …	6			
2	(2) ermittelt die höchste …	7			
3	(3) berechnet die Blutalkoholkonzentration …	3			
sachlich richtige Alternativen: (16) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**16**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet, nach wie …	4			
2	(2) begründet, warum die …	4			
3	(2) begründet, warum die …	5			
4	(3) beurteilt, ob die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Erhöhte Ozonkonzentrationen können beim Menschen Reizung der Atemwege, Husten, Kopfschmerzen und Atembeschwerden bis hin zu Einschränkungen der Lungenfunktion und Lungenkrankheiten hervorrufen. Ihr Ausmaß wird hauptsächlich durch die Aufenthaltsdauer in der ozonbelasteten Luft bestimmt. Befindlichkeitsstörungen wie Reizerscheinungen an Augen und Schleimhäuten werden vor allem durch Begleitstoffe des Ozons (im Sommersmog) hervorgerufen.

In einer Prognose für den kommenden Tag wird die Ozonkonzentration in einer deutschen Stadt zwischen 7 Uhr ($t = 0$) und 21 Uhr ($t = 14$) durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25\,t^4 - 10{,}6\,t^3 + 101{,}2\,t^2) + 55,\;\; 0 \le t \le 14\,,$$ [1]

und in einer ländlichen Region für denselben Zeitraum durch die Funktion g modelliert.
(t in Stunden; $f(t)$, $g(t)$ in µg/m^3)

Die Graphen von f und g sind in der *Abbildung* auf Seite 2 dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $f(t)$-, $g(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 µg/m^3)

a) (1) *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im gegebenen Sachzusammenhang.*

(2) *Geben Sie die Ozonkonzentrationen in der Stadt zu den Zeitpunkten 7 Uhr und 21 Uhr nach dem Prognosemodell an.*

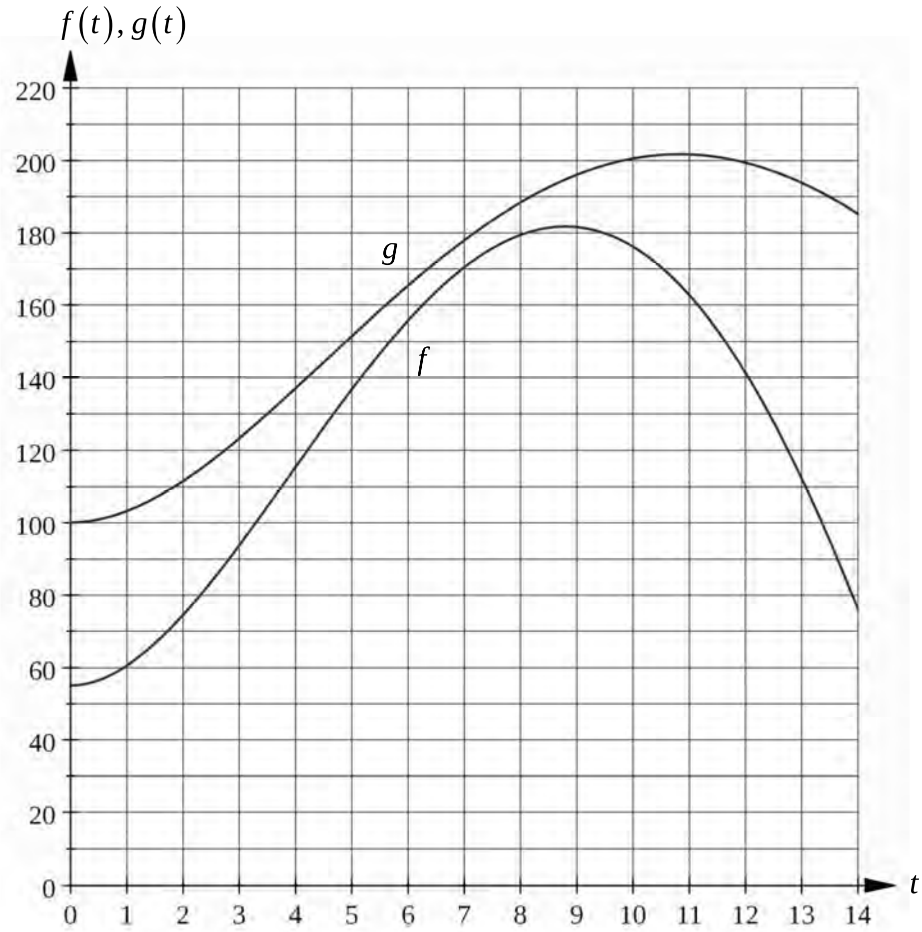
(3) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die höchste Ozonkonzentration in der Stadt prognostiziert wird, und berechnen Sie die höchste Ozonkonzentration.*

(18 Punkte)

---

[1] Die Funktion f ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $0 \le t \le 14$ zur Modellierung verwendet.

Name: ____________________



Abbildung

b) (1) *Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentration in der Stadt am stärksten zu- und am stärksten abnimmt.*

(2) *Erklären Sie die Bedeutung des Ausdrucks* $\frac{1}{8}\cdot\int_a^{a+8} f(t)dt,$ *wobei* $0 \le a \le 6$ *ist, im Sachzusammenhang.*

(3) *Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion von f und berechnen Sie* $\frac{1}{8}\cdot\int_0^{8} f(t)dt$.

(4) *Begründen Sie, dass die Fortsetzung der Funktion f auf das Intervall [0; 24] zur Prognose der Ozonkonzentration nicht geeignet ist.*

(24 Punkte)

Name: ____________________

Ein Prognosemodell aus der Schweiz zur Berechnung der **maximalen** Ozonkonzentration des folgenden Tages lautet:

$$O_{\mathrm{m}} = 0{,}25 \cdot O_{\mathrm{h}} + 5{,}5 \cdot T_{\mathrm{m}} - 40\,.$$

O_{m} : Maßzahl der maximalen Ozonkonzentration (in µg/m^3), die für den morgigen Tag prognostiziert wird

O_{h} : Maßzahl der maximalen Ozonkonzentration (in µg/m^3) am heutigen Tag

T_{m} : Maßzahl der maximalen Temperatur (in °C), die für den morgigen Tag prognostiziert wird

Für den morgigen Tag wird eine Höchsttemperatur von 28 °C vorhergesagt.

c) (1) *Bestimmen Sie, für welche heutige maximale Ozonkonzentration nach dem Schweizer Modell am nächsten Tag eine Ozonkonzentration von 180 µg/m^3 vorausgesagt wird.*

(2) Die „Ozon-Alarmschwelle" wird bei einer Konzentration von 240 µg/m^3 erreicht. Heute wurde eine maximale Ozonkonzentration von 60 µg/m^3 gemessen.

Untersuchen Sie, welche Tageshöchsttemperatur für den nächsten Tag prognostiziert werden müsste, damit nach dem Schweizer Prognosemodell morgen ein Erreichen der „Alarmschwelle" möglich wäre.

(8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

---

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) *Gemeinsamkeiten:*

Die Ozonkonzentration steigt in beiden Fällen vom Morgen an und erreicht am Nachmittag ihren höchsten Stand. Danach flacht sie zum Abend hin ab.

Unterschiede:

Die Ozonkonzentration auf dem Land liegt ständig über dem städtischen Niveau, der höchste Wert wird mehr als eine Stunde später erreicht und die Zunahme bzw. die Abnahme ist geringer als in der „Stadtkurve".

(2) Ozonkonzentration um 7 Uhr: $f(0) = 55\ \mu g/m^3$

Ozonkonzentration um 21 Uhr: $f(14) = 76{,}16...\ \mu g/m^3$

(3) Ableitungen von *f*:

$f\,'(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 202{,}4\,t)$

$f\,''(t) = 0{,}06 \cdot (3\,t^2 - 63{,}6\,t + 202{,}4)$

Extremstellen von *f*:

Ein hinreichendes Kriterium für eine relative Extremstelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion *f* lautet $f\,'(t) = 0 \wedge f\,''(t) \neq 0$.

$f\,'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 202{,}4\,t) = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 31{,}8\,t + 202{,}4) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 31{,}8\,t + 202{,}4 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8{,}8 \vee t = 23$

0 und 23 liegen nicht im Inneren des Definitionsbereiches. Deswegen kommt höchstens 8,8 als relative Extremstelle infrage.

$f\,''(8{,}8) = 0{,}06 \cdot (-124{,}96) < 0$ – Relatives Maximum an der Stelle 8,8.

Als einzige relative Extremstelle ist das relative Maximum zugleich absolutes Maximum. 8,8 entspricht dem Zeitpunkt 15.48 Uhr.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

$f(8{,}8) = 181{,}75...$. Die höchste Ozonkonzentration beträgt ungefähr 181,75 $\mu g/m^3$.

Modelllösung b)

(1) Die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentrationen am stärksten zu- bzw. abnehmen, werden über die Wende- bzw. Randstellen des Graphen von *f* ermittelt.

$f'''(t) = 0{,}06 \cdot (6t - 63{,}6)$

Wendestellen von *f*:

Ein hinreichendes Kriterium für eine Wendestelle einer dreimal differenzierbaren Funktion f lautet $f''(t) = 0 \wedge f'''(t) \neq 0$.

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6\,t + 202{,}4) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 21{,}2\,t + \frac{202{,}4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 10{,}6 \pm \sqrt{44{,}89...} \Leftrightarrow t = 3{,}89... \vee t = 17{,}30...\ .$$

$t = 17{,}30... > 14 \Rightarrow$ Die Stelle 17,30… liegt nicht im Definitionsbereich von *f* und spielt deswegen bei den Überlegungen keine Rolle.

$\Rightarrow$ Die einzig mögliche Wendestelle liegt bei $t_1 = 3{,}89...$.

$f'''(t_1) < 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $t_1 = 3{,}89...$

Vergleich der Steigungen an der Wendestelle und den Randstellen:

$f'(0) = 0$

$f'(t_1) = 21{,}9... \Rightarrow$ 3,89... Stelle der größten Zunahme

$f'(14) = -39{,}3... \Rightarrow$ 14 Stelle der größten Abnahme

Um 10.53 Uhr (3,89… entspricht 3:53 h) nimmt die Ozonkonzentration am stärksten zu und um 21 Uhr am stärksten ab.

(2) $\frac{1}{8}\int_a^{a+8} f(t)\,\mathrm{d}t$ gibt die durchschnittliche Ozonkonzentration für einen 8-Stunden-Zeitraum zwischen 7 und 21 Uhr in der Stadt an.

(3) Es gilt:

$$m = \frac{1}{8}\int_0^8 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[0{,}06 \cdot (0{,}05\,t^5 - 2{,}65\,t^4 + \frac{101{,}2}{3}\,t^3) + 55\,t\right]_0^8$$

$$= 115{,}416$$

≈ 115 [µg/m^3].

(4) Es gilt z. B. $f(24) = -262{,}95...$. Da keine negativen Ozonwerte existieren, ist eine Erweiterung des Definitionsbereiches auf das Intervall [0; 24] nicht sinnvoll.

Modelllösung c)

(1) Mit den angegebenen Werten folgt:

$$180 = 0{,}25 \cdot O_{\mathrm{h}} + 5{,}5 \cdot 28 - 40 \Leftrightarrow O_{\mathrm{h}} = 264\,.$$

Nach dem Modell müsste heute eine höchste Ozonkonzentration von 264 µg/m³ vorliegen.

