Name: ____________________

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x^2 - 1),\quad x \in \mathbb{R}$.

(1) *Zeigen Sie:* $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

(2) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle* $x = -\frac{1}{2}$.

(3 + 3 Punkte)

b) Eine Funktionenschar f_k ist gegeben durch $f_k(x) = e^{-x} - k$ für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

(1) *Bestimmen Sie k so, dass* $x = -1$ *eine Nullstelle von* f_k *ist.*

(2) *Berechnen Sie das Integral* $\int_0^k \left(e^{-x} - k\right) \mathrm{d}x$ *in Abhängigkeit von k.*

(2 + 4 Punkte)

Name: ______________________

c) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -4$ bilden die Punkte $A(0|0|-4)$, $B(3|4|-4)$, C, $D(-8|6|-4)$, E_r, F_r, $G_r(-5|10|r)$ und H_r einen Quader. In der *Abbildung 1* ist ein Quader für einen konkreten Wert von r dargestellt.

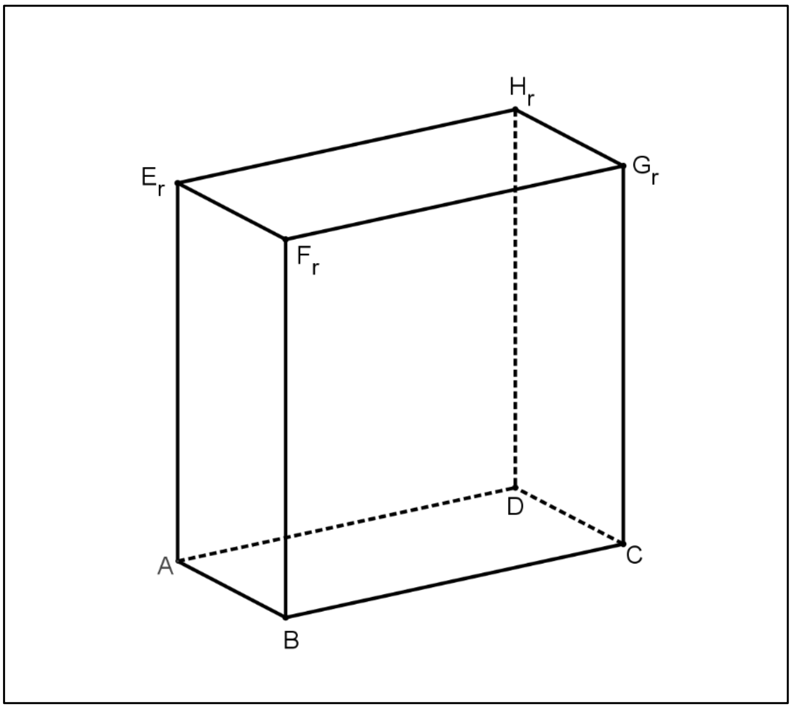


Abbildung 1

(1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander verlaufen.*

(2) *Bestimmen Sie die Werte von r, für die die Raumdiagonale $\overline{AG_r}$ die Länge* 15 LE *besitzt.*

(2 + 4 Punkte)

Name: ______________________

d) Bei einem Stadtfest gibt es ein Glücksrad, welches in zehn gleich große Sektoren unterteilt ist (siehe *Abbildung 2*). Jede teilnehmende Person dreht das Glücksrad genau einmal.

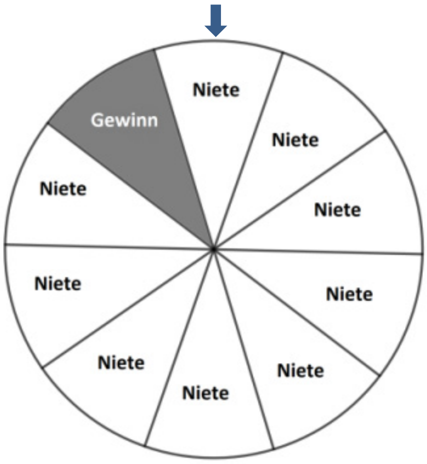


Abbildung 2

(1) *Beschreiben Sie in diesem Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:*

$$\binom{7}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^7+\binom{7}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^6+\binom{7}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^5.$$

(2) *Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnet werden kann:*

„Von 20 teilnehmenden Personen erhalten genau vier Personen einen Gewinn.“

Ein anderes Glücksrad ist in *n* gleich große Sektoren aufgeteilt. Zwei Personen drehen dieses Glücksrad jeweils genau einmal. Die Zufallsgröße *X* gibt die Anzahl der Personen an, die einen Gewinn erhalten. Es gilt: $P(X=0)=9\cdot P(X=2)$.

(3) *Ermitteln Sie eine mögliche Gesamtzahl n der Sektoren auf dem Glücksrad sowie die zugehörige Anzahl der Sektoren mit einem Gewinn.*

(2 + 1 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$.

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} .$$

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Die Tangente hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} .$$

Die Tangentengleichung lautet: $y = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{4}$.

Teilaufgabe b)

(1) $f_k(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-(-1)} - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = e$.

(2) $\int_0^k \left(e^{-x} - k\right) \mathrm{d}x = \left[-e^{-x} - k \cdot x\right]_0^k = \left(-e^{-k} - k \cdot k\right) - \left(-e^0 - k \cdot 0\right) = 1 - e^{-k} - k^2$.

Teilaufgabe c)

(1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ Die Kante $\overline{AB}$ verläuft senkrecht zur Kante $\overline{AD}$.

(2) $\overrightarrow{AG_r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ r+4 \end{pmatrix}$.

$$|\overrightarrow{AG_r}| = 15 \Leftrightarrow \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + (r+4)^2} = 15$$

$$\Leftrightarrow 25 + 100 + (r+4)^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow (r+4)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow r+4 = -10 \ \vee \ r+4 = 10$$

$$\Leftrightarrow r = -14 \vee r = 6.$$

Teilaufgabe d)

(1) Von sieben teilnehmenden Personen erhalten höchstens zwei Personen einen Gewinn.

(2) $\binom{20}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{16}$

(3) Wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Glücksrad bei einmaligem Drehen einen Gewinn zeigt, gilt:

$(1-p)^2 = 9 \cdot p^2 \Leftrightarrow (1-p)^2 = (3 \cdot p)^2 \Leftrightarrow \quad 1-p = 3p \vee 1-p = -3p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{4} \vee p = -\frac{1}{2}$.

Mit $0 \le p \le 1$ folgt $p = \frac{1}{4}$.

Das Glücksrad hat z. B. vier gleich große Sektoren, davon ist ein Sektor ein Gewinnfeld.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ ist.	3			
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Tangente an den Graphen von *f* an der Stelle $x=-\frac{1}{2}$.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt *k* so, dass $x=-1$ eine Nullstelle von f_k ist.	2			
2	(2) berechnet das Integral $\int_0^k \left(e^{-x}-k\right)\mathrm{d}x$ in Abhängigkeit von *k*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist rechnerisch nach, dass die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander verlaufen.	2			
2	(2) bestimmt die Werte von r, für die die Raumdiagonale $\overline{AG_r}$ die Länge 15 LE besitzt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt ein mögliches Ereignis im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) gibt einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann.	1			
3	(3) ermittelt eine mögliche Gesamtzahl von Sektoren und die zugehörige Anzahl der Gewinnsektoren.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**24**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Flüsse treten manchmal über ihre Ufer. Zur Vermeidung solcher Überschwemmungen werden große Wasserbecken eingesetzt, sogenannte Rückhaltebecken. Droht eine Überschwemmung, so wird ein Teil des Flusswassers in das Rückhaltebecken geleitet. Dort wird das Wasser zunächst zurückgehalten und später kontrolliert in den Fluss geleitet.

Im Folgenden soll zunächst der Zufluss in und anschließend der Abfluss des Wassers aus einem Rückhaltebecken betrachtet werden.

