



Name: _____

Abiturprüfung 2020 Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie: $f'(-1) = 2$.

(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$.

(2 + 4 Punkte)

b) Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = e^x - e$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f und die Koordinatenachsen begrenzen im 4. Quadranten eine Fläche (vgl. *Abbildung 1*).

(1) Der Graph von f hat genau eine Nullstelle.

Zeigen Sie, dass $x = 1$ die Nullstelle des Graphen von f ist.

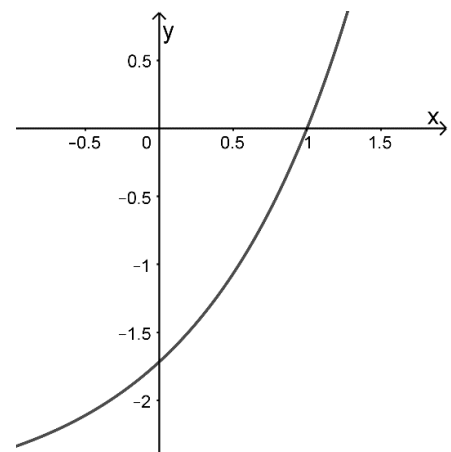


Abbildung 1

(2) Berechnen Sie den Inhalt der vom Graphen von f und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche.

(2 + 4 Punkte)



Name: _____

- c) Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|4|0)$, C , $D(-8|6|0)$, $E(0|0|10)$, F , G und H bilden einen Quader (siehe *Abbildung 2*).

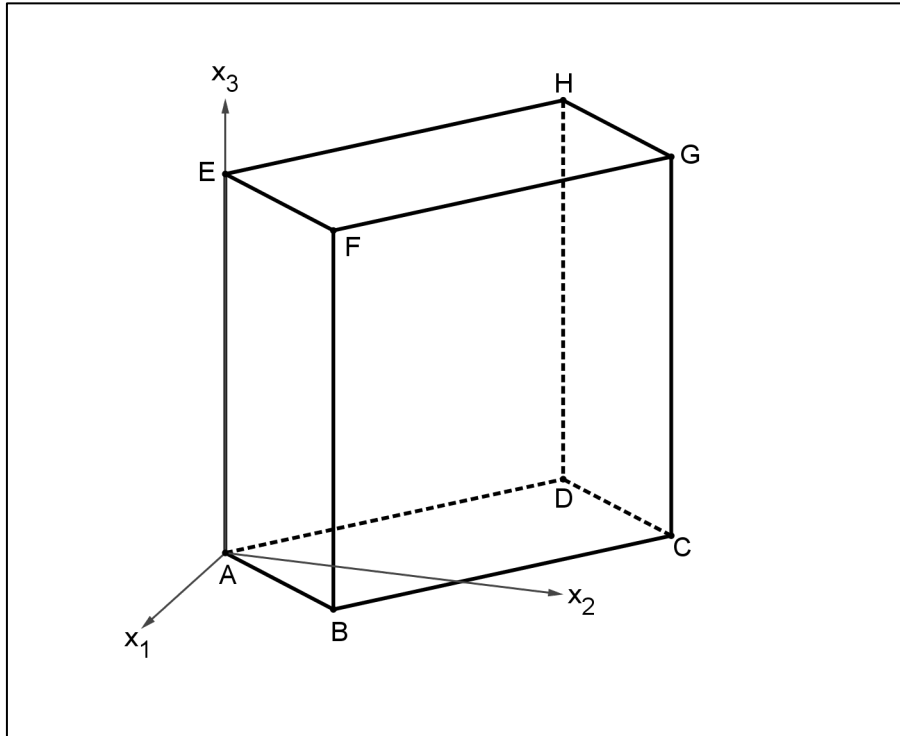


Abbildung 2

- (1) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes G.*
- (2) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Kanten \overline{AB} und \overline{AD} senkrecht zueinander verlaufen.*
- (3) *Ermitteln Sie das Volumen V des Quaders.*

(2 + 2 + 2 Punkte)



Name: _____

- d) Bei einem Stadtfest gibt es ein Glücksrad, welches in zehn gleich große Sektoren unterteilt ist (siehe *Abbildung 3*). Jede teilnehmende Person dreht das Glücksrad genau einmal.