(2) Analog folgt:

$$240 = 0{,}25 \cdot 60 + 5{,}5 \cdot T_{\mathrm{m}} - 40 \Leftrightarrow T_{\mathrm{m}} = \frac{265}{5{,}5} = 48{,}18... \;.$$

Damit am nächsten Tag nach dem Schweizer Prognosemodell die „Alarmschwelle“ der Ozonkonzentration von 240 µg/m³ erreicht wird, müsste die prognostizierte Tageshöchsttemperatur über 48 °C [im Schatten] liegen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) vergleicht die Graphen von *f* und *g* im Sachzusammenhang.	5
2	(2) gibt die Ozonkonzentrationen um 7 und um 21 Uhr nach dem Prognosemodell an.	2
3	(3) bestimmt den Zeitpunkt, an dem die höchste Ozonkonzentration prognostiziert wird.	9
4	(3) berechnet die höchste Ozonkonzentration.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Wendestelle von *f*.	7
2	(1) ermittelt die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentration am stärksten zu- bzw. abnimmt.	5
3	(2) erklärt die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{1}{8}\cdot\int_a^{a+8} f(t)\,\mathrm{d}t$, $0 \le a \le 6$, im Sachzusammenhang.	4
4	(3) ermittelt eine Gleichung einer Stammfunktion von *f* und berechnet $\frac{1}{8}\cdot\int_0^{8} f(t)\,\mathrm{d}t$.	5
5	(4) begründet, dass die Fortsetzung der Funktion *f* auf das Intervall [0; 24] zur Prognose der Ozonkonzentration nicht geeignet ist.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt, für welche heutige Ozonkonzentration nach dem Schweizer Modell am nächsten Tag eine Ozonkonzentration von 180 µg/m^3 vorausgesagt wird.	4
2	(2) untersucht, welche Tageshöchsttemperatur für den nächsten Tag prognostiziert werden müsste, damit nach dem Schweizer Prognosemodell morgen ein Erreichen der „Alarmschwelle“ möglich wäre.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) vergleicht die Graphen …	5			
2	(2) gibt die Ozonkonzentrationen …	2			
3	(3) bestimmt den Zeitpunkt …	9			
4	(3) berechnet die höchste …	2			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wendestelle …	7			
2	(1) ermittelt die Zeitpunkte …	5			
3	(2) erklärt die Bedeutung …	4			
4	(3) ermittelt eine Gleichung …	5			
5	(4) begründet, dass die …	3			
sachlich richtige Alternativen: (24) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**24**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt, für welche …	4			
2	(2) untersucht, welche Tageshöchsttemperatur …	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = 3x \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von *f* ist in der *Abbildung* auf Seite 3 dargestellt.

a) (1) *Weisen Sie nach, dass der Graph von f symmetrisch zum Ursprung O ist.*

(2) *Ermitteln Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f.*

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \left(1 - 2x^2\right) \cdot 3e^{-x^2}$]

(9 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung* $F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, *eine Stammfunktion der Funktion f ist.*

(2) In a) (2) ergibt sich, dass der Punkt $H\left(0{,}5\sqrt{2} \mid 1{,}5\sqrt{2}\, e^{-0{,}5}\right)$ ein Hochpunkt der Funktion *f* ist. Es kann vorausgesetzt werden, dass die Ursprungsgerade *OH* den Graphen der Funktion *f* im I. Quadranten nur in den Punkten *O* und *H* schneidet.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f und der Ursprungsgeraden OH im I. Quadranten eingeschlossen wird.

(9 Punkte)

Name: ____________________

c) Im Punkt $A\left(1\,|\,f(1)\right)$ bzw. im Punkt $B\left(-1\,|\,f(-1)\right)$ wird jeweils die Tangente t_A bzw. die Tangente t_B an den Graphen von *f* gelegt.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der beiden Tangenten t_A und t_B.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Tangenten t_A und t_B mit den Koordinatenachsen.*

[Zur Kontrolle: Die Tangente t_A schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $A_\text{x}\left(2\,|\,0\right)$ und $A_\text{y}\left(0\,|\,\frac{6}{e}\right)$.]

Die Schnittpunkte aus c) (2) ergeben ein Viereck.

(3) *Erstellen Sie eine geeignete Skizze.*

(4) *Begründen Sie, dass das genannte Viereck eine Raute ist.*

(5) *Berechnen Sie den Flächeninhalt des genannten Vierecks.* (17 Punkte)

d) Es sei $h: x \mapsto h(x),\ x \in \mathbb{R}$, eine zweimal differenzierbare Funktion mit $h(x) > 0$ für alle $x > 0$ und $h(0) = 0$.
Man wählt für $u > 0$ den Punkt $P_u\left(u\,|\,h(u)\right)$ auf dem Graphen der Funktion *h*. Der Punkt Q_u hat die Koordinaten $\left(u\,|\,0\right)$, und man betrachtet das Dreieck OQ_uP_u, wobei *O* der Ursprung ist.

(1) *Erstellen Sie eine geeignete Skizze.*

(2) *Begründen Sie, dass das Dreieck OQ_uP_u den Flächeninhalt $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot h(u), u > 0$, besitzt.*

(3) *Zeigen Sie:*

Wenn u_E eine Extremstelle der Funktion A mit der Gleichung $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot h(u)$, $u > 0$, ist, so gilt $h'(u_E) = -\frac{h(u_E)}{u_E}$.

Zeigen sie weiter:

Gilt zusätzlich die Aussage $h'(u_E) + \frac{1}{2}u_E \cdot h''(u_E) < 0$, so ist $A(u_E)$ ein lokales Maximum der Funktion A.

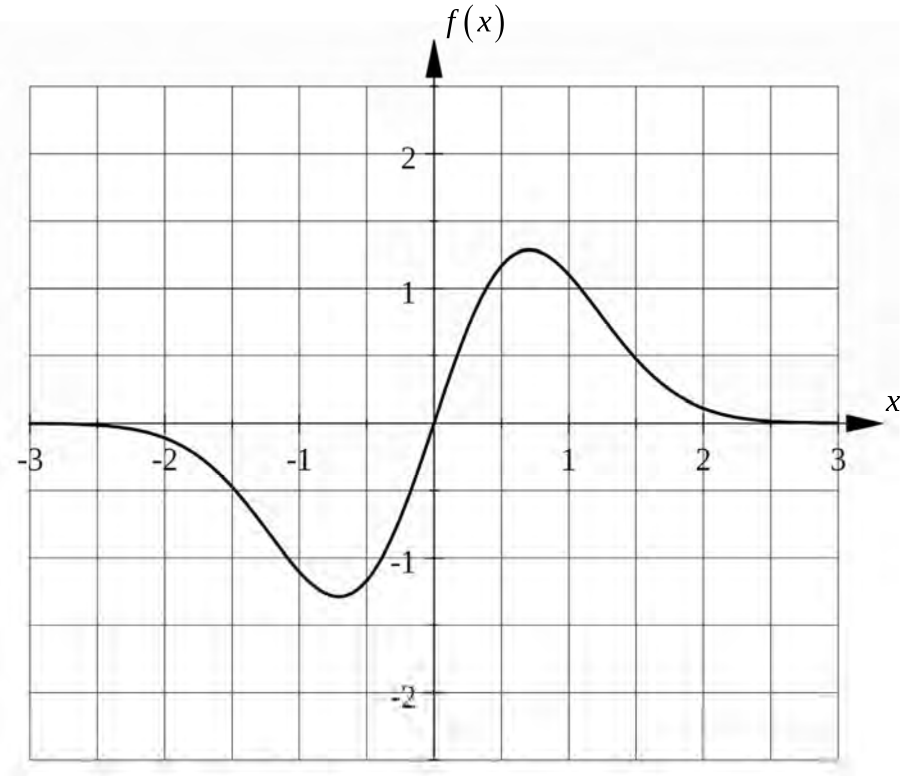
Name: ____________________

(4) Es sei f die auf Seite 1 definierte Funktion mit der Gleichung
$f(x) = 3x \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Im I. Quadranten spannen der Ursprung O und die Punkte $P(a \mid f(a))$ und $Q(a \mid 0)$ für $a > 0$ ein Dreieck auf.

Untersuchen Sie (z. B. mit Hilfe von d) (3)), ob ein a > 0 existiert, für das das Dreieck OQP einen maximalen Flächeninhalt besitzt.

(15 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Wegen $f(-x) = 3(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -3x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der Graph von *f* symmetrisch zum Ursprung.

(2) Wegen $f'(x) = 3e^{-x^2} \cdot \left(1-2x^2\right)$ ist $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5\sqrt{2} \vee x = -0{,}5\sqrt{2}$.

Wegen $f''(x) = 6xe^{-x^2} \cdot \left(-3+2x^2\right)$ ergibt sich $f''\left(0{,}5\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{2} \cdot e^{-0{,}5} < 0$. Daher ist $f\left(0{,}5\sqrt{2}\right) = 1{,}5\sqrt{2}\, e^{-0{,}5}$ ein lokales Maximum der Funktion *f*. Also besitzt die Funktion *f* den Hochpunkt $H\left(0{,}5\sqrt{2} \mid 1{,}5\sqrt{2}\, e^{-0{,}5}\right)$. Da der Graph von *f* punktsymmetrisch zum Ursprung ist, erhält man den zugehörigen Tiefpunkt $T\left(-0{,}5\sqrt{2} \mid -1{,}5\sqrt{2}\, e^{-0{,}5}\right)$.

Modelllösung b)

(1) Durch Ableiten erhält man $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Sei A_F der gesuchte Flächeninhalt. Dann gilt

$$A_F = \int_0^{0{,}5\sqrt{2}} f(x)\,dx - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\sqrt{2} \cdot 1{,}5\sqrt{2}\, e^{-0{,}5} = \left[-\frac{3}{2} e^{-x^2}\right]_0^{0{,}5\sqrt{2}} - 0{,}75\, e^{-0{,}5} =$$

$$\left(1{,}5 - 1{,}5\, e^{-0{,}5}\right) - 0{,}75\, e^{-0{,}5} \approx 0{,}135 \text{ [FE]}.$$

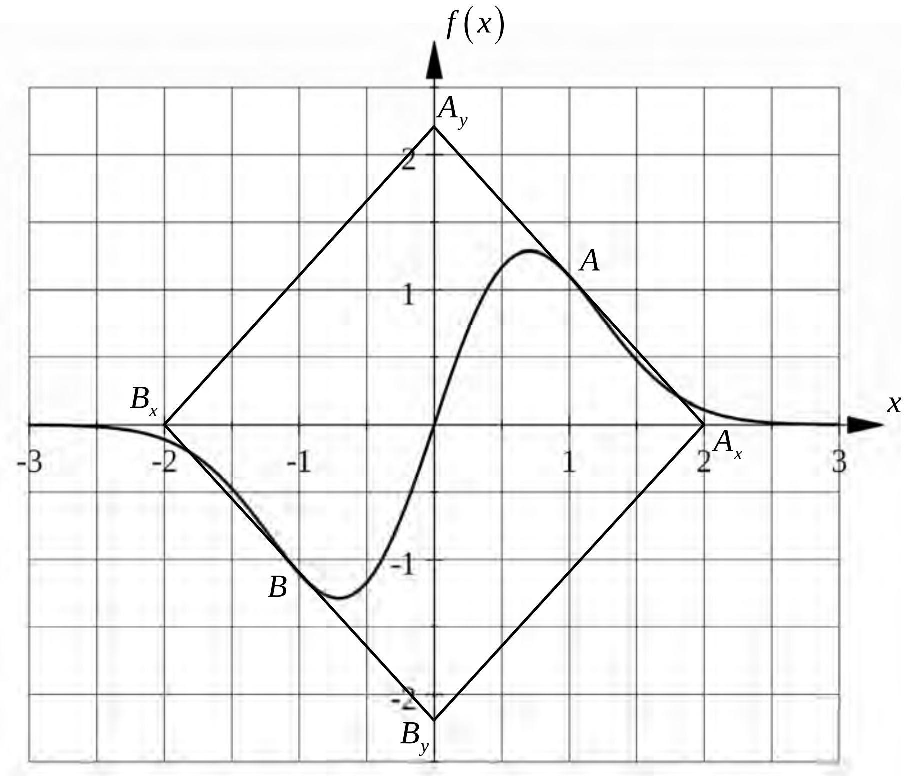
Modelllösung c)

(1) Man erhält die Punkte $A\left(1\,|\,\frac{3}{e}\right)$ und $B\left(-1\,|\,-\frac{3}{e}\right)$. Wegen $f'(1) = -\frac{3}{e}$ gilt

$t_A(x) = -\frac{3}{e}(x-1) + \frac{3}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{6}{e},\ x \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen der Funktion *f* zum Ursprung gilt $t_B(x) = -\frac{3}{e}x - \frac{6}{e},\ x \in \mathbb{R}$.

(2) Wegen $t_A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ und $t_A(0) = \frac{6}{e}$ schneidet die Tangente t_A die Koordinatenachsen in den Punkten $A_x(2\,|\,0)$ und $A_y\left(0\,|\,\frac{6}{e}\right)$. Wegen der genannten Punktsymmetrie schneidet die Tangente t_B die Koordinatenachsen in den Punkten $B_x(-2\,|\,0)$ und $B_y\left(0\,|\,-\frac{6}{e}\right)$.