Zur Modellierung der momentanen **Zuflussrate**, mit der das Wasser des Flusses während eines Beobachtungszeitraumes von 40 Stunden in das Rückhaltebecken fließt, wird für $0 \le t \le 40$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 7200 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}, \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

verwendet. Dabei ist *t* die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ die momentane Zuflussrate in m³ Wasser pro Stunde.

Name: ____________________

In der folgenden *Abbildung 1* ist der Graph von f im Intervall [0;40] dargestellt.

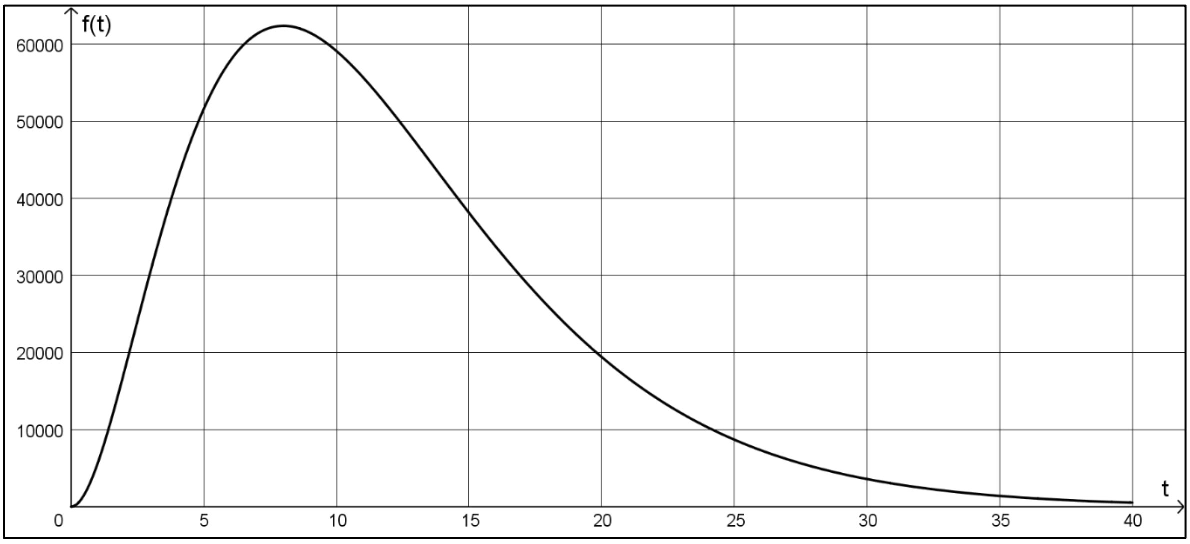


Abbildung 1

a) (1) *Geben Sie den Funktionswert von f an der Stelle t =* 20 *an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Zeigen Sie:* $f'(t) = 7200 \cdot \left(-0{,}25 \cdot t^2 + 2 \cdot t\right) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$.

(3) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die momentane Zuflussrate im Modell* 8 *Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal ist, und geben Sie die maximale momentane Zuflussrate an.*

(3 + 3 + 6 Punkte)

b) (1) *Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wassermenge* $w(t)$ *(in* m^3*) an, die vom Beginn der Beobachtung bis zu einem Zeitpunkt t im Beobachtungszeitraum in das Rückhaltebecken fließt.*
[Hinweis: Der Term muss nicht ausgerechnet oder vereinfacht werden.]

(2) Im Beobachtungszeitraum fließen ungefähr 919 000 m^3 Wasser in das Rückhaltebecken.
Die Gleichung $\int_t^{t+8} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 919\,000$ hat die Lösungen t_1, t_2 und t_3 mit
$t_1 \approx -4{,}19$, $t_2 \approx 4{,}26$ und $t_3 \approx 5{,}06$. [Nachweis nicht erforderlich.]
Interpretieren Sie die Gleichung und die Lösungen im Sachzusammenhang.

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Die momentane **Abflussrate** vom Rückhaltebecken in den Fluss im Beobachtungszeitraum wird für $0 \le t \le 40$ durch eine Funktion der Schar g_a modelliert:

$$g_a(t) = 3600 \cdot a \cdot t^3 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Dabei ist $g_a(t)$ die momentane Abflussrate in m³ Wasser pro Stunde. Durch den Parameter *a* wird berücksichtigt, dass der Abfluss reguliert werden kann.

Ohne Nachweis darf im Folgenden verwendet werden:

$$g_a'(t) = 900 \cdot a \cdot t^2 \cdot (-t + 12) \cdot e^{-0{,}25t}, \qquad g_a''(t) = 225 \cdot a \cdot t \cdot (t^2 - 24 \cdot t + 96) \cdot e^{-0{,}25t}.$$

(1) *Zeigen Sie, dass für alle* $a > 0$ *ein lokales Maximum von* g_a *bei* $t = 12$ *vorliegt.*

(2) *Bestimmen Sie den Wert für den Parameter a so, dass zum Zeitpunkt* $t = 12$ *die momentane Abflussrate* 46 800 m³ *Wasser pro Stunde beträgt.*

(5 + 3 Punkte)

d) Im Folgenden wird zunächst davon ausgegangen, dass der Abfluss so reguliert wird, dass $a = 0{,}15$ gilt.

Der Graph von f und der Graph von $g_{0{,}15}$ sind in der *Abbildung 2* auf der folgenden Seite dargestellt.

Name: ____________________

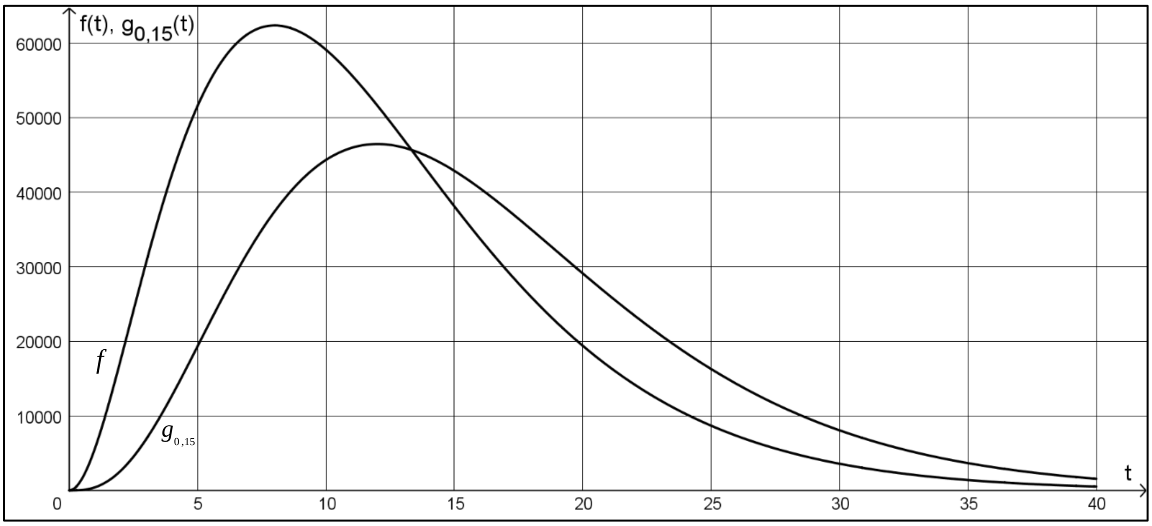


Abbildung 2

(1) *Ermitteln Sie anhand von Abbildung 2 näherungsweise den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, zu dem die Wassermenge im Rückhaltebecken maximal ist, und begründen Sie Ihr Vorgehen.*

(2) Die Funktion *d* ist durch die Gleichung $d(t) = f(t) - g_{0,15}(t)$ gegeben. Das Maximum dieser Funktion im Intervall [0;40] ist positiv und liegt an der Stelle $t_{\max}$ mit $t_{\max} \approx 5{,}33$.
Interpretieren Sie den Zeitpunkt $t_{\max}$ *im Sachzusammenhang.*

(3) *Weisen Sie nach, dass sich am Ende des Beobachtungszeitraumes mehr Wasser im Rückhaltebecken befindet als zu Beginn des Beobachtungszeitraumes.*

(4) Es gibt einen Wert für *a* > 0, sodass sich am Ende des Beobachtungszeitraumes genauso viel Wasser im Rückhaltebecken befindet wie zu Beginn.