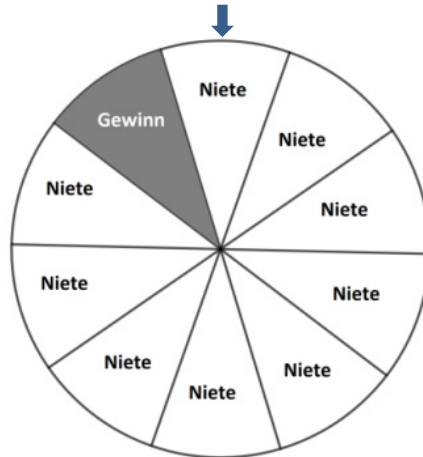


Abbildung 3

- (1) Beschreiben Sie in diesem Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann:

$$\binom{7}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^6.$$

- (2) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnet werden kann:

„Von 20 teilnehmenden Personen erhalten genau vier Personen einen Gewinn.“

Ein anderes Glücksrad ist in n gleich große Sektoren aufgeteilt. Zwei Personen drehen dieses Glücksrad jeweils genau einmal. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Personen an, die einen Gewinn erhalten. Es gilt: $P(X = 0) = \frac{4}{9}$.

- (3) Ermitteln Sie eine mögliche Gesamtzahl n der Sektoren auf dem Glücksrad sowie die zugehörige Anzahl der Sektoren mit einem Gewinn.

(2 + 1 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Analysis

- Fortführung der Differentialrechnung
- Grundverständnis des Integralbegriffs
- Integralrechnung

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

- Lineare Gleichungssysteme
- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt

Stochastik

- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung

2. Medien/Materialien

- entfällt

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1.$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 2.$$

$$(2) f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0.$$

Die Tangente hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$.

$$\text{Einsetzen ergibt: } 0 = 2 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 2.$$

Die Tangentengleichung lautet somit $y = 2 \cdot x + 2$.

Teilaufgabe b)

$$(1) f(1) = e^1 - e = 0.$$

$$(2) \int_0^1 (e^x - e) dx = [e^x - e \cdot x]_0^1 = (e^1 - e \cdot 1) - (e^0 - e \cdot 0) = -1.$$

Die eingeschlossene Fläche ist 1 FE groß.

Teilaufgabe c)

$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow G(-5|10|10).$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{Die Kante } \overrightarrow{AB} \text{ verläuft senkrecht zur Kante } \overrightarrow{AD}.$$

$$(3) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10.$$

$$|\overrightarrow{AE}| = 10.$$

$$V = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ (VE)}.$$

Teilaufgabe d)

(1) Von sieben teilnehmenden Personen erhält höchstens eine Person einen Gewinn.

$$(2) \quad \binom{20}{4} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^{16}$$

(3) Wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Glücksrad bei einmaligem Drehen einen Gewinn zeigt, gilt:

$$(1-p)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 1-p = \frac{2}{3} \vee 1-p = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow p = \frac{1}{3} \vee p = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Mit } 0 \leq p \leq 1 \text{ folgt } p = \frac{1}{3}.$$

Das Glücksrad hat z. B. drei gleich große Sektoren, davon ist ein Sektor ein Gewinnfeld.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass $f'(-1) = 2$ ist.	2			
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
Summe Teilaufgabe a)		6			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass $x = 1$ die Nullstelle des Graphen von f ist.	2			
2	(2) berechnet den Inhalt der vom Graphen von f und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
Summe Teilaufgabe b)		6			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) ermittelt die Koordinaten des Punktes G .	2			
2	(2) weist rechnerisch nach, dass die Kanten \overline{AB} und \overline{AD} senkrecht zueinander verlaufen.	2			
3	(3) ermittelt das Volumen des Quaders.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
	Summe Teilaufgabe c)	6			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) beschreibt ein mögliches Ereignis im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) gibt einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann.	1			
3	(3) ermittelt eine mögliche Gesamtzahl von Sektoren und die zugehörige Anzahl der Gewinnsektoren.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
	Summe Teilaufgabe d)	6			

	Summe insgesamt	24			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.