(3) Skizze:

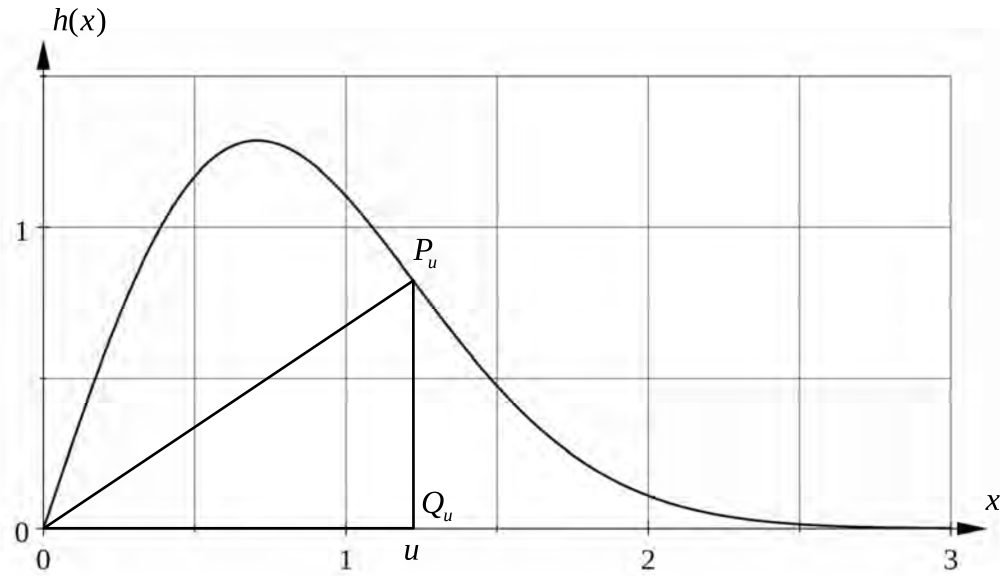


(4) Aus den Koordinaten der Punkte A_x, A_y, B_x und B_y folgt sofort, dass das Viereck $A_xA_yB_xB_y$ aus vier rechtwinkligen Dreiecken besteht, die paarweise kongruent sind. Demnach ist das Viereck $A_xA_yB_xB_y$ eine Raute.

(5) Für den Flächeninhalt A_R der Raute $A_xA_yB_xB_y$ erhält man wegen der geometrischen Überlegung aus c) (4) $A_R = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{e} = \frac{24}{e} \approx 8{,}83$ [FE].

Modelllösung d)

(1) Mögliche Skizze:



(2) Das genannte Dreieck ist rechtwinklig mit den Kathetenlängen u und $h(u)$. Hieraus folgt unmittelbar die Aussage aus der Aufgabenstellung.

(3) Es gilt $A'(u) = \frac{1}{2}\left(h(u) + u \cdot h'(u)\right)$. Wegen der notwendigen Bedingung für Extremstellen gilt $A'(u_{\mathrm{E}}) = 0$. Dieses ist wegen $u_{\mathrm{E}} \neq 0$ äquivalent zu $h'(u_{\mathrm{E}}) = -\frac{h(u_{\mathrm{E}})}{u_{\mathrm{E}}}$.

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Es gilt $A''(u) = h'(u) + \frac{1}{2} u \cdot h''(u)$. Da die Aufgabenstellung $A''(u_{\mathrm{E}}) < 0$ impliziert, folgt die zweite Behauptung mit Hilfe eines hinreichenden Kriteriums für lokale Maxima.

(4) Man wendet d) (3) an. [Alternative Lösungswege sind auch möglich.] Nach der ersten Behauptung aus d) (3) lautet eine notwendige Bedingung $\frac{f(a_{\mathrm{E}})}{a_{\mathrm{E}}} = -f'(a_{\mathrm{E}})$, d. h.

$3e^{-a_E^2} = -3e^{-a_E^2}\left(1 - 2a_{\mathrm{E}}^2\right)$ und somit $-1 = 1 - 2a_{\mathrm{E}}^2$. Hieraus folgt ($a > 0$) $a_{\mathrm{E}} = 1$.

Nun wendet man die zweite Behauptung aus d) (3) an:

Wegen $f'(1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f''(1) = -6e^{-1} < 0$ besitzt das Dreieck OQP für $a_{\mathrm{E}} = 1$ einen lokalen maximalen Flächeninhalt. Da $a_{\mathrm{E}} = 1$ die einzige Extremstelle der Funktion A (vgl. d) (3)) ist, ist der lokale maximale Flächeninhalt auch global.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) weist die Symmetrie des Graphen der Funktion f zum Ursprung nach.	3
2	(2) ermittelt die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) zeigt, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.	3
2	(2) berechnet den Inhalt der in der Aufgabenstellung beschriebenen Fläche.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt eine Gleichung der Tangenten t_A und t_B.	5
2	(2) berechnet die Koordinaten der Schnittpunkte von t_A und t_B mit den Koordinatenachsen.	4
3	(3) erstellt eine geeignete Skizze.	3
4	(4) begründet, dass das genannte Viereck eine Raute ist.	3
5	(5) berechnet den Flächeninhalt des genannten Vierecks.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) erstellt eine geeignete Skizze.	2
2	(2) begründet die Aussage aus der Aufgabenstellung.	2
3	(3) zeigt die erste Aussage aus der Aufgabenstellung.	4
4	(3) zeigt die zweite Aussage aus der Aufgabenstellung.	3
5	(4) untersucht, ob ein $a > 0$ existiert, für das das Dreieck OQP einen maximalen Flächeninhalt besitzt.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) weist die Symmetrie …	3			
2	(2) ermittelt die Koordinaten …	6			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	3			
2	(2) berechnet den Inhalt …	6			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt eine Gleichung …	5			
2	(2) berechnet die Koordinaten …	4			
3	(3) erstellt eine geeignete …	3			
4	(4) begründet, dass das …	3			
5	(5) berechnet den Flächeninhalt …	2			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erstellt eine geeignete …	2			
2	(2) begründet die Aussage …	2			
3	(3) zeigt die erste …	4			
4	(3) zeigt die zweite …	3			
5	(4) untersucht, ob ein …	4			
sachlich richtige Alternativen: (15) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Bei der Kunstausstellung „Licht und Schatten" ist in der Mitte der Ausstellungshalle eine gerade, 1 m hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche von 1 m Seitenlänge ausgestellt. Die Grundfläche der Pyramide befindet sich (gehalten von vier Stützen) einen Meter über dem Boden der Halle. Die quaderförmige Halle selbst ist 5 m hoch und hat eine quadratische Grundfläche von 9 m Seitenlänge.
In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung in einer Hallenecke und entlang der Hallenkanten verlaufenden Koordinatenachsen hat die Grundfläche der Pyramide die Eckpunkte $A(5|4|1)$, $B(5|5|1)$, $C(4|5|1)$ und $D(4|4|1)$.
Die Gegebenheiten sind in der ***Abbildung 1* auf Seite 3** dargestellt.

a) (1) *Zeigen Sie, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten* $S(4{,}5|4{,}5|2)$ *hat.*

(2) *Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABS.*

(3) *Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.*

(14 Punkte)

b) Die Pyramide wird von einer an der rechten Hallenwand in der Position $L(4{,}5|9|1)$ befestigten punktförmigen Lichtquelle angestrahlt (siehe *Abbildung 1*). Der Pyramidenschatten auf der gegenüberliegenden Hallenwand $(y=0)$ hat die Form eines Dreiecks.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Schattendreiecks. Zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

(12 Punkte)

Name: ____________________

Nachts werden die Kunstwerke in der Halle durch Laser-Lichtschranken gesichert.

c) Einer der Laserstrahlen ist auf den Punkt $M(4{,}75 \,|\, 4{,}5 \,|\, 1{,}5)$ des Dreiecks *ABS* gerichtet.

(1) *Zeigen Sie, dass M der Mittelpunkt der Seitenhalbierenden der Dreiecksseite* $\overline{AB}$ *ist.*

(2) Der Laserstrahl trifft im Punkt *M* orthogonal auf die Seitenfläche *ABS* der Pyramide.

Zeigen Sie, dass der Laserstrahl in Richtung des Vektors $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *verläuft, und ermitteln Sie die Koordinaten der Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.*

(16 Punkte)

d) Eine weitere Laser-Lichtquelle ist so installiert, dass der von ihr ausgehende rotierende Laserstrahl den innerhalb der Halle liegenden Bereich der Ebene

$$E^*:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R},$$

überstreicht. Der Laserstrahl trifft unter anderem die Punkte $F(3 \,|\, 0 \,|\, 5)$ und $G(3 \,|\, 9 \,|\, 5)$.

(1) *Zeichnen Sie in die Abbildung 2 auf Seite 4 die Spur des rotierenden Laserstrahls auf Wänden, Boden und Decke der Halle ein, d. h. alle Punkte der Wände, des Bodens und der Decke der Halle, die zur Ebene* E^* *gehören.*

(2) Die Ebene E^* und die Ebene $E_{BCS}:\ 2y + z = 11$, in der die Seitenfläche *BCS* der Pyramide liegt, schneiden sich in einer Schnittgeraden *g*.

Entscheiden Sie, ob die Pyramidenkante $\overline{BS}$ *auf dieser Schnittgeraden g liegt.*

(8 Punkte)

Name: ______________________

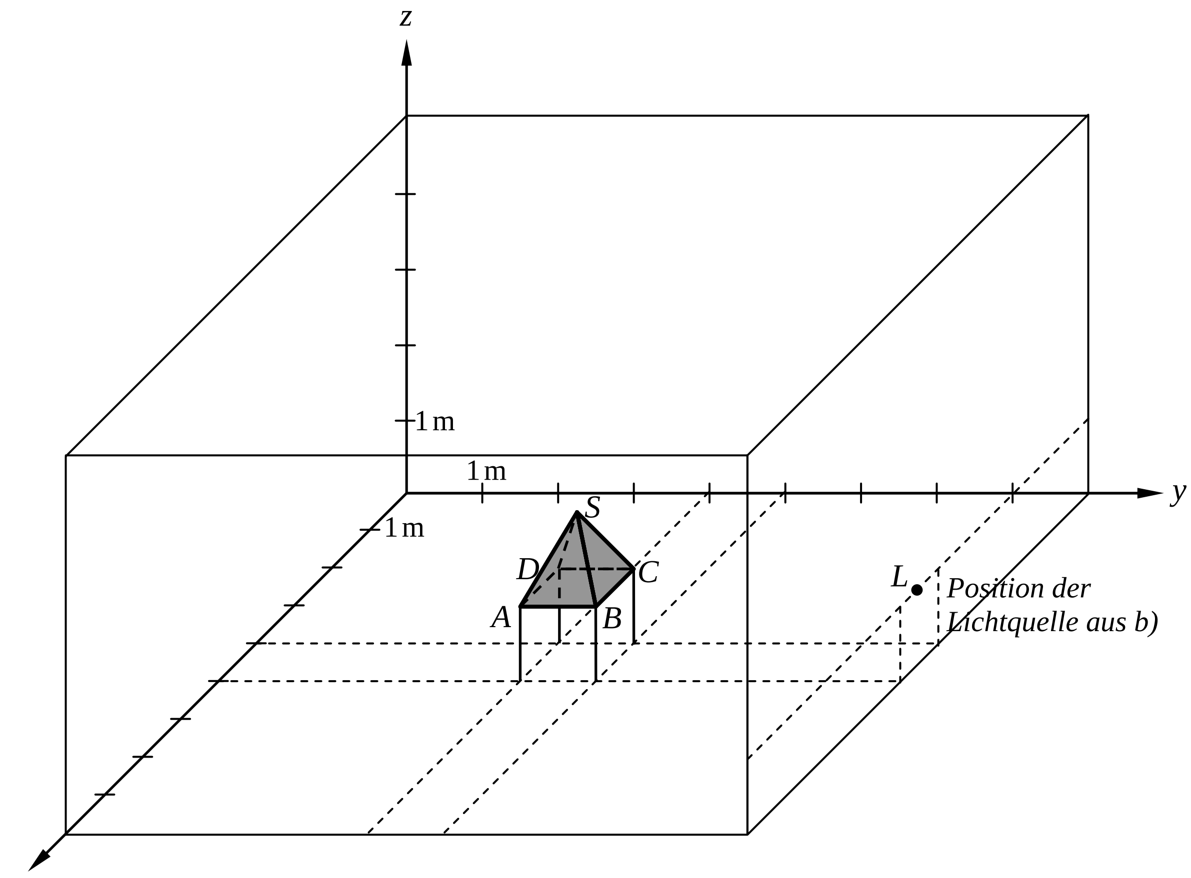


Abbildung 1

Name: ______________________

Für die Zeichnung in Teilaufgabe d) (1):