Geben Sie einen Ansatz an, mit dem dieser Wert von a bestimmt werden kann.

(5 + 3 + 3 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $f(20) \approx 19405{,}3$.

20 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Zuflussrate, mit der das Wasser in das Rückhaltebecken fließt, ca. 19 405 m³ pro Stunde.

(2) Unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel ergibt sich:

$$f'(t) = 7200 \cdot \left(2 \cdot t \cdot e^{-0{,}25t} - 0{,}25 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25t}\right) = 7200 \cdot \left(-0{,}25 \cdot t^2 + 2 \cdot t\right) \cdot e^{-0{,}25t}.$$

(3) Gesucht ist das globale Maximum der Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[0;40]$. Dies kann nur an einer Nullstelle von f' oder einer Randstelle angenommen werden.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 7200 \cdot \left(-0{,}25 \cdot t^2 + 2 \cdot t\right) \cdot e^{-0{,}25t} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \lor t = 8.$$

Für die Nullstellen von f' gilt: $f(0) = 0$ und $f(8) \approx 62362{,}5$.

Mit $f(40) \approx 523{,}007$ folgt, dass bei der Modellierung mit f die momentane Zuflussrate 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn mit ca. 62 362,5 m³ Wasser pro Stunde am größten ist.

Teilaufgabe b)

(1) $w(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) Die Zeitpunkte $t_2 \approx 4,26$ und $t_3 \approx 5,06$ liegen im Beobachtungszeitraum. In den Intervallen der Länge 8 Stunden [4,26 (h);12,26 (h)] und [5,06 (h);13,06 (h)] fließen jeweils 50 % der im gesamten Beobachtungszeitraum ungefähr zufließenden Wassermenge in das Rückhaltebecken.

Teilaufgabe c)

(1) Wegen $g_a'(12)=900\cdot a\cdot 12^2\cdot(-12+12)\cdot e^{-0,25\cdot 12}=0$ und

$g_a''(12)=225\cdot a\cdot 12\cdot(12^2-24\cdot 12+96)\cdot e^{-0,25\cdot 12}=-129600\cdot a\cdot e^{-3}<0$ liegt an der Stelle $t=12$ ein lokales Maximum von g_a vor.

(2) $g_a(12)=46800 \Rightarrow a\approx 0,15$.

Teilaufgabe d)

(1) Zunächst ist die momentane Zuflussrate größer als die momentane Abflussrate, die Wassermenge im Rückhaltebecken nimmt daher zu. Bei $t\approx 13$ sind die momentane Zufluss- und die momentane Abflussrate gleich groß. Anschließend ist die momentane Zuflussrate kleiner als die momentane Abflussrate, die Wassermenge im Rückhaltebecken nimmt daher ab.
Ungefähr 13 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist daher die Wassermenge im Rückhaltebecken maximal.

(2) 5 Stunden und 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn ist die Differenz zwischen der momentanen Zufluss- und der momentanen Abflussrate maximal und positiv, die Wassermenge im Rückhaltebecken nimmt zu diesem Zeitpunkt am schnellsten zu.

(3) $\int_0^{40}\left(f(t)-g_{0,15}(t)\right)\mathrm{d}t\approx 98181>0$.

Am Ende befinden sich ca. 98 000 m³ Wasser mehr im Rückhaltebecken als zu Beginn des Beobachtungszeitraumes.

(4) Die Gleichung $\int_0^{40}\left(f(t)-g_a(t)\right)\mathrm{d}t=0$ muss nach a gelöst werden.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt den Funktionswert von f an der Stelle $t = 20$ an und interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) zeigt: $f'(t) = 7200 \cdot (-0{,}25 \cdot t^2 + 2 \cdot t) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$.	3			
3	(3) weist rechnerisch nach, dass die momentane Zuflussrate 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal ist, und gibt die maximale momentane Zuflussrate an.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt einen Term zur Berechnung der Wassermenge $w(t)$ an.	3			
2	(2) interpretiert die Gleichung und die Lösungen im Sachzusammenhang.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass für alle $a > 0$ bei $t = 12$ ein lokales Maximum von g_a vorliegt.	5			
2	(2) bestimmt den Wert für den Parameter a, für den zum Zeitpunkt $t = 12$ die momentane Abflussrate 46 800 m³ Wasser pro Stunde beträgt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt anhand von *Abbildung 2* näherungsweise den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, zu dem die Wassermenge im Rückhaltebecken maximal ist, und begründet sein Vorgehen.	5			
2	(2) interpretiert den Zeitpunkt $t_{\max}$ im Sachzusammenhang.	3			
3	(3) weist nach, dass sich am Ende des Beobachtungszeitraumes mehr Wasser im Rückhaltebecken befindet als zu Beginn des Beobachtungszeitraumes.	3			
4	(4) gibt einen Ansatz an, mit dem der Wert von a bestimmt werden kann.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Das Jagdverhalten von Raubkatzen in der freien Wildbahn ist gekennzeichnet durch eine hohe Anfangsbeschleunigung. Darauf folgt eine kurze Phase mit annähernd konstanter Geschwindigkeit, bevor die Geschwindigkeit wieder abfällt.
Die Geschwindigkeit eines Tigers bei einem Jagdvorgang aus der Ruheposition heraus wird für $0 \leq t \leq 10$ zunächst ohne Berücksichtigung der Phase mit konstanter Geschwindigkeit modelliert. Dazu wird für $0 \leq t \leq 10$ die Funktion *f* mit

$$f(t) = 0{,}0808 \cdot t^3 - 1{,}71 \cdot t^2 + 10{,}08 \cdot t \;,\; t \in \mathbb{R}$$

verwendet. Dabei gibt *t* die Zeit seit Verlassen der Ruheposition in Sekunden und $f(t)$ die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.

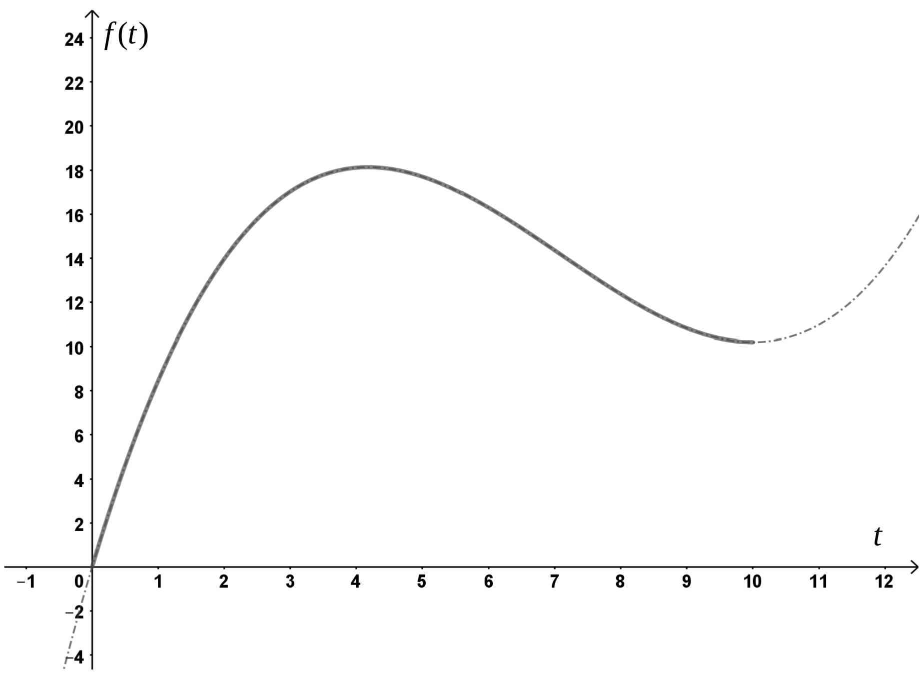


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Geben Sie den Funktionswert von f für* $t = 5$ *an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Tiger seine Maximalgeschwindigkeit von ca.* $18{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ *ungefähr* $4{,}2$ *Sekunden nach Verlassen der Ruheposition erreicht, und geben Sie die Maximalgeschwindigkeit in* $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *an.*

(3 + 8 Punkte)

b) *Ermitteln Sie das Zeitintervall, in dem die Geschwindigkeit des Tigers mindestens* $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ *beträgt.*

(4 Punkte)

c) (1) *Berechnen Sie* $\int_0^{4,2} f(t)\,\mathrm{d}t$ *und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.*

Wenn ein Tiger seine Maximalgeschwindigkeit erreicht hat, dann kann er diese für höchstens 10 s beibehalten. Hat er seine Beute bis dahin nicht gefasst, muss er den Jagdvorgang abbrechen. In einem konkreten Fall wittert ein Beutetier den Tiger und ergreift die Flucht. Als der Tiger seine Ruheposition verlässt, ist das Beutetier 100 m entfernt und hat seine konstante Fluchtgeschwindigkeit von $12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bereits erreicht.

(2) *Untersuchen Sie, ob der Tiger unter diesen Bedingungen das Beutetier einholen kann.*

(6 + 5 Punkte)

Name: ____________________

d) Im Folgenden wird das Jagdverhalten anderer Raubkatzen mit einem veränderten Modell betrachtet, das durch einen Parameter u für konkrete Raubkatzen spezifiziert werden kann. Die Geschwindigkeiten dieser Raubkatzen aus der Ruheposition heraus werden für $0 \le t \le 10$ näherungsweise durch Funktionen der Schar g_u mit

$$g_u(t) = -\frac{1}{3u^2}t^3 + 4t \text{, mit } 0 \le t \le 10,\ 3 \le u \le 4,\ t,u \in \mathbb{R}$$

beschrieben. Dabei gibt weiterhin t die Zeit seit Verlassen der Ruheposition in Sekunden und $g_u(t)$ die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.

Es ist $g_u(t) \ge 0$ für $0 \le t \le 10$ und $3 \le u \le 4$.

(1) *Ermitteln Sie rechnerisch die Maximalgeschwindigkeit der Raubkatzen in Abhängigkeit vom Parameter u. Auf eine Betrachtung der Randwerte kann dabei verzichtet werden.*
[Zur Kontrolle: Die Hochpunkte der Schar sind $H_u\left(2u \middle| g_u(2u)\right)$.]

(2) Eine konkrete Raubkatze legt ab dem Verlassen der Ruheposition eine Strecke von 65 m zurück und benötigt dafür 6 s. Gehen Sie davon aus, dass die Funktion g_u den Geschwindigkeitsverlauf auf dieser Strecke modelliert.
Ermitteln Sie mit dem Modell der Funktion g_u die Maximalgeschwindigkeit, die diese Raubkatze auf dieser Strecke erreicht hat.
Ohne Nachweis darf benutzt werden, dass G_u mit $G_u(t) = -\frac{1}{12u^2}t^4 + 2t^2$ eine Stammfunktion von g_u ist.

(8 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(5) = 17{,}75$.

5 s nach Verlassen der Ruheposition hat der Tiger eine Geschwindigkeit von 17,75 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(2) Gesucht wird das absolute Maximum von f im Intervall [0;10]. Dies kann nur an einer Nullstelle der Ableitung oder am Rand angenommen werden.

Es ist $f'(t) = 0{,}2424 \cdot t^2 - 3{,}42 \cdot t + 10{,}08$.

Der TR liefert als Nullstellen dieser Parabel $t_1 \approx 4{,}19$ und $t_2 \approx 9{,}91$.

Es ist $f(0) = 0$, $f(4{,}19) \approx 18{,}16$, $f(9{,}91) \approx 10{,}59$ und $f(10) = 10{,}6$. Daher hat der Tiger nach ca. 4,2 s seine Maximalgeschwindigkeit von ca. 18,2 $\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 65{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht.

Teilaufgabe b)

Der TR liefert für die Gleichung $f(t) = 15$ die Lösungen $t_{s1} \approx 2{,}266$, $t_{s2} \approx 6{,}739$ und $t_{s3} \approx 12{,}159$. Der Zeitpunkt t_{s3} liegt außerhalb des betrachteten Zeitrahmens.

Unter Berücksichtigung des Verlaufs des Graphens von f folgt, dass das gesuchte Zeitintervall ca. 2,3 s nach dem Verlassen der Ruheposition beginnt und ca. 6,7 s nach dem Verlassen der Ruheposition endet.

Teilaufgabe c)

(1) Es ist $F(t) = 0{,}0202 \cdot t^4 - 0{,}57 \cdot t^3 + 5{,}04 \cdot t^2$ eine Stammfunktion von *f*.

Damit gilt $\int_0^{4,2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(4{,}2) - F(0) \approx 52{,}96$.

Der Tiger legt in den modellierten 4,2 s eine Strecke von ca. 53 m zurück.

(2) Der Tiger erreicht nach ca. 4,2 s seine Maximalgeschwindigkeit. In diesem Zeitraum legt er ca. 53 m zurück. Danach läuft er mit seiner Maximalgeschwindigkeit von $18{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ weiter.

Die Strecke, die der Tiger in *t* Sekunden nach Verlassen seiner Ruheposition zurücklegt, hat für $t > 4{,}2$ eine Länge von

$$l_{\text{Tiger}} \approx \left(53 + (t - 4{,}2) \cdot 18{,}2\right)\ [\mathrm{m}].$$

In diesen *t* Sekunden wächst die Entfernung des Beutetiers zur Ruheposition des Tigers auf

$$l_{\text{Beute}} = \left(100 + t \cdot 12\right)\ [\mathrm{m}].$$

Die lineare Gleichung $l_{\text{Tiger}} = l_{\text{Beute}}$ hat als einzige Lösung $t \approx 19{,}9$. Der Tiger müsste seine Maximalgeschwindigkeit daher ca. 15,7 Sekunden beibehalten, um die Beute einzuholen. Auf Grundlage der genannten Vorgaben würde der Tiger die Jagd abbrechen. Er kann das Beutetier unter den genannten Bedingungen nicht einholen.

Teilaufgabe d)

(1) Es ist $g_u'(t) = -\frac{1}{u^2} \cdot t^2 + 4$. Es gilt wegen $t > 0$ und u > 0:

$g_u'(t) = -\frac{1}{u^2} \cdot t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4 \cdot u^2 \Leftrightarrow t = 2u$. Weiterhin ist

$g_u''(t) = -\frac{2}{u^2} t$, also $g_u''(2u) = -\frac{4}{u} < 0$. An der Stelle $t = 2u$ liegt daher ein Hochpunkt.

Wegen $g_u(2u) = \frac{16}{3} u$, sind die Hochpunkte der Schar $H_u\left(2u \middle| \frac{16}{3} u\right)$.

Die Maximalgeschwindigkeit der Raubkatze beträgt $\frac{16}{3} u \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(2) Der TR liefert mit $3 \leq u \leq 4$ als Lösung der von u abhängigen Gleichung

$$\int_0^6 g_u(t)\,\mathrm{d}t = G_u(6) - G_u(0) = 65$$

den Wert $u \approx 3{,}93$. Da die Maximalgeschwindigkeit für diesen Wert von u nach ca. 7,86 s angenommen wird, die Raubkatze aber schon nach 6 s am Ende der betrachteten Strecke ist, erreicht die Raubkatze ihre Maximalgeschwindigkeit auf dieser Strecke nach 6 s.