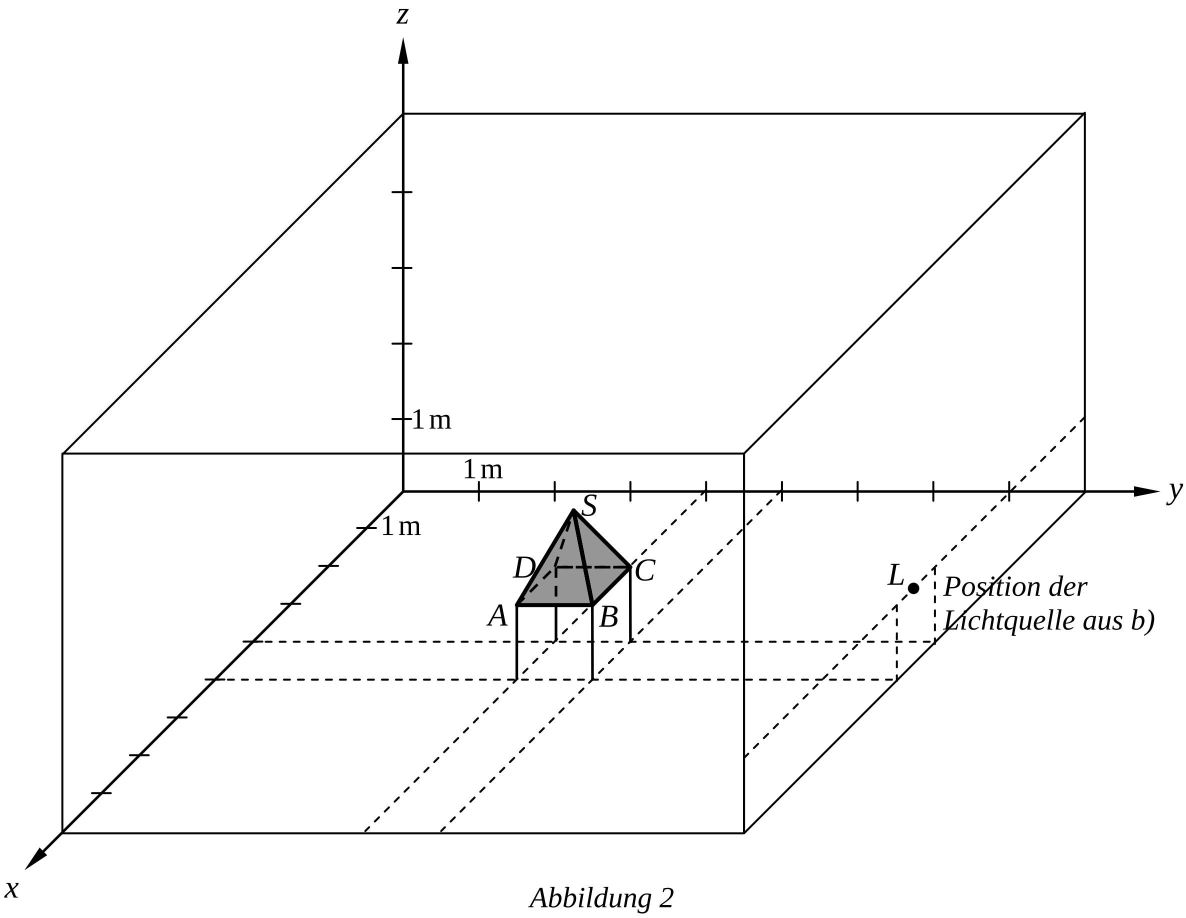


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Da es sich um eine gerade Pyramide mit zur x-y-Ebene parallelen Grundfläche handelt, stimmen die x- und y-Koordinaten der Pyramidenspitze S mit denen des Mittelpunkts $M(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,1)$ ihrer quadratischen Grundfläche $ABCD$ überein. Zur z-Koordinate von M ist die Höhe der Pyramide zu addieren, so dass sich $S(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,2)$ ergibt.

(2) $|\overline{AB}| = 1\,\text{m}$ wie vorausgesetzt.

Das Dreieck ABS ist gleichschenklig mit $|\overline{AS}| = |\overline{BS}| = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1^2}\ \text{m} \approx 1{,}22\,\text{m}$.

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\ \text{m}^3 = \frac{1}{3}\ \text{m}^3$.

Ihre Oberfläche besteht aus der $1\,\text{m}^2$ großen Grundfläche und der Mantelfläche.
Die Mantelfläche besteht aus vier [kongruenten] Dreiecken mit der Grundseitenlänge 1 m und der Höhe $h = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2}\ \text{m} = \sqrt{1{,}25}\,\text{m}$. Der Inhalt jeder Dreiecksfläche beträgt somit $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1{,}25}\,\text{m}^2$. Der Oberflächeninhalt der Pyramide ist

$O = 1\ \text{m}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1{,}25}\ \text{m}^2 \approx 3{,}24\ \text{m}^2$.

Modelllösung b)

Die Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(4{,}5\,|\,9\,|\,1)$.

Offenbar wird nur die Pyramidenfläche BCS von den Lichtstrahlen getroffen.
Daher sind die Schnittpunkte B', C' und S' der Geraden LB, LC und LS mit der x-z-Ebene ($y = 0$) die Eckpunkte des Schattendreiecks $B'C'S'$:

$LB\ :\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $t = \frac{9}{4}$ die x-z-Ebene in $B'(5{,}625\,|\,0\,|\,1)$.

$LC\ :\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $u = \frac{9}{4}$ die x-z-Ebene in $C'(3{,}375\,|\,0\,|\,1)$.

$LS\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet für $v = 2$ die *x*-*z*-Ebene in $S'(4{,}5 \,|\, 0 \,|\, 3)$.

Das Dreieck $B'C'S'$ ist wegen $|\overline{B'S'}| = \sqrt{1{,}125^2 + 2^2}\ \text{m} = |\overline{C'S'}|$ gleichschenklig.

Es hat die Grundseitenlänge $|\overline{B'C'}| = 2{,}25\ \text{m}$ und die Höhe 2 m. Sein Flächeninhalt beträgt daher $2{,}25\ \text{m}^2$.

Modelllösung c)

(1) Die Seitenhalbierende der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist die Strecke $\overline{SM_{AB}}$, wobei $M_{AB}(5 \,|\, 4{,}5 \,|\, 1)$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist. Der Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{SM_{AB}}$ ist $M\left(\frac{4{,}5+5}{2} \middle| \frac{4{,}5+4{,}5}{2} \middle| \frac{2+1}{2} \right) = M(4{,}75 \,|\, 4{,}5 \,|\, 1{,}5).$ Damit ist gezeigt, dass *M* Mittelpunkt der Seitenhalbierenden der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist.

(2) Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist wegen $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ orthogonal zu den beiden Seitenvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ und somit orthogonal zur Dreiecksfläche *ABS*. Daher verläuft der Laserstrahl in Richtung des Vektors $\vec{v}$.

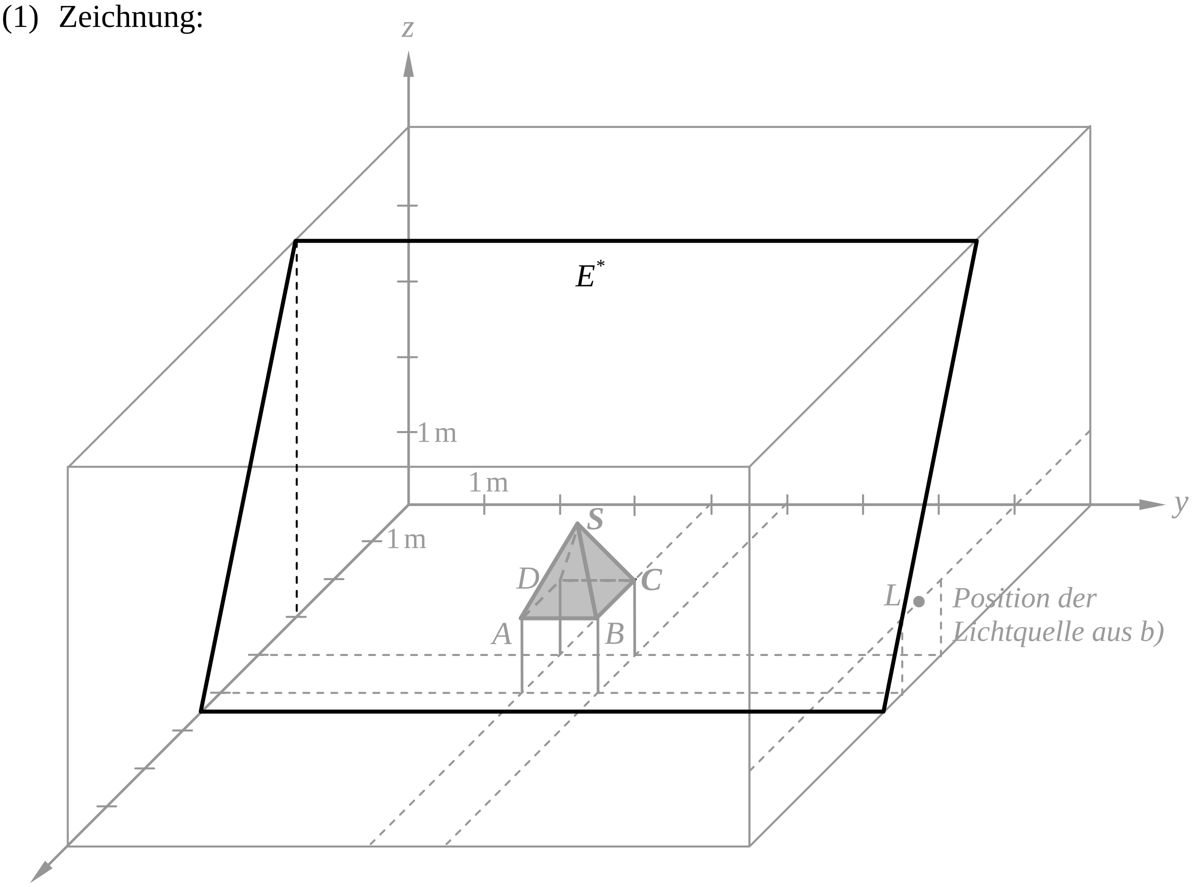
Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden $l\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zur *x*-*z*-Ebene. Offenbar befindet sich die gesuchte Position *P* der Laser-Lichtquelle an der vorderen Hallenwand (vgl. *Abbildung*). Daher gilt für die *x*-Koordinate von *P*: $x_P = 9$.

Aus $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 9 \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $r = 2{,}125$ und $z_P = 3{,}625$.

$P(9 \,|\, 4{,}5 \,|\, 3{,}625)$ ist die gesuchte Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.

Modelllösung d)

(1) Zeichnung:



Abbildung

(2) Die Ebenengleichung von E^* liefert für $(r_B;s_B)=(5;2)$ den Ortsvektor des Punktes *B*, für $(r_S;s_S)=(4{,}5;1{,}5)$ den Ortsvektor des Punktes *S*. Daher liegen die Punkte *B* und *S* und mit ihnen auch die Strecke $\overline{BS}$ sowohl [per definitionem] in der Ebene E_{BCS} als auch in der Ebene E^* und somit auf der Schnittgeraden *g* von E^* und E_{BCS}.

[Alternativ kann auch zuerst eine Gleichung der Schnittgeraden *g* berechnet werden.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten $S(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,2)$ hat.	4
2	(2) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks *ABS*.	4
3	(3) bestimmt das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt die Koordinaten der Eckpunkte des Schattendreiecks.	6
2	zeigt, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.	3
3	berechnet seinen Flächeninhalt.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass *M* der Mittelpunkt der Seitenhalbierenden der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist.	6
2	(2) zeigt, dass der Laserstrahl in Richtung des Vektors $\vec{l}$ verläuft.	4
3	(2) ermittelt die Koordinaten der Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeichnet die Spur des rotierenden Laserstrahls in die *Abbildung* ein.	4
2	(2) entscheidet, ob die Pyramidenkante $\overline{BS}$ auf der Schnittgeraden *g* liegt.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	4			
2	(2) berechnet die Seitenlängen …	4			
3	(3) bestimmt das Volumen …	6			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Koordinaten …	6			
2	zeigt, dass es …	3			
3	berechnet seinen Flächeninhalt.	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass *M* …	6			
2	(2) zeigt, dass der …	4			
3	(2) ermittelt die Koordinaten …	6			
sachlich richtige Alternativen: (16) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet die Spur …	4			
2	(2) entscheidet, ob die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A(3\,|\,0\,|\,2)$, $B(1\,|\,{-2}\,|\,2)$ und $C(5\,|\,{-2}\,|\,2)$

sowie die Abbildung $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.*

(2) *Berechnen Sie bezüglich der Abbildung f die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C' zu den Punkten A, B und C und untersuchen Sie, ob das Bilddreieck $A'B'C'$ ebenfalls rechtwinklig und gleichschenklig ist.*

(3) *Prüfen Sie, ob die Dreiecke ABC sowie $A'B'C'$ bezüglich einer Grundebene des Koordinatensystems eine besondere Lage einnehmen.*

(20 Punkte)

Gegeben sei die Ebene $E: 2x_1 - x_2 = 0$ des $\mathbb{R}^3$.

b) (1) *Begründen Sie, dass die Ebene E durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei nicht kollineare Richtungsvektoren der Ebene E sind.*

(3) *Bestimmen Sie $f(\vec{v}_1)$ und $f(\vec{v}_2)$.*

(4) *Weisen Sie nach, dass jeder Punkt der Ebene E durch die Abbildung f auf sich selbst abgebildet wird.*

(17 Punkte)

Name: ____________________

c) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

(1) *Bestimmen Sie das Bild g' der Geraden g bzgl. der Abbildung f und untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und g'.*

(2) Sei h eine beliebige zu g parallel verlaufende Gerade und sei h' das Bild von h bzgl. der Abbildung *f*.
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von h und ihrer Bildgeraden h'.