Sie beträgt ca. $g_{3,93}(6) \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 19{,}34 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt den Funktionswert an.	1			
2	(1) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) weist rechnerisch nach, dass der Tiger seine Maximal-geschwindigkeit von ca. 18,2 m/s nach ca. 4,2 Sekunden erreicht.	7			
4	(2) gibt den Wert in km/h an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt das Zeitintervall, in dem die Geschwindigkeit des Tigers mindestens 15 m/s beträgt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet das Integral.	4			
2	(1) erläutert die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) untersucht, ob der Tiger das Beutetier einholen kann.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt rechnerisch die Maximalgeschwindigkeit in Abhängigkeit von u.	8			
2	(2) ermittelt den Wert für den Parameter u.	3			
3	(2) ermittelt die Maximalgeschwindigkeit auf der Strecke.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In *Abbildung 1* ist ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(10\,|\,10\,|\,0)$, $C(10\,|\,0\,|\,10)$ und $D(0\,|\,10\,|\,10)$ in einem kartesischen Koordinatensystem abgebildet.

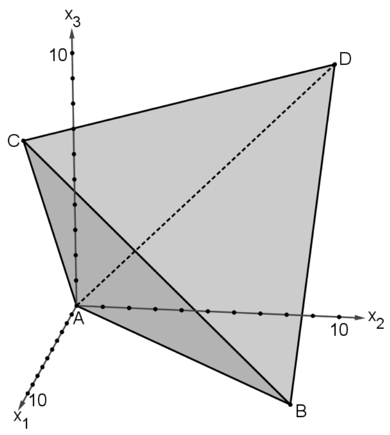


Abbildung 1

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.*

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und den Oberflächeninhalt des Tetraeders ABCD.*

(3) *Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen* $V = 1000$ VE *an, der das Tetraeder enthält.*

(4 + 4 + 4 Punkte)

b) (1) *Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf, in der das Dreieck ABC liegt.*
[Mögliche Lösung: *E:* $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$]

(2) *Stellen Sie die Dreiecksfläche ABC in einer Parameterform dar.*

(3) *Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders ABCD.*

(4 + 3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Das Tetraeder *ABCD* modelliert einen Körper mit Kanten aus Draht. Diesen Körper taucht man in Seifenlauge. Beim Herausnehmen bilden sich im Inneren des Körpers Flächen aus Seifenhaut (vgl. *Abbildungen 2* und *3*).

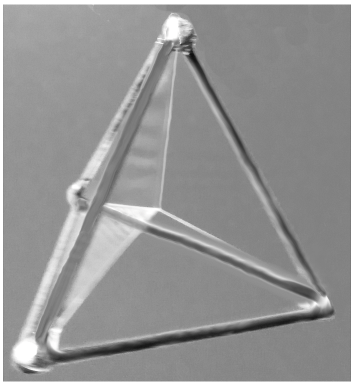


Abbildung 2

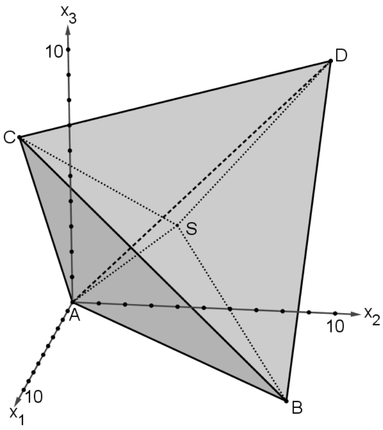


Abbildung 3

Die Seifenhaut besteht aus sechs kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt, der durch S modelliert wird. S liegt im Inneren des Tetraeders.

c) Das Dreieck *ABS* liegt in der Ebene *H:* $-x_1 + x_2 = 0$,
das Dreieck *ADS* liegt in der Ebene *I:* $-x_2 + x_3 = 0$ und
das Dreieck *SBD* liegt in der Ebene *J:* $x_1 + x_3 = 10$.

(1) *Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den Ebenen I und J.*

(2) *Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems* $\left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 10 \end{array} \right|$ *und interpretieren Sie die Lösung im Sachzusammenhang.*

(3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

d) Im Folgenden werden unterschiedlich große Drahtkantenmodelle von regelmäßigen Tetraedern in Seifenlauge getaucht. Um dies zu modellieren, wird im Folgenden ein regelmäßiges Tetraeder $A'B'C'D'$ mit dem Eckpunkt $A'(0\,|\,0\,|\,0)$ und den variablen Eckpunkten $B'(a\,|\,a\,|\,0)$, $C'(a\,|\,0\,|\,a)$ und $D'(0\,|\,a\,|\,a)$ mit $a > 0$ betrachtet. Dieses Tetraeder hat den Oberflächeninhalt $O' = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$ FE.
Taucht man diesen Körper in Seifenlauge, so bilden sich bei dessen Herausnahme im Inneren des Körpers Flächen aus Seifenhaut. Die Seifenhaut besteht aus sechs kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt, der durch den von a abhängigen Punkt S' modelliert wird.
Jedes dieser Dreiecke hat den Flächeninhalt $A'_{\text{Dreieck}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a^2$ FE.

(1) *Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Gesamtflächeninhalt der Seifenhaut kleiner ist als der Oberflächeninhalt O' des Tetraeders.*

(2) Das Dreieck $A'B'C'$ liegt in der Ebene $E\colon -x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Fußpunktes F' des Lotes von D' auf die Ebene E.
[Zur Kontrolle: $F'\left(\frac{2}{3} \cdot a \,\middle|\, \frac{1}{3} \cdot a \,\middle|\, \frac{1}{3} \cdot a\right)$]

(3) Auf der Strecke $\overline{F'D'}$ liegt der Punkt S'. Die sechs Flächen aus Seifenhaut teilen das Tetraeder $A'B'C'D'$ in vier volumengleiche Pyramiden. Diese Pyramiden haben die gemeinsame Spitze S' und jeweils eine der vier Seitenflächen des Tetraeders $A'B'C'D'$ als Grundfläche.
Bestimmen Sie rechnerisch unter Verwendung von F' die Koordinaten von S'.

(3 + 4 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Aus $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2}$ [LE] folgt,

dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

(2) In einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge $10 \cdot \sqrt{2}$ hat jede Höhe die Länge

$0{,}5 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{6}$ [LE].

Daraus folgt $A_{\text{Dreieck}} = 0{,}5 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{6} = 25 \cdot \sqrt{12} = 50 \cdot \sqrt{3}$ [FE].

Damit ergibt sich $O_{\text{Tetraeder}} = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 200 \cdot \sqrt{3}$ [FE].

(3) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen $V = 1000$ VE sind

$P_1(0\,|\,0\,|\,0)$, $P_2(10\,|\,10\,|\,0)$, $P_3(10\,|\,0\,|\,10)$, $P_4(0\,|\,10\,|\,10)$, $P_5(10\,|\,0\,|\,0)$, $P_6(0\,|\,10\,|\,0)$,

$P_7(0\,|\,0\,|\,10)$ und $P_8(10\,|\,10\,|\,10)$.

Teilaufgabe b)

(1) Die Orthogonalitätsbedingungen $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$ liefern das lineare

Gleichungssystem $\begin{vmatrix} n_1 + n_2 = 0 \\ n_1 + n_3 = 0 \end{vmatrix}$.

Es folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als ein Normalenvektor von E.

Mit $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Koordinatengleichung

$E\colon\ x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

(2) Eine Parameterform der Dreiecksfläche *ABC* lautet:

Dreiecksfläche *ABC*: $\vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $k, l \geq 0$ und $k + l \leq 1$.

(3) Die Höhe des Tetraeders *ABCD* ist der Abstand des Punktes *D* von der Ebene *E*, also

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ [LE].}$$

Es folgt $V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1000}{3}$ [VE].

Teilaufgabe c)

(1) Für den Winkel α zwischen den Ebenen *I* und *J* gilt $\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{2}$.

Daraus folgt $\alpha = 60^\circ$.

(2) Der TR liefert $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems $\left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 10 \end{array} \right|$.

Der Punkt $(5\,|\,5\,|\,5)$ ist ein gemeinsamer Punkt der Ebenen *H*, *I* und *J* und damit der gemeinsame Punkt *S* der sechs kongruenten gleichschenkligen Dreiecke aus Seifenhaut.