(13 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Aus $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Damit ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei A, da das Skalarprodukt der beiden obigen Vektoren gleich 0 ist. Beide Vektoren sind gleich lang mit der Länge $\sqrt{8}$; damit ist das Dreieck auch gleichschenklig.

(2) Berechnung der Ortsvektoren der Bildpunkte:

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}2 \\ -0{,}4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}6 \\ 2{,}8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -2{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -2{,}8 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$.

Damit ist auch das Bilddreieck rechtwinklig.

Beide Vektoren sind gleich lang mit der Länge $\sqrt{8}$; damit ist auch das Bilddreieck gleichschenklig. [Die beiden Dreiecke sind sogar kongruent.]

(3) Die Dreiecke *ABC* sowie *A'B'C'* liegen in einer Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene mit der Gleichung $x_3 = 2$.

[Alternative Formulierungen sind hier vorstellbar.]

Modelllösung b)

(1) Setzt man die Koordinaten des Ursprungs O(0 ; 0 ; 0) in die Gleichung der Ebene *E* ein, so ist die Gleichung erfüllt. Damit verläuft *E* durch den Ursprung.

(2) Ein Vergleich der dritten Komponenten der Vektoren zeigt, dass die Vektoren nicht kollinear sind. Da die Ebene *E* durch den Ursprung verläuft, sind die beiden Vektoren genau dann Richtungsvektoren von *E*, wenn ihre Komponenten die Ebenengleichung erfüllen. Dieser Sachverhalt ist gegeben.

(3) $\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beide Richtungsvektoren von *E* werden durch f auf sich selbst abgebildet.

(4) Da sich die Ortsvektoren aller Punkte von *E* als Linearkombinationen von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ schreiben lassen und die Abbildung *f* durch eine Matrix gegeben ist, werden alle Punkte von *E* durch f auf sich selbst abgebildet.

[Alternative: Die Gleichung der Ebene *E* wird mit Hilfe von b) (2) in Parameterform angegeben. Dann folgt durch eine Rechnung, dass *f* die Ebene *E* auf sich selbst abbildet.]

Modelllösung c)

(1) $\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+2a \\ 1-a \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2a \\ 3+a \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g' : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}\,.$

Die betrachteten Richtungsvektoren von g und g' sind Vielfache voneinander. Damit verlaufen *g* und *g'* parallel. Setzt man $a = -2$ in der Gleichung der Geraden g' ein, so ergibt sich, dass der Punkt *P*(3 ; 1 ; 4) auf der Geraden g' liegt. Da *P* offensichtlich auf der Geraden *g* liegt, gilt $g = g'$.

(2) Jede zu g parallele Gerade h hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}$.

Nun gilt

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 + 2a \\ p_2 - a \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 - 1{,}2a + 0{,}8p_2 - 0{,}8a \\ 0{,}8p_1 + 1{,}6a + 0{,}6p_2 - 0{,}6a \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 - 2a \\ 0{,}8p_1 + 0{,}6p_2 + a \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h' hat somit die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}6p_1 + 0{,}8p_2 \\ 0{,}8p_1 + 0{,}6p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}$.

Damit verlaufen h und h' parallel.

Setzt man $a = -0{,}8p_1 + 0{,}4p_2$ in der Gleichung von h' ein, so erhält man den Stütz-vektor $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ der Geraden h. Damit sind h und h' gleich.

[Alternative Lösungen sind hier vorstellbar.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass das Dreieck *ABC* rechtwinklig und gleichschenklig ist.	7
2	(2) berechnet die Koordinaten der Bildpunkte A', B', C'.	3
3	(2) untersucht das Bilddreieck $A'B'C'$ auf Rechtwinkligkeit und Gleichschenkligkeit.	7
4	(3) prüft, ob die Dreiecke *ABC* sowie $A'B'C'$ eine besondere Lage einnehmen.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass die Ebene *E* durch den Ursprung verläuft.	3
2	(2) zeigt, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zwei nicht kollineare Richtungsvektoren von *E* sind.	4
3	(3) bestimmt $f(\vec{v}_1)$ und $f(\vec{v}_2)$.	6
4	(4) weist nach, dass jeder Punkt der Ebene *E* durch die Abbildung *f* auf sich selbst abgebildet wird.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt das Bild g' von *g*.	4
2	(1) untersucht die Lagebeziehung von *g* und g'.	4
3	(2) zeigt, dass *h* und h' parallel sind.	3
4	(2) zeigt, dass $h = h'$ gilt.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das …	7			
2	(2) berechnet die Koordinaten …	3			
3	(2) untersucht das Bilddreieck …	7			
4	(3) prüft, ob die …	3			
sachlich richtige Alternativen: (20) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**20**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die …	3			
2	(2) zeigt, dass $\vec{v}_1$ …	4			
3	(3) bestimmt $f\left(\vec{v}_1\right)$ und …	6			
4	(4) weist nach, dass …	4			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt das Bild …	4			
2	(1) untersucht die Lagebeziehung …	4			
3	(2) zeigt, dass h …	3			
4	(2) zeigt, dass $h = h'$ …	2			
sachlich richtige Alternativen: (13) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von 4400 langjährigen Stammkunden, die ihren Urlaub über dieses Reisebüro buchen. Zum Ende eines jeden Jahres untersucht die Geschäftsleitung das Buchungsverhalten der Kunden im Hinblick auf die Anzahl der Urlaube, die die Kunden im abgelaufenen Jahr bei dem Reisebüro gebucht haben.
Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).
Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass sich die Stammkundschaft mit der Zeit nicht ändert.

a) Die Geschäftsleitung hat festgestellt, dass das Buchungsverhalten der Stammkunden während eines Jahres vom Buchungsverhalten im vorangegangenen Jahr abhängt. So wurde in früheren Jahren von folgendem Buchungsverhalten der Stammkunden bei dem Reisebüro ausgegangen:

- Von den Kunden der Gruppe E eines Jahres buchen im folgenden Jahr 75 % ebenfalls genau einen Urlaub; 10 % der Gruppe buchen mehr als einen Urlaub und 15 % keinen Urlaub.
- Von den Kunden, die in einem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben, buchen 60 % im Folgejahr ebenfalls mehr als einen Urlaub, 20 % buchen genau einen Urlaub und 20 % buchen keinen Urlaub.
- 57 % der Kunden der Gruppe K buchen bei dem Reisebüro im nächsten Jahr genau einen Urlaub, 28 % sogar mehr als einen Urlaub, während 15 % auch im Folgejahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro buchen.

Stellen Sie dieses Buchungsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar und bestimmen Sie eine Übergangsmatrix, die dieses Verhalten beschreibt.

(12 Punkte)

Name: ____________________

b) Aufgrund einer Änderung des Urlaubsverhaltens gilt aktuell die folgende Übergangsmatrix ***A***:

$$\begin{array}{r|c} & \textit{von:}\quad E \qquad M \qquad K \\ \hline \textit{nach:}\ E & \\ M & \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \\ K & \end{array}$$

(1) *Geben Sie drei Änderungen im Buchungsverhalten an, die gegenüber den früheren Jahren erkennbar sind.*

Im Jahr 2011 buchten 2624 Kunden genau einen Urlaub, 1206 Kunden buchten mehr als einen Urlaub, während 570 Kunden keine Buchung bei dem Reisebüro durchführten.

(2) *Bestimmen Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix **A** gegeben sind, die zu erwartende Verteilung für das Jahr 2012.*

(3) *Bestimmen Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix **A** gegeben sind, die Verteilung für das Jahr 2010.*

(16 Punkte)

c) Die Geschäftsleitung strebt aus Gründen der Planungssicherheit an, dass die Anzahl der Kunden der einzelnen Gruppen E, M und K von Jahr zu Jahr gleich bleibt.

*Zeigen Sie durch Berechnung, dass es bei dem durch die Matrix **A** beschriebenen Buchungsverhalten eine Verteilung der Kunden des Reisebüros auf die Gruppen E, M und K so gibt, dass die Anzahl der Kunden der einzelnen Gruppen E, M und K von Jahr zu Jahr gleich bleibt.*

(11 Punkte)

Name: ____________________

d) Durch gezielte Werbemaßnahmen wird während des Jahres 2012 das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppe K so beeinflusst, dass von diesem Jahr an jeweils gegenüber dem vorangegangenen Jahr nur noch 5 % der Kunden der Gruppe K keinen Urlaub buchen. Dabei wird das Buchungsverhalten der Kunden der beiden anderen Kundengruppen E und M nicht beeinflusst. Es wird weiterhin von einer konstanten Anzahl von Stammkunden ausgegangen.

(1) *Erklären Sie, dass das Buchungsverhalten dann durch eine Matrix*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \textit{ mit } 0 \le q \le 0{,}95 \textit{ beschrieben werden kann.}$$

(2) *Gehen Sie von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2011 angegebenen Buchungen aus und ermitteln Sie den Wert von q für den Fall, dass sich am Ende des Jahres 2012 herausstellt, dass 2699 Kunden im Jahr 2012 genau einen Urlaub gebucht haben.*

(11 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

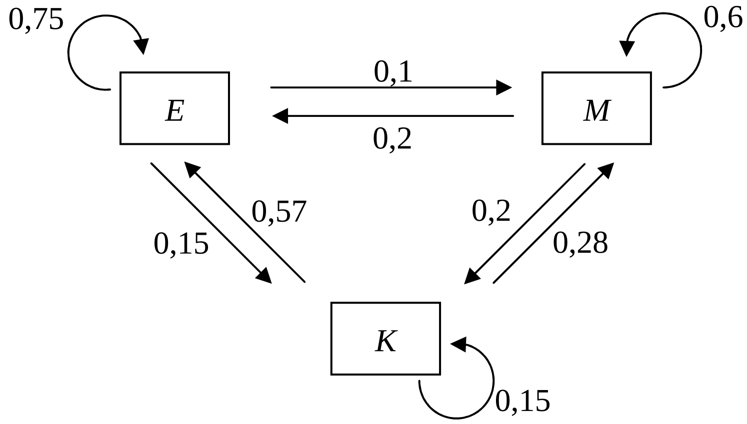
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



$$\begin{array}{r|c} & \textit{von:} \quad E \quad\; M \quad\; K \\ \hline \begin{array}{r} \textit{nach:}\;\; E \\ M \\ K \end{array} & \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Modelllösung b)

(1) Als Änderungen können angegeben werden:

- Kunden, die in einem Jahr genau einen Urlaub gebucht haben, buchen im Folgejahr häufiger als früher auch nur einen Urlaub.
- Kunden, die in einem Jahr nur einen Urlaub gebucht haben, pausieren im Folgejahr seltener als früher.
- Kunden, die in einem Jahr pausiert haben, buchen im Folgejahr häufiger als früher genau einen Urlaub.
- Kunden, die in einem Jahr pausiert haben, buchen im Folgejahr häufiger als früher zwei oder mehr Urlaube.
- Kunden, die in einem Jahr pausiert haben, pausieren im Folgejahr seltener als früher.

[Auch kurz gefasste Antworten wie z. B. „Übergang von E nach E zugenommen“ werden als richtig akzeptiert. Es genügen drei der aufgeführten Änderungen. Quantifizierungen sind nicht erforderlich.]

(2) $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2682,4 \\ 1157 \\ 560,6 \end{pmatrix}$

Für das Jahr 2012 wird erwartet, dass etwa 2682 Kunden genau einen Urlaub und etwa 1157 Kunden mehr als einen Urlaub buchen; für die restlichen etwa 561 Kunden wird erwartet, dass sie pausieren.

[Hier sind auch andere sinnvolle Rundungen akzeptabel.]

(3) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0,8\,x & + & 0,2\,y & + & 0,6\,z & = & 2624 \\ 0,1\,x & + & 0,6\,y & + & 0,3\,z & = & 1206 \\ 0,1\,x & + & 0,2\,y & + & 0,1\,z & = & 570 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix}$$

ist zu lösen. Dabei bezeichnet x die Anzahl der Kunden, die im Jahr 2010 genau einen Urlaub gebucht haben, y die Anzahl der Kunden, die im Jahr 2010 mehr als einen Urlaub buchten, und z die Anzahl der Stammkunden, die im Jahr 2010 keinen Urlaub buchten.

Als Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt sich: $x = 2520$, $y = 1300$, $z = 580$.

Im Jahr 2010 buchten 2520 Kunden genau einen Urlaub, 1300 Kunden mehr als einen Urlaub, während 580 Kunden gar keinen Urlaub buchten.

Modelllösung c)

Bezeichnet x für ein bestimmtes Jahr die Anzahl der Kunden, die in dem Jahr genau einen Urlaub buchen, y die Anzahl der Kunden, die in dem Jahr mehr als einen Urlaub buchen, und z die Anzahl der Kunden, die in dem Jahr keinen Urlaub buchen, so ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0,8\,x & + & 0,2\,y & + & 0,6\,z & = & x \\ 0,1\,x & + & 0,6\,y & + & 0,3\,z & = & y \\ x & + & y & + & z & = & 4400 \end{array}$$

zu lösen bzw. der Fixvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zur Matrix $\boldsymbol{A}$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 4400$

zu bestimmen.

Als Lösung ergibt sich: $x = 2750$, $y = 1100$, $z = 550$.

Die Anzahl der Kunden der einzelnen Gruppen E, M und K bleibt von Jahr zu Jahr gleich, wenn in einem Jahr 2750 Kunden genau einen Urlaub, 1100 Kunden mehr als einen Urlaub und 550 Kunden gar keinen Urlaub buchen.

Modelllösung d)

(1) Die Matrix $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & q \\ 0,1 & 0,6 & 0,95-q \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}$ mit $0 \le q \le 0,95$ unterscheidet sich von der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ im Element b_{33} und in mindestens einem der Elemente $b_{13} = q$ und $b_{23} = 0,95 - q$.

Das Element $b_{33} = 0,05$ gibt an, dass (nur noch) 5 % der Kunden der Gruppe K eines Jahres im Folgejahr ebenfalls keinen Urlaub buchen.

Das Element b_{13} gibt an, welcher Anteil der Kunden der Gruppe K eines Jahres im Folgejahr genau einen Urlaub bucht; das Element b_{23} gibt an, welcher Anteil der Kunden der Gruppe K eines Jahres im Folgejahr mehr als einen Urlaub bucht. Da b_{13} und b_{23} zusammen den Anteil der Kunden der Gruppe K eines Jahres angeben, der im Folgejahr nicht schon wieder pausiert, muss $b_{13} + b_{23} = 0,95$ gelten und aus $b_{13} \ge 0$ und $b_{23} \ge 0$ folgt $0 \le q \le 0,95$.

(2) Für die Anzahl der Kunden, die 2012 genau einen Urlaub buchen, gilt dann

$0,8 \cdot 2624 + 0,2 \cdot 1206 + q \cdot 570 = 2699$, also $q = \frac{1793}{2850} \approx 0,63$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	stellt das Buchungsverhalten der Kunden in einem Übergangsgraphen dar.	6
2	bestimmt eine Übergangsmatrix, die das Buchungsverhalten beschreibt.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) gibt drei Änderungen im Buchungsverhalten an, die gegenüber den früheren Jahren erkennbar sind.	3
2	(2) bestimmt die zu erwartende Verteilung für das Jahr 2012.	4
3	(3) ermittelt einen Lösungsansatz für die Verteilung für das Jahr 2010.	3
4	(3) bestimmt die Verteilung für das Jahr 2010.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	5
2	ermittelt die Lösung des Gleichungssystems.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) erklärt, dass das Buchungsverhalten durch die Matrix ***B*** beschrieben werden kann.	6
2	(2) ermittelt den Wert von q.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt das Buchungsverhalten …	6			
2	bestimmt eine Übergangsmatrix …	6			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt drei Änderungen …	3			
2	(2) bestimmt die zu …	4			
3	(3) ermittelt einen Lösungsansatz …	3			
4	(3) bestimmt die Verteilung …	6			
sachlich richtige Alternativen: (16) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**16**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	5			
2	ermittelt die Lösung …	6			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) erklärt, dass das …	6			
2	(2) ermittelt den Wert …	5			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Sogenannte Smartphones werden immer beliebter. Ein Sechstel aller Handy-Besitzer (ca. 10 Millionen) besitzt ein Smartphone.
Im Folgenden sollen die genannten Anteile auch als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:*

E_1: *Unter 100 zufällig ausgewählten Handy-Besitzern haben genau 15 ein Smartphone.*

E_2: *Unter 200 zufällig ausgewählten Handy-Besitzern besitzen mindestens 25 ein Smartphone.*

E_3: *Unter 200 zufällig ausgewählten Handy-Besitzern besitzen mindestens 32 und höchstens 38 ein Smartphone.*

(9 Punkte)

In der Produktion eines führenden Herstellers werden 4 % aller Geräte fehlerhaft hergestellt. Es wird einfachheitshalber angenommen, dass die Fehler zufällig und unabhängig voneinander auftreten.

b) (1) Ein Kunde kauft ein Smartphone von diesem Hersteller. Ist dieses defekt, erhält er im Austausch ein neues Gerät.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, zweimal nacheinander ein defektes Smartphone zu erhalten.

(2) *Bestimmen Sie die Anzahl von Geräten, die der laufenden Produktion mindestens entnommen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein fehlerhaftes Gerät zu erhalten.*

(8 Punkte)

Name: ____________________

Durch eine Produktionsumstellung konnte der Fehleranteil auf 2 % gesenkt werden. Aus einer Charge, die vor zwei Wochen produziert wurde, wurde eine Stichprobe von 200 Smartphones ausgewählt. Unter diesen 200 Smartphones befinden sich genau sechs defekte.

c) *Entscheiden Sie mit Hilfe der 1-σ-Umgebung um den Erwartungswert, ob die Maschinen vor zwei Wochen vermutlich noch mit 4 % oder bereits eher mit nur 2 % Fehleranteil produziert haben.*

(10 Punkte)

d) Da der Anteil der defekten Smartphones mit 2 % immer noch zu hoch ist, wird nun ein Prüfgerät eingesetzt, das defekte Smartphones mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % erkennt, allerdings auch 0,1 % der funktionsfähigen Smartphones als defekt einstuft.

(1) *Stellen Sie die Situation mit Hilfe eines vollständigen Baumdiagramms graphisch dar.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Smartphone von dem Prüfgerät als defekt eingestuft wird.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Smartphone in Wirklichkeit nicht defekt ist, obwohl das Prüfgerät es als defekt eingestuft hat.*

(12 Punkte)

e) Die Herstellerfirma rechtfertigte die letzte Preiserhöhung mit der Behauptung, dass nach einer Verbesserung der Produktion nun maximal 1 % aller Smartphones defekt sind. Ein Großhändler, der von der Preiserhöhung betroffen ist, bezweifelt diese Behauptung und möchte sie daher mit Hilfe eines Hypothesentests überprüfen. Er entnimmt dazu der Lieferung zufällig eine Stichprobe von 1000 Stück und testet die Hypothese $H_0: p \leq 0{,}01$.

(1) *Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für die angegebene Hypothese auf Grundlage der Stichprobe mit einem Signifikanzniveau von* $\alpha = 0{,}05$.

(2) *Beschreiben Sie den Fehler erster und zweiter Art im Sachzusammenhang.*

(11 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \ = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k)=\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19					0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20					0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21					0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22						0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23						0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24						0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25							0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26							0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27							0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28								0,9924	0,8389	21	
	29								0,9966	0,8987	20	
	30								0,9986	0,9405	19	
	31								0,9995	0,9675	18	
	32								0,9998	0,9836	17	
	33								0,9999	0,9923	16	
	34									0,9967	15	
	35									0,9987	14	
	36									0,9995	13	
	37									0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5 = *p*	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k)\;=\;\binom{n}{0}p^0\left(1-p\right)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$$

n	k	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		n
	0	0,1326	0,0059	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0113	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0367	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0903	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,1799	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,3032	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,4471	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,5926	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,7220	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,8243	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,8972	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,9441	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,9718	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9867	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9942	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9976	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9991	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9997	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9999	0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45									0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46									0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47									0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48									0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49										0,9729	0,4602	50	
	50										0,9832	0,5398	49	
	51										0,9900	0,6178	48	
	52										0,9942	0,6914	47	
	53										0,9968	0,7579	46	
	54										0,9983	0,8159	45	
	55										0,9991	0,8644	44	
	56										0,9996	0,9033	43	
	57										0,9998	0,9334	42	
	58										0,9999	0,9557	41	
	59											0,9716	40	
	60											0,9824	39	
	61											0,9895	38	
	62											0,9940	37	
	63											0,9967	36	
	64											0,9982	35	
	65											0,9991	34	
	66											0,9996	33	
	67											0,9998	32	
	68											0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p							
n	*k*	0,02	0,04	0,05	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24				0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25				0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26				0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27				0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28				0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29				0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30				0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31				0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32				0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33				0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34				0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35				0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36				0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37				0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38					0,8369	0,4019	161	
	39					0,8777	0,4718	160	
	40					0,9106	0,5422	159	
	41					0,9362	0,6108	158	
	42					0,9556	0,6758	157	
	43					0,9699	0,7355	156	
	44					0,9801	0,7887	155	
	45					0,9872	0,8349	154	
	46					0,9919	0,8738	153	
	47					0,9950	0,9056	152	
	48					0,9970	0,9310	151	
	49					0,9983	0,9506	150	
	50					0,9990	0,9655	149	
	51					0,9995	0,9764	148	
	52					0,9997	0,9843	147	
	53					0,9998	0,9897	146	
	54					0,9999	0,9934	145	
	55						0,9959	144	
	56						0,9975	143	
	57						0,9985	142	
	58						0,9991	141	
	59						0,9995	140	
	60						0,9997	139	
	61						0,9998	138	
	62						0,9999	137	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
		p							

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 1000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

p

n	k	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04		n
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	999	
	1	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	998	
	2	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	997	
	3	0,0101	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	996	
	4	0,0287	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	995	
	5	0,0661	0,0026	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	994	
	6	0,1289	0,0073	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	993	
	7	0,2189	0,0174	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	992	
	8	0,3317	0,0364	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	991	
	9	0,4573	0,0684	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	990	
	10	0,5830	0,1166	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	989	
	11	0,6974	0,1828	0,0204	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	988	
	12	0,7925	0,2657	0,0376	0,0029	0,0001	0,0000	0,0000	987	
	13	0,8656	0,3618	0,0642	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	986	
	14	0,9176	0,4649	0,1025	0,0116	0,0008	0,0000	0,0000	985	
	15	0,9521	0,5681	0,1539	0,0211	0,0017	0,0001	0,0000	984	
	16	0,9736	0,6649	0,2185	0,0360	0,0035	0,0002	0,0000	983	
	17	0,9862	0,7501	0,2947	0,0582	0,0066	0,0005	0,0000	982	
	18	0,9931	0,8211	0,3797	0,0893	0,0119	0,0010	0,0001	981	
	19	0,9967	0,8769	0,4694	0,1304	0,0204	0,0020	0,0001	980	
	20	0,9985	0,9186	0,5591	0,1822	0,0333	0,0038	0,0003	979	
	21	0,9993	0,9482	0,6446	0,2442	0,0519	0,0068	0,0006	978	
	22	0,9997	0,9683	0,7222	0,3149	0,0774	0,0116	0,0012	977	
	23	0,9999	0,9813	0,7895	0,3919	0,1110	0,0191	0,0022	976	
	24		0,9894	0,8455	0,4724	0,1534	0,0302	0,0039	975	
	25		0,9942	0,8901	0,5529	0,2045	0,0458	0,0067	974	
	26		0,9969	0,9242	0,6304	0,2637	0,0670	0,0110	973	
	27		0,9984	0,9493	0,7020	0,3299	0,0948	0,0175	972	
	28		0,9992	0,9671	0,7658	0,4009	0,1299	0,0270	971	
	29		0,9996	0,9793	0,8207	0,4746	0,1725	0,0402	970	
	30		0,9998	0,9874	0,8662	0,5484	0,2225	0,0580	969	
	31		0,9999	0,9925	0,9027	0,6197	0,2793	0,0812	968	
	32			0,9957	0,9311	0,6866	0,3416	0,1105	967	
	33			0,9976	0,9524	0,7472	0,4079	0,1463	966	
1000	34			0,9987	0,9680	0,8005	0,4763	0,1887	965	1000
	35			0,9993	0,9790	0,8461	0,5448	0,2374	964	
	36			0,9996	0,9865	0,8838	0,6114	0,2919	963	
	37			0,9998	0,9916	0,9142	0,6743	0,3511	962	
	38			0,9999	0,9949	0,9381	0,7321	0,4135	961	
	39				0,9969	0,9563	0,7839	0,4777	960	
	40				0,9982	0,9698	0,8289	0,5419	959	
	41				0,9990	0,9796	0,8672	0,6046	958	
	42				0,9994	0,9865	0,8989	0,6642	957	
	43				0,9997	0,9912	0,9246	0,7196	956	
	44				0,9998	0,9944	0,9448	0,7698	955	
	45				0,9999	0,9965	0,9603	0,8142	954	
	46					0,9979	0,9721	0,8526	953	
	47					0,9987	0,9807	0,8851	952	
	48					0,9993	0,9869	0,9119	951	
	49					0,9996	0,9913	0,9337	950	
	50					0,9998	0,9943	0,9509	949	
	51					0,9999	0,9964	0,9643	948	
	52					0,9999	0,9977	0,9745	947	
	53						0,9986	0,9821	946	
	54						0,9991	0,9876	945	
	55						0,9995	0,9916	944	
	56						0,9997	0,9944	943	
	57						0,9998	0,9963	942	
	58						0,9999	0,9976	941	
	59						0,9999	0,9985	940	
	60							0,9991	939	
	61							0,9994	938	
	62							0,9996	937	
	63							0,9998	936	
	64							0,9999	935	
	65							0,9999	934	
n		0,99	0,985	0,98	0,975	0,97	0,965	0,96	k	n

p

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Nur für den Dienstgebrauch!