Teilaufgabe d)

(1) Die Seifenhaut hat einen Gesamtflächeninhalt von $6 \cdot A'_{\text{Dreieck}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a^2$ [FE].

Aus $1 - \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a^2}{2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}3876$ folgt, dass der Gesamtflächeninhalt der Seifenhaut um ca. 38,76 % kleiner ist als der Oberflächeninhalt des Tetraeders.

(2) F' ist der Schnittpunkt der Geraden *g* mit *g:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, und der Ebene *E*.

Einsetzen eines beliebigen Punktes $(t \mid a-t \mid a-t)$ der Geraden *g* in die Koordinatengleichung von *E* liefert die Gleichung $t - a + t - a + t = 0$, die von $t = \frac{2}{3} \cdot a$ gelöst wird.

Einsetzen von *t* in die Parametergleichung von *g* liefert $F'\left(\frac{2}{3} \cdot a \middle| \frac{1}{3} \cdot a \middle| \frac{1}{3} \cdot a\right)$.

(3) Da $\left|\overrightarrow{F'S'}\right|$ die Länge der Höhe einer der vier volumengleichen Pyramiden und $\left|\overrightarrow{F'D'}\right|$ die Länge der Höhe des Tetraeders $A'B'C'D'$ ist, muss bei gleicher Grundfläche $\left|\overrightarrow{F'S'}\right| = \frac{1}{4} \cdot \left|\overrightarrow{F'D'}\right|$ sein.

Aus $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot a \\ \frac{1}{3} \cdot a \\ \frac{1}{3} \cdot a \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \cdot a \\ \frac{2}{3} \cdot a \\ \frac{2}{3} \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot a \\ \frac{1}{2} \cdot a \\ \frac{1}{2} \cdot a \end{pmatrix}$ folgt $S'(\frac{1}{2} \cdot a \mid \frac{1}{2} \cdot a \mid \frac{1}{2} \cdot a)$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.	4			
2	(2) bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.	3			
3	(2) bestimmt den Oberflächeninhalt des Tetraeders *ABCD*.	1			
4	(3) gibt die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen $V = 1000$ VE an, der das Tetraeder enthält.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt eine Koordinatengleichung der Ebene *E* auf, in der das Dreieck *ABC* liegt.	4			
2	(2) stellt die Dreiecksfläche *ABC* in einer Parameterform dar.	3			
3	(3) bestimmt das Volumen des Tetraeders *ABCD*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Größe des Winkels zwischen den Ebenen I und J.	3			
2	(2) bestimmt die Lösung des linearen Gleichungssystems.	2			
3	(2) interpretiert die Lösung im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt, um wie viel Prozent der Gesamtflächeninhalt der Seifenhaut kleiner ist als der Oberflächeninhalt O' des Tetraeders.	3			
2	(2) bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Fußpunktes F' des Lotes von D' auf die Ebene E.	4			
3	(3) bestimmt rechnerisch unter Verwendung von F' die Koordinaten von S'.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Mit einem Glücksrad mit fünf gleich großen Sektoren (siehe *Abbildung 1*), einem Spielplan und einer Figur (siehe *Abbildung 2*) wird folgendes Spiel gespielt:

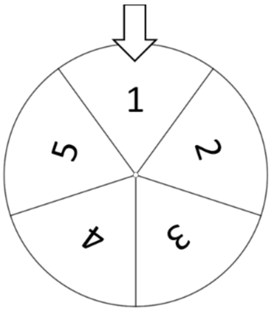


Abbildung 1: Glücksrad

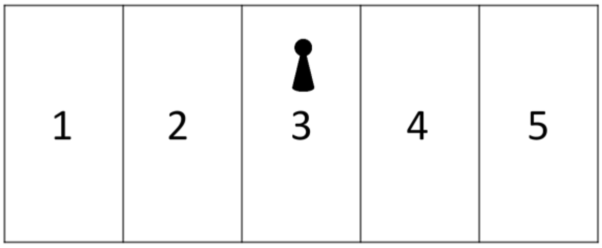


Abbildung 2: Spielplan mit Figur

Zu Beginn entscheidet der Spieler, ob er sein Spiel auf dem Feld 2, 3 oder 4 beginnt. Er stellt die Figur auf dem Spielplan auf das Feld mit der entsprechenden Zahl. Anschließend wird das Glücksrad gedreht. Die Figur bewegt sich dann nach den folgenden Regeln:

- Zeigt der Pfeil am Glücksrad auf die Zahl des Feldes, auf dem sich die Figur befindet, so bleibt die Figur auf diesem Feld.
- Zeigt der Pfeil auf eine Zahl, die größer als die Zahl des Feldes ist, auf dem sich die Figur befindet, so wandert die Figur ein Feld nach rechts.
- Zeigt der Pfeil auf eine Zahl, die kleiner als die Zahl des Feldes ist, auf dem sich die Figur befindet, so wandert die Figur ein Feld nach links.

Erreicht die Figur das Feld 1, so hat der Spieler das Spiel verloren und das Spiel ist beendet.

Erreicht die Figur das Feld 5, so hat der Spieler das Spiel gewonnen und das Spiel ist beendet.

Name: ____________________

Das Spiel kann als stochastischer Prozess mit den Zuständen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 und Z_5 modelliert werden. Zustand Z_1 bedeutet, dass sich die Figur auf dem Feld 1 befindet, Zustand Z_2 bedeutet, dass sich die Figur auf dem Feld 2 befindet usw.

Der Spielverlauf kann durch die Matrix M modelliert werden:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} {}^{\text{von}}/_{\text{nach}} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{array} .$$

a) (1) *Erklären Sie aus dem Sachzusammenhang, wie sich die Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte der Matrix M ergeben.*

(2) *Erstellen Sie ein zur Matrix M passendes Übergangsdiagramm.*

(3) Wenn der Spieler sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, so ist es für ihn gleich wahrscheinlich, das Spiel zu gewinnen oder zu verlieren.

Erklären Sie anhand der Übergangswahrscheinlichkeiten ohne weitere Berechnung diese Tatsache.

(4 + 4 + 3 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld* 3 *beginnt, nach höchstens zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt.*

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach höchstens sieben Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld* 2 *beginnt.*

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach genau sieben Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld* 2 *beginnt.*

Name: ____________________

(4) Ein Spieler beginnt das Spiel auf einem bestimmten Startfeld. Der Spielbeginn wird durch den Vektor $\vec{s}$ beschrieben.

Für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann: $M^n \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{48}{625} \\ \frac{108}{625} \\ \frac{156}{625} \\ \frac{109}{625} \\ \frac{204}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0768 \\ 0{,}1728 \\ 0{,}2496 \\ 0{,}1744 \\ 0{,}3264 \end{pmatrix} = \vec{v}$.

Untersuchen Sie, welches Startfeld und welcher Wert von n zum Vektor $\vec{v}$ führen.

(4 + 4 + 5 + 5 Punkte)

c) Im Folgenden soll untersucht werden, mit welchen Wahrscheinlichkeiten g_2, g_3 bzw. g_4 der Spieler das Spiel ausgehend von den Feldern 2, 3 bzw. 4 gewinnt. Diese Wahrscheinlichkeiten können mit dem folgenden linearen Gleichungssystem ermittelt werden:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & g_2 = \frac{1}{5} \cdot g_2 + \frac{3}{5} \cdot g_3 \\ \text{II} & g_3 = \frac{2}{5} \cdot g_2 + \frac{1}{5} \cdot g_3 + \frac{2}{5} \cdot g_4 \\ \text{III} & g_4 = \frac{3}{5} \cdot g_3 + \frac{1}{5} \cdot g_4 + \frac{1}{5} \end{array} \right| .$$

(1) *Leiten Sie mithilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten die Gleichung* I *des linearen Gleichungssystems her.*

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten g_2, g_3 und g_4.*

(3) v_2, v_3 bzw. v_4 sind die Wahrscheinlichkeiten, dass der Spieler ausgehend von den Feldern 2, 3 bzw. 4 verliert.