Name: ______________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

X sei binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$P(X = 15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0{,}1002$ [$\approx 0{,}3877 - 0{,}2874 = 0{,}1003$ bei Verwendung der Tabelle].

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

X sei binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - \sum_{k=0}^{24} \binom{200}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k}$$
$$\approx 0{,}9574.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 beträgt:

$$P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31) \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}8369 - 0{,}3711 = 0{,}4658\,.$$

Modelllösung b)

(1) $P(\text{"Zwei defekte nacheinander"}) = 0{,}04^2 = 0{,}0016$.

(2) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der fehlerhaften Smartphones.

X sei binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}04$. Es soll gelten:

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}96^n \leq 0{,}01$$
$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}96)} \approx 112{,}81.$$

Es müssen also mindestens 113 Smartphones entnommen werden.

Modelllösung c)

Bestimme zunächst die 1-σ-Umgebungen zu $p = 0{,}02$ und $p = 0{,}04$:

***p* = 0,02:** Die Standardabweichung beträgt $\sigma_1 = \sqrt{200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} \approx 1{,}98$,

der Erwartungswert $\mu_1 = 200 \cdot 0{,}02 = 4$:

$I_{0,02} \approx \left[4 - 1 \cdot 1{,}98; 4 + 1 \cdot 1{,}98\right] = [2{,}02; 5{,}98]$.

***p* = 0,04:** Die Standardabweichung beträgt $\sigma_2 = \sqrt{200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 2{,}77$,

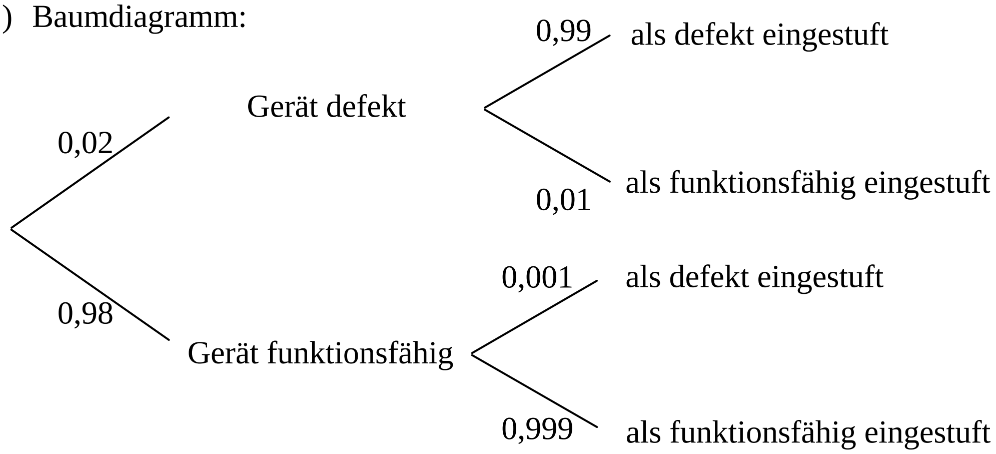
der Erwartungswert $\mu_2 = 200 \cdot 0{,}04 = 8$:

$I_{0,04} \approx \left[8 - 1 \cdot 2{,}77; 8 + 1 \cdot 2{,}77\right] = [5{,}23; 10{,}77]$.

Der Wert 6 liegt im Intervall $I_{0,04}$, nicht jedoch in $I_{0,02}$. Die Abweichung zwischen dem Erwartungswert μ_1 und der Anzahl der defekten Smartphones liegt also nur für $p = 0{,}04$ im Bereich der einfachen Standardabweichung. Es ist also wahrscheinlicher, dass die Stichprobe aus der Produktion der schlechteren Qualität (4 %) stammt.

Modelllösung d)

(1) Baumdiagramm:



(2) $P(\text{als defekt eingestuft}) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}001 = 0{,}02078$

(3) $P_{\text{als defekt eingestuft}}(\text{nicht defekt}) = \dfrac{0{,}98 \cdot 0{,}001}{0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}001} \approx 0{,}047$

[Alternativ ist auch eine Lösung durch Umdrehen des Baumdiagramms möglich.]

Modelllösung e)

(1) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe an. Dann kann X als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}01$ und Stichprobenanzahl $n = 1000$.

Der Erwartungswert von X beträgt $\mu = 1000 \cdot 0{,}01 = 10$, die Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} \approx 3{,}146 > 3$.

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt näherungsweise:

$P_{\mathrm{H}_0}\left(X \le \mu + 1{,}64 \cdot \sigma\right) \ge 0{,}95$ und es ist $\mu + 1{,}64 \cdot \sigma \approx 15{,}16$.

Als Entscheidungsregel erhält man:

Die Hypothese H_0 wird genau dann abgelehnt, wenn $X \ge 16$ ist, ansonsten wird die Hypothese beibehalten.

(2) Fehler 1. Art: Die Hypothese des Herstellers $p \le 0{,}01$ ist wahr, wird aber aufgrund einer zufällig hohen Anzahl defekter Smartphones fälschlicherweise verworfen.

Fehler 2. Art: Die Hypothese (das Versprechen) des Herstellers ist falsch, sie wird aber aufgrund einer zufällig geringen Anzahl defekter Smartphones in der Stichprobe nicht abgelehnt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass genau 15 Handy-Besitzer ein Smartphone haben.	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	3
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 32 und höchstens 38 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit, zweimal nacheinander ein defektes Smartphone zu erhalten.	2
2	(2) bestimmt einen Ansatz zur Ermittlung des gesuchten Stichprobenumfangs.	3
3	(2) berechnet das gesuchte n.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet Standardabweichung und Erwartungswert für $p = 0{,}02$.	3
2	berechnet Standardabweichung und Erwartungswert für $p = 0{,}04$.	3
3	entscheidet aufgrund der Ergebnisse.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) stellt die Situation mit Hilfe eines vollständigen Baumdiagramms dar.	6
2	(2) bestimmt $P(\text{als defekt eingestuft})$.	3
3	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5
2	(2) beschreibt die Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	4			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
2	(2) bestimmt einen Ansatz …	3			
3	(2) berechnet das gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet Standardabweichung und …	3			
2	berechnet Standardabweichung und …	3			
3	entscheidet aufgrund der …	4			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die Situation …	6			
2	(2) bestimmt P(als defekt eingestuft) .	3			
3	(3) bestimmt die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
2	(2) beschreibt die Fehler …	6			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

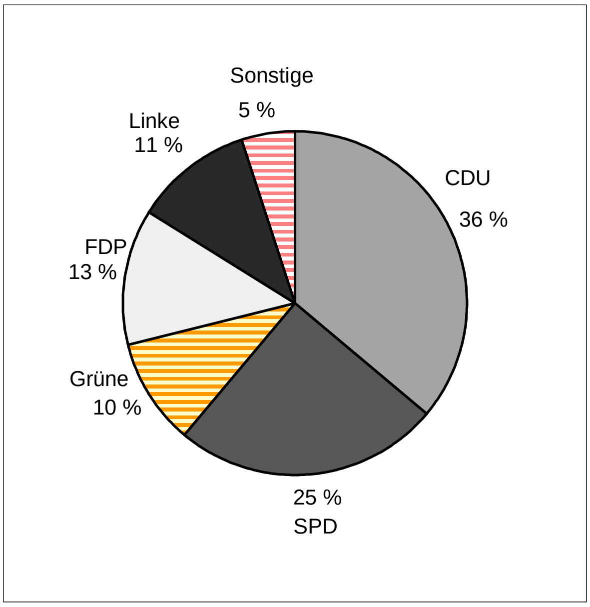
Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die sogenannte Sonntagsfrage gibt an, mit welchen Prozentanteilen die einzelnen Parteien rechnen könnten, wenn diesen Sonntag Bundestagswahl wäre.

Bei der Sonntagsfrage des ZDF-Politbarometers vom 18. September 2009 ergab sich folgendes Stichprobenergebnis (befragt wurden 1352 zufällig ausgewählte Personen, repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland):



(Werte gerundet)
Quelle: http://politbarometer.zdf.de

Im Folgenden sollen die genannten Anteile auch als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Name: ____________________

a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Wahlberechtigten, die die genannte Partei am auf die Umfrage folgenden Sonntag wählen würden.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Bürgern mindestens 30 die SPD wählen würden.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Bürgern mindestens 8 und höchstens 18 Personen die Grünen wählen würden.*

(3) *Bestimmen Sie die Anzahl der Personen, die man mindestens befragen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Person findet, die die CDU wählen würde.*

(4) Ein Meinungsforschungsinstitut ermittelt seine Daten durch Telefonumfragen bei einer ausgewählten großen Anzahl von Personen, repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Ein Mitarbeiter befragt nacheinander sieben zufällig ausgewählte Personen dieses Personenkreises.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau drei Personen unter diesen sieben befinden, die die CDU wählen würden, und diese drei auch noch unmittelbar nacheinander befragt werden.

(16 Punkte)

b) Ein Wahlkampfmanager der Grünen gibt sich mit der alleinigen Nennung des Umfrageergebnisses von 10 % nicht zufrieden. Er möchte gerne die untere und obere Grenze des Intervalls angegeben bekommen, welches mit dem Umfrageergebnis verträglich ist.

Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der Personen, die die Grünen wählen würden.

(10 Punkte)

Name: ____________________

c) Neun Tage nach der obigen Umfrage vom 18. September 2009 fand am 27. September 2009 die letzte Bundestagswahl statt. Das tatsächliche Wahlergebnis der FDP betrug dann 14,6 %.
Jemand behauptet: „Das Wahlergebnis wird stark durch kurzentschlossene Wähler beeinflusst. Umfragewerte vor der Wahl haben daher wenig Aussagekraft bezüglich des tatsächlichen Wahlausgangs.“

Prüfen Sie die Verträglichkeit des Umfrageergebnisses (13 %) mit dem tatsächlichen Wahlergebnis (14,6 %) und beurteilen Sie obige Behauptung bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %.

(10 Punkte)

d) Es wird davon ausgegangen, dass der tatsächliche Wähleranteil p der Grünen größer als 0,1 ist.

Bestimmen Sie für einen Beispielwert $p > 0{,}1$ den Umfang der Stichprobe, der bei dieser Umfrage am 18. September 2009 mindestens nötig war, um das Wahlergebnis der Grünen am folgenden Sonntag mit einer Genauigkeit von +/– 2 Prozentpunkten vorherzusagen (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %).

Erklären Sie, welcher Zusammenhang zwischen der Breite des Konfidenzintervalls, der zugehörigen Sicherheitswahrscheinlichkeit und dem Stichprobenumfang besteht.

(14 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19					0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20					0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21					0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22						0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23						0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24						0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25							0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26							0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27							0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28								0,9924	0,8389	21	
	29								0,9966	0,8987	20	
	30								0,9986	0,9405	19	
	31								0,9995	0,9675	18	
	32								0,9998	0,9836	17	
	33								0,9999	0,9923	16	
	34									0,9967	15	
	35					Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000				0,9987	14	
	36									0,9995	13	
	37									0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

							p							
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0113	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0367	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0903	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,1799	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,3032	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,4471	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,5926	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,7220	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,8243	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,8972	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,9441	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,9718	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9867	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9942	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9976	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9991	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9997	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9999	0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45									0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46									0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47									0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48									0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49										0,9729	0,4602	50	
	50										0,9832	0,5398	49	
	51										0,9900	0,6178	48	
	52										0,9942	0,6914	47	
	53										0,9968	0,7579	46	
	54										0,9983	0,8159	45	
	55										0,9991	0,8644	44	
	56										0,9996	0,9033	43	
	57										0,9998	0,9334	42	
	58										0,9999	0,9557	41	
	59											0,9716	40	
	60											0,9824	39	
	61											0,9895	38	
	62											0,9940	37	
	63											0,9967	36	
	64											0,9982	35	
	65											0,9991	34	
	66											0,9996	33	
	67											0,9998	32	
	68											0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
							p							

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p							
n	k	0,02	0,04	0,05	0,1	1/6	0,2		n
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24				0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25				0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26				0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27				0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28				0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29				0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30				0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31				0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32				0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33				0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34				0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35				0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36				0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37				0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38					0,8369	0,4019	161	
	39					0,8777	0,4718	160	
	40					0,9106	0,5422	159	
	41					0,9362	0,6108	158	
	42					0,9556	0,6758	157	
	43					0,9699	0,7355	156	
	44					0,9801	0,7887	155	
	45					0,9872	0,8349	154	
	46					0,9919	0,8738	153	
	47					0,9950	0,9056	152	
	48					0,9970	0,9310	151	
	49					0,9983	0,9506	150	
	50					0,9990	0,9655	149	
	51					0,9995	0,9764	148	
	52					0,9997	0,9843	147	
	53					0,9998	0,9897	146	
	54					0,9999	0,9934	145	
	55						0,9959	144	
	56						0,9975	143	
	57						0,9985	142	
	58						0,9991	141	
	59						0,9995	140	
	60						0,9997	139	
	61						0,9998	138	
	62						0,9999	137	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	5/6	0,8	k	n
		p							

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 1000

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k)\;=\;\binom{n}{0}p^{0}\left(1-p\right)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}$$

n	k	p = 0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04		n
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	999	
	1	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	998	
	2	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	997	
	3	0,0101	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	996	
	4	0,0287	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	995	
	5	0,0661	0,0026	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	994	
	6	0,1289	0,0073	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	993	
	7	0,2189	0,0174	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	992	
	8	0,3317	0,0364	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	991	
	9	0,4573	0,0684	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	990	
	10	0,5830	0,1166	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	989	
	11	0,6974	0,1828	0,0204	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	988	
	12	0,7925	0,2657	0,0376	0,0029	0,0001	0,0000	0,0000	987	
	13	0,8656	0,3618	0,0642	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	986	
	14	0,9176	0,4649	0,1025	0,0116	0,0008	0,0000	0,0000	985	
	15	0,9521	0,5681	0,1539	0,0211	0,0017	0,0001	0,0000	984	
	16	0,9736	0,6649	0,2185	0,0360	0,0035	0,0002	0,0000	983	
	17	0,9862	0,7501	0,2947	0,0582	0,0066	0,0005	0,0000	982	
	18	0,9931	0,8211	0,3797	0,0893	0,0119	0,0010	0,0001	981	
	19	0,9967	0,8769	0,4694	0,1304	0,0204	0,0020	0,0001	980	
	20	0,9985	0,9186	0,5591	0,1822	0,0333	0,0038	0,0003	979	
	21	0,9993	0,9482	0,6446	0,2442	0,0519	0,0068	0,0006	978	
	22	0,9997	0,9683	0,7222	0,3149	0,0774	0,0116	0,0012	977	
	23	0,9999	0,9813	0,7895	0,3919	0,1110	0,0191	0,0022	976	
	24		0,9894	0,8455	0,4724	0,1534	0,0302	0,0039	975	
	25		0,9942	0,8901	0,5529	0,2045	0,0458	0,0067	974	
	26		0,9969	0,9242	0,6304	0,2637	0,0670	0,0110	973	
	27		0,9984	0,9493	0,7020	0,3299	0,0948	0,0175	972	
	28		0,9992	0,9671	0,7658	0,4009	0,1299	0,0270	971	
	29		0,9996	0,9793	0,8207	0,4746	0,1725	0,0402	970	
	30		0,9998	0,9874	0,8662	0,5484	0,2225	0,0580	969	
	31		0,9999	0,9925	0,9027	0,6197	0,2793	0,0812	968	
	32			0,9957	0,9311	0,6866	0,3416	0,1105	967	
	33			0,9976	0,9524	0,7472	0,4079	0,1463	966	
1000	34			0,9987	0,9680	0,8005	0,4763	0,1887	965	1000
	35			0,9993	0,9790	0,8461	0,5448	0,2374	964	
	36			0,9996	0,9865	0,8838	0,6114	0,2919	963	
	37			0,9998	0,9916	0,9142	0,6743	0,3511	962	
	38			0,9999	0,9949	0,9381	0,7321	0,4135	961	
	39				0,9969	0,9563	0,7839	0,4777	960	
	40				0,9982	0,9698	0,8289	0,5419	959	
	41				0,9990	0,9796	0,8672	0,6046	958	
	42				0,9994	0,9865	0,8989	0,6642	957	
	43				0,9997	0,9912	0,9246	0,7196	956	
	44				0,9998	0,9944	0,9448	0,7698	955	
	45				0,9999	0,9965	0,9603	0,8142	954	
	46					0,9979	0,9721	0,8526	953	
	47					0,9987	0,9807	0,8851	952	
	48					0,9993	0,9869	0,9119	951	
	49					0,9996	0,9913	0,9337	950	
	50					0,9998	0,9943	0,9509	949	
	51					0,9999	0,9964	0,9643	948	
	52					0,9999	0,9977	0,9745	947	
	53						0,9986	0,9821	946	
	54						0,9991	0,9876	945	
	55						0,9995	0,9916	944	
	56						0,9997	0,9944	943	
	57						0,9998	0,9963	942	
	58						0,9999	0,9976	941	
	59						0,9999	0,9985	940	
	60							0,9991	939	
	61							0,9994	938	
	62							0,9996	937	
	63							0,9998	936	
	64							0,9999	935	
	65							0,9999	934	
n		0,99	0,985	0,98	0,975	0,97	0,965	0,96 = p	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es ist günstig, die Zufallsgröße X als binomialverteilt anzunehmen mit $n = 100$ und $p = 0{,}25$.

$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) \approx 1 - 0{,}8505 = 0{,}1495$

(2) Es ist günstig, die Zufallsgröße X als binomialverteilt anzunehmen mit $n = 200$ und $p = 0{,}1$.

$P(8 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 7) \approx 0{,}3724 - 0{,}0005 = 0{,}3719$

(3) n ist so zu bestimmen, dass

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) \geq 0{,}9 &\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \\
&\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0{,}1 \\
&\Leftrightarrow 0{,}64^n \leq 0{,}1 \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}64} \approx 5{,}16
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow n \geq 6$

Es müssen mindestens 6 Personen befragt werden.

(4) Es gibt 5 Möglichkeiten für die 3 Personen, die die CDU wählen würden, in einer Reihe von 7 Personen genau nacheinander angerufen zu werden (1-2-3; 2-3-4; ... ; 5-6-7). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$p = 5 \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^4 = 0{,}0391$.

Modelllösung b)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Wahlberechtigten, die am nächsten Sonntag die Grünen wählen würden. Dann ist es günstig, X als binomialverteilt anzunehmen mit $n = 1352$ und unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit p. Aus dem Umfrageergebnis erhält man gerundet: $\frac{X}{1352} = 0{,}1$. Der folgende Ansatz führt dann zur Ermittlung des gesuchten Konfidenzintervalls:

$$\left|\frac{X}{n}-p\right| \le z\cdot\frac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} \Leftrightarrow \left|0,1-p\right| \le 1,96\cdot\frac{\sqrt{1352\cdot p\cdot(1-p)}}{1352}$$

$$\Leftrightarrow (0,1-p)^2 \le \frac{1,96^2}{1352}(p-p^2)$$

$$\Leftrightarrow 1,00284p^2 - 0,20284p + 0,01 \le 0$$

Die Grenzen erhält man durch Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung:

$p_1 \approx 0,0851$, $p_2 \approx 0,1171$.

Das Konfidenzintervall lautet [0,0851; 0,1171].

Modelllösung c)

Die Zufallsgröße *X* beschreibt die Anzahl der Wahlberechtigten, die am nächsten Sonntag die FDP wählen würden.

Gesucht sind die Anteile *X*/1352, die noch verträglich sind mit dem Wahlergebnis von *p* = 0,146. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % führt der folgende Ansatz zur Ermittlung des gesuchten Anteils:

$$\left|\frac{X}{1352}-0,146\right| \le 1,96\cdot\sqrt{\frac{0,146\cdot(1-0,146)}{1352}}\,.$$

Durch Auflösen des Betrags erhält man gerundet:

$$0,146-1,96\cdot\sqrt{0,000092} \le \frac{X}{1352} \le 0,146+1,96\cdot\sqrt{0,000092}.$$

Gerundet ergibt dies:

$$0,1272 \le \frac{X}{1352} \le 0,1648\,.$$

Verträglich mit dem Ergebnis der Bundestagswahl ist somit das Intervall [0,1272;0,1648]. Damit weicht das Umfrageergebnis der FDP nicht signifikant vom Wahlergebnis ab. Die Behauptung wird daher nicht bestätigt. Bei dem Umfrageergebnis von 13 % (= 0,13) kann es sich um eine zufällige Abweichung nach unten handeln. Die Kurzentschlossenheit der Wähler muss nicht die Ursache sein.

Modelllösung d)

Für die Fehlerbereiche gilt folgender Zusammenhang:

$\left|\frac{X}{n} - p\right| \le z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \le \varepsilon$, wobei hier für den Fehlerbereich $\varepsilon = 0{,}02$ gilt.

Bei einem Umfragewert von ca. 10 % rechnet man mit einem $p > 0{,}1$.

Z. B. für $p = 0{,}15$ gilt (mit $z = 1{,}64$):

$1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot (1-0{,}15)}{n}} \le 0{,}02$; daraus folgt $n \ge 857{,}31$.

Demnach sollten mindestens 858 Personen befragt werden.

Rechnet man mit einem anderen p, z. B. $p = 0{,}5$, so ergibt sich (mit $z = 1{,}64$):

$1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot (1-0{,}5)}{n}} \le 0{,}02$; daraus folgt $n \ge 1681$.

Demnach sollten mindestens 1681 Personen befragt werden.

[Die volle Punktzahl sollte für jedes gewählte p mit $0{,}1 < p \le 0{,}5$ erteilt werden.]

Die Breite des Konfidenzintervalls hängt von der Sicherheitswahrscheinlichkeit und dem Stichprobenumfang ab. Sie kann verringert werden, wenn bei gegebenem Stichprobenumfang die Sicherheitswahrscheinlichkeit herabgesetzt wird oder wenn man bei gegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit den Stichprobenumfang erhöht.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet $P(X \ge 30)$.	3
2	(2) berechnet $P(8 \le X \le 18)$.	3
3	(3) beschreibt einen geeigneten Lösungsansatz und bestimmt den minimalen Wert für n.	6
4	(4) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt einen Ansatz zur Berechnung des Konfidenzintervalls.	5
2	ermittelt die Grenzen des Konfidenzintervalls und gibt das Konfidenzintervall an.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt einen Ansatz für die Bestimmung der 95 %-Umgebung.	4
2	bestimmt das gesuchte Intervall.	2
3	prüft, ob das Umfrageergebnis mit dem Wahlergebnis verträglich ist, und beurteilt die Behauptung.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt einen Ansatz für die Bestimmung der Stichprobengröße.	4
2	bestimmt die gesuchte Stichprobengröße.	4
3	erklärt den Zusammenhang zwischen Breite des Konfidenzintervalls, Sicherheitswahrscheinlichkeit und Stichprobenumfang.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $P(X \geq 30)$.	3			
2	(2) berechnet $P(8 \leq X \leq 18)$.	3			
3	(3) beschreibt einen geeigneten …	6			
4	(4) ermittelt die gesuchte …	4			
sachlich richtige Alternativen: (16) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**16**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt einen Ansatz …	5			
2	ermittelt die Grenzen …	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	4			
2	bestimmt das gesuchte …	2			
3	prüft, ob das …	4			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	4			
2	bestimmt die gesuchte …	4			
3	erklärt den Zusammenhang …	6			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0