Stellen Sie ein entsprechendes lineares Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten v_2, v_3 und v_4 auf.

(4 + 4 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

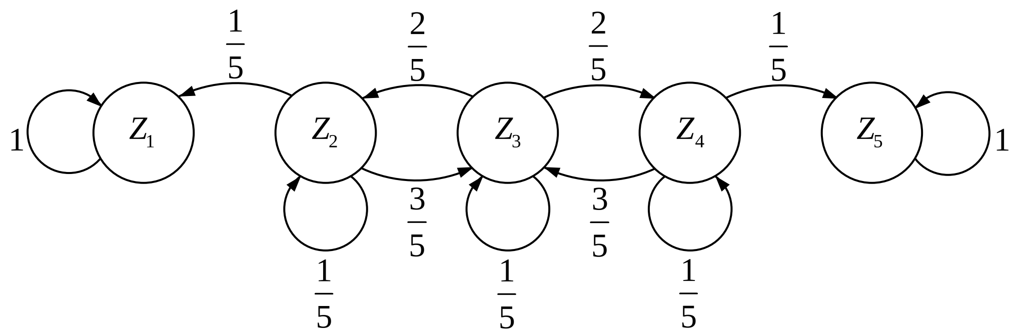
Teilaufgabe a)

(1) Befindet sich die Figur auf dem Feld 2 (Zustand Z_2),

- so wandert die Figur zum Feld 1 (Zustand Z_1), wenn bei der nächsten Drehung die Zahl 1 auftritt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{5}$ geschieht.
- so bleibt die Figur auf dem Feld 2 (Zustand Z_2), wenn bei der nächsten Drehung die Zahl 2 auftritt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{5}$ geschieht.
- so wandert die Figur zum Feld 3 (Zustand Z_3), wenn bei der nächsten Drehung eine der Zahlen 3, 4 oder 5 auftritt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{3}{5}$ geschieht.

Es gibt keine Möglichkeit, die Felder 4 und 5 (Zustände Z_4 und Z_5) von Feld 2 aus direkt zu erreichen.

(2)



(3) Von der Mitte des Spielfeldes aus gesehen stimmen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Spielfigur nach links wandert, mit den Wahrscheinlichkeiten überein, mit denen die Spielfigur nach rechts wandert. Auch die Wahrscheinlichkeiten, von den Spielfeldern 2 und 4 wieder zur Mitte des Spielfeldes zu gelangen, stimmen überein.

Daher ist es vom Feld 3 aus gleich wahrscheinlich, die Felder 1 und 5 zu erreichen und damit zu verlieren bzw. zu gewinnen.

Teilaufgabe b)

(1) $M^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\approx \begin{pmatrix} 0,3267 \\ 0,0927 \\ 0,1613 \\ 0,0927 \\ 0,3267 \end{pmatrix} \right] \approx \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,3267 \end{pmatrix}.$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach höchstens zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt, beträgt ungefähr 0,3267 [= 32,67 %].

(2) $M^{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\approx \begin{pmatrix} 0,4143 \\ 0,1113 \\ 0,1989 \\ 0,1113 \\ 0,1643 \end{pmatrix} \right] \approx \begin{pmatrix} 0,4143 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,1643 \end{pmatrix}.$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach höchstens sieben Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt, beträgt ungefähr
$0,4143 + 0,1643 = 0,5786$ [= 57,86 %].

(3) $M^{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\approx \begin{pmatrix} 0,3882 \\ 0,1302 \\ 0,2131 \\ 0,1302 \\ 0,1382 \end{pmatrix} \right] \approx \begin{pmatrix} 0,3882 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,1382 \end{pmatrix}.$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach genau sieben Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt, beträgt ungefähr
$0,5786 - 0,3882 - 0,1382 = 0,0522$ [= 5,22 %].

[Ohne Rundung der Zwischenergebnisse ergibt sich die Wahrscheinlichkeit 0,0521.]

(4) Da im Vektor $\vec{v}$ die Wahrscheinlichkeit für den Zustand Z_5 größer ist als die Wahrscheinlichkeit für den Zustand Z_1, hat der Spieler das Spiel vermutlich auf dem Feld 4 begonnen, d. h. es gilt vermutlich $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Vergleich des Nenners 625 ($= 5^4$), der in den Wahrscheinlichkeiten im Vektor $\vec{v}$ auftritt, mit dem Nenner 5, der in den Übergangswahrscheinlichkeiten in der Matrix M auftritt, lässt vermuten, dass $n = 4$ gilt.

Die Berechnung $M^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{625} \\ \frac{108}{625} \\ \frac{156}{625} \\ \frac{109}{625} \\ \frac{204}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0768 \\ 0{,}1728 \\ 0{,}2496 \\ 0{,}1744 \\ 0{,}3264 \end{pmatrix}$ bestätigt diese Vermutungen.

Teilaufgabe c)

(1) Um vom Feld 2 aus zu gewinnen, gibt es zwei Möglichkeiten:

- Man bleibt nach der nächsten Umdrehung des Glücksrades zunächst auf dem Feld 2, dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Da man von dort mit der Wahrscheinlichkeit g_2 gewinnt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Möglichkeit zu gewinnen, $\frac{1}{5} \cdot g_2$.
- Man gelangt bei der nächsten Umdrehung des Glücksrades zunächst auf das Feld 3, dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$. Da man von dort mit der Wahrscheinlichkeit g_3 gewinnt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Möglichkeit zu gewinnen, $\frac{3}{5} \cdot g_3$.

Zusammen gilt damit Gleichung I: $g_2 = \frac{1}{5} \cdot g_2 + \frac{3}{5} \cdot g_3$.

(2) Mit dem Taschenrechner ergibt sich:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & g_2 = \frac{1}{5} \cdot g_2 + \frac{3}{5} \cdot g_3 \\ \text{II} & g_3 = \frac{2}{5} \cdot g_2 + \frac{1}{5} \cdot g_3 + \frac{2}{5} \cdot g_4 \\ \text{III} & g_4 = \frac{3}{5} \cdot g_3 + \frac{1}{5} \cdot g_4 + \frac{1}{5} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} g_2 = \frac{3}{8} = 0{,}375 \\ g_3 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ g_4 = \frac{5}{8} = 0{,}625 \end{array} \right|.$$

(3) $$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & v_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot v_2 + \frac{3}{5} \cdot v_3 \\ \text{II} & v_3 = \frac{2}{5} \cdot v_2 + \frac{1}{5} \cdot v_3 + \frac{2}{5} \cdot v_4 \\ \text{III} & v_4 = \frac{3}{5} \cdot v_3 + \frac{1}{5} \cdot v_4 \end{array} \right|.$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt aus dem Sachzusammenhang, wie sich die Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte der Matrix M ergeben.	4			
2	(2) erstellt ein zur Matrix M passendes Übergangsdiagramm.	4			
3	(3) erklärt anhand der Übergangswahrscheinlichkeiten ohne weitere Berechnung, dass es für den Spieler gleich wahrscheinlich ist, das Spiel zu gewinnen oder zu verlieren, wenn er sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach höchstens zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt.	4			
2	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach höchstens sieben Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt.	4			
3	(3) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach genau sieben Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt.	5			
4	(4) untersucht, welches Startfeld und welcher Wert von n zum Vektor $\vec{v}$ führen.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

---

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) leitet mithilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten die Gleichung I des linearen Gleichungssystems her.	4			
2	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeiten g_2, g_3 und g_4.	4			
3	(3) stellt ein entsprechendes lineares Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten v_2, v_3 und v_4 auf.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**144**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	144 – 137
sehr gut	14	136 – 130
sehr gut minus	13	129 – 123
gut plus	12	122 – 116
gut	11	115 – 108
gut minus	10	107 – 101
befriedigend plus	9	100 – 94
befriedigend	8	93 – 87
befriedigend minus	7	86 – 80
ausreichend plus	6	79 – 72
ausreichend	5	71 – 65
ausreichend minus	4	64 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 48
mangelhaft	2	47 – 39
mangelhaft minus	1	38 – 29
ungenügend	0	28 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Reisen mit dem Fernbus werden immer beliebter. Reiseanbieter werben mit günstigen Preisen und besonderem Komfort.

a) Für eine Städtereise stellt ein Busunternehmen einen Fernbus mit 59 Plätzen bereit, die vor Reiseantritt gebucht und bezahlt werden. Im Mittel werden 95 % der Buchungen angetreten.

(1) *Erläutern Sie, unter welcher Voraussetzung die Anzahl der angetretenen Buchungen bei einer Reise als binomialverteilt mit* $p = 0{,}95$ *angenommen werden kann.*

Im Folgenden wird die Anzahl der angetretenen Buchungen als binomialverteilt mit $p = 0{,}95$ vorausgesetzt. Für einen bestimmten Reisetermin sind genau 59 Buchungen vorgenommen worden.

(2) *Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:*

E_1 : Genau 59 Buchungen werden angetreten.

E_2 : Mindestens 55 Buchungen werden angetreten.

(3 + 6 Punkte)

Name: ____________________

b) Da erfahrungsgemäß nicht alle Buchungen angetreten werden, verkauft das Busunternehmen mehr Plätze als vorhanden sind. Für eine Städtereise mit 96 Plätzen werden 99 Buchungen vorgenommen (Überbuchung). Es wird unverändert angenommen, dass die Anzahl der angetretenen Buchungen binomialverteilt mit $p = 0{,}95$ ist.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Person ihre Reise wegen Überbuchung nicht antreten kann.*

(2) *Bestimmen Sie die Anzahl der Buchungen, die das Busunternehmen bei einer Reise mit* 96 *Plätzen höchstens bestätigen darf, um das Risiko, dass mindestens eine Person ihre Reise aufgrund der Überbuchung nicht antreten kann, auf* 5 % *zu begrenzen.*

Kann eine Person die Reise wegen Überbuchung nicht antreten, wird vom Busunternehmen der komplette Reisepreis von 20 Euro zurückerstattet. Als Entschädigung wird zusätzlich ein Betrag von 300 Euro ausgezahlt.

(3) *Beurteilen Sie, ob sich aus finanzieller Sicht die Praxis,* 99 *Buchungen für eine Reise mit* 96 *Plätzen zu bestätigen, für das Busunternehmen im Mittel lohnt.*

(4 + 5 + 8 Punkte)

Name: ____________________

c) In der Werbung eines anderen Busunternehmens werden bisher Kunden damit gewonnen, dass bis kurz vor Reiseantritt eine kostenlose Stornierung der Buchung möglich ist. Aktuell liegt der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen bei 7 %.

Das Busunternehmen möchte diesen Anteil verringern und ändert die Vertragsbedingungen dahingehend, dass bei kurzfristigen Stornierungen ein Teil des Fahrpreises gezahlt werden muss. Es möchte die Vermutung absichern, dass durch diese Maßnahme der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen sinkt.

Die nächsten 1000 Buchungen sollen auf diese Wirkung hin untersucht werden. Die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen wird als binomialverteilt angenommen.

(1) *Geben Sie begründet an, welche Nullhypothese aus der Sicht des Busunternehmens gewählt wird.*

(2) *Bestimmen Sie die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen, bis zu der das Busunternehmen auf einem Signifikanzniveau von* 5 % *von einem Erfolg der Maßnahme ausgehen wird.*

(3) Bei einem Signifikanzniveau von 1 % lautet die Entscheidungsregel:
„Das Busunternehmen verwirft die Nullhypothese H_0 und geht von einem Erfolg der Maßnahme aus, falls die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen höchstens 51 beträgt.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. *Art, falls aufgrund der Maßnahmen der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen nur noch* 4 % *beträgt, und erläutern Sie diesen Fehler im Sachzusammenhang.*

(4 + 5 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Jede Buchung wird unabhängig von den anderen Buchungen mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}95$ angetreten.

(2) X: Anzahl der angetretenen Buchungen.

$P(E_1) = P_{59;\,0,95}(X = 59) \approx 0{,}0485$.

$P(E_2) = P_{59;0,95}(X \geq 55) \approx 0{,}8281$.

Teilaufgabe b)

X: Anzahl der angetretenen Buchungen.

(1) $P_{99;\,0,95}(98 \leq X \leq 99) \approx 0{,}0387$.

(2) Gesucht wird die größte Anzahl n der bestätigten Buchungen, sodass gilt:
$P_{n;\,0,95}(X \geq 97) \leq 0{,}05$.

Der Taschenrechner liefert: $P_{98;0,95}(X \geq 97) \approx 0{,}0404$, und $P_{99;0,95}(X \geq 97) \approx 0{,}1225$, demnach darf das Unternehmen höchstens 98 Buchungen bestätigen, um das Risiko der Überbuchung auf 5 % zu begrenzen.

(3) Es werden 99 Buchungen für 96 Plätze bestätigt.

Erwartete Kosten K für Erstattung und Entschädigung:
$K = P_{99;0,95}(X = 97) \cdot 320\,€ + P_{99;0,95}(X = 98) \cdot 640\,€ + P_{99;0,95}(X = 99) \cdot 960\,€ \approx 53{,}56\,€$.

Zusatzeinnahmen E durch die Überbuchungen: $E = 3 \cdot 20\,€ = 60\,€$.

Bei der beschriebenen Praxis entsteht im Mittel ein Gewinn von 6,46 € für das Busunternehmen. Die Praxis lohnt sich aus finanzieller Sicht im Mittel.

Teilaufgabe c)

(1) Bisher lag der Anteil der kurzfristigen Stornierungen bei 7 %. Das Busunternehmen möchte seine Vermutung $H_1 : p < 0,07$ absichern und nur bei signifikanten Abweichungen vom bisherigen Wert $p \geq 0,07$ zur Vermutung übergehen.
Somit wird $H_0 : p \geq 0,07$ als Nullhypothese getestet.

(2) X: Anzahl der Buchungen, die kurzfristig storniert werden.
Da $P_{1000;0,07}(X \leq 56) \approx 0,0437$ und $P_{1000;0,07}(X \leq 57) \approx 0,0574$, wird das Busunternehmen von einem Erfolg der Maßnahme ausgehen, falls die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen höchstens 56 beträgt.

(3) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art liegt bei $P_{1000;0,04}(X \geq 52) \approx 0,0357$.
Zufällig werden in der Stichprobe mehr als 51 Buchungen kurzfristig storniert. Die Nullhypothese wird demnach nicht verworfen, obwohl der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen nur noch 4 % beträgt.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) erläutert unter welcher Voraussetzung die Anzahl der angetretenen Buchungen als binomialverteilt mit $p = 0,95$ angenommen werden kann.	3			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1.	3			
3	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
2	(2) bestimmt die gesuchte Anzahl der Buchungen.	5			
3	(3) beurteilt, ob sich aus finanzieller Sicht die Praxis, 99 Buchungen für eine Reise mit 96 Plätzen zu bestätigen, im Mittel lohnt.	8			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt begründet an, welche Nullhypothese aus Sicht des Busunternehmens gewählt wird.	4			
2	(2) bestimmt die Anzahl der kurzfristigen Stornierungen, bis zu der das Busunternehmen von einem Erfolg der Maßnahme ausgehen wird.	5			
3	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	3			
4	(3) erläutert den Fehler im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**144**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	144 – 137
sehr gut	14	136 – 130
sehr gut minus	13	129 – 123
gut plus	12	122 – 116
gut	11	115 – 108
gut minus	10	107 – 101
befriedigend plus	9	100 – 94
befriedigend	8	93 – 87
befriedigend minus	7	86 – 80
ausreichend plus	6	79 – 72
ausreichend	5	71 – 65
ausreichend minus	4	64 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 48
mangelhaft	2	47 – 39
mangelhaft minus	1	38 – 29
ungenügend	0	28 – 0