Name: _____

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Flüsse treten manchmal über ihre Ufer. Zur Vermeidung solcher Überschwemmungen werden große Wasserbecken eingesetzt, sogenannte Rückhaltebecken. Droht eine Überschwemmung, so wird ein Teil des Flusswassers in das Rückhaltebecken geleitet. Dort wird das Wasser zunächst zurückgehalten und später kontrolliert in den Fluss geleitet.

Im Folgenden soll zunächst der Zufluss in und anschließend der Abfluss des Wassers aus einem Rückhaltebecken betrachtet werden.

Zur Modellierung der momentanen **Zuflussrate**, mit der das Wasser des Flusses während eines Beobachtungszeitraumes von 40 Stunden in das Rückhaltebecken fließt, wird für $0 \leq t \leq 40$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 7200 \cdot t^2 \cdot e^{-0,25t}, \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

verwendet. Dabei ist t die Zeit seit Beobachtungsbeginn in Stunden und $f(t)$ die momentane Zuflussrate in m^3 Wasser pro Stunde.



Name: _____

In der folgenden *Abbildung 1* ist der Graph von f im Intervall $[0;40]$ dargestellt.

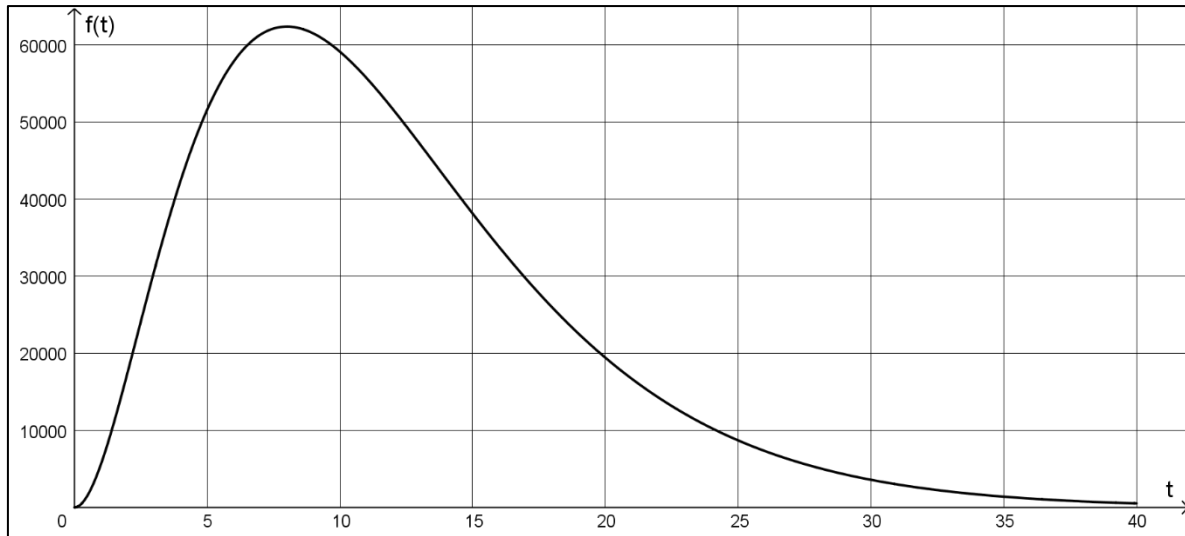


Abbildung 1

a) (1) Geben Sie den Funktionswert von f an der Stelle $t = 20$ an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2) Zeigen Sie: $f'(t) = 7200 \cdot (-0,25 \cdot t^2 + 2 \cdot t) \cdot e^{-0,25t}$.

(3) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die momentane Zuflussrate im Modell 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal ist, und geben Sie die maximale momentane Zuflussrate an.

(3 + 3 + 7 Punkte)

b) Ermitteln Sie, wie viel Wasser im Beobachtungszeitraum von 40 Stunden in das Rückhaltebecken fließt.

(4 Punkte)



Name: _____

- c) Die momentane **Abflussrate** vom Rückhaltebecken in den Fluss im Beobachtungszeitraum wird für $0 \leq t \leq 40$ durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = 540 \cdot t^3 \cdot e^{-0,25t}, \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

modelliert. Dabei ist $g(t)$ die momentane Abflussrate in m^3 Wasser pro Stunde.

Ohne Nachweis darf verwendet werden: $g'(t) = -135 \cdot (t^3 - 12 \cdot t^2) \cdot e^{-0,25t}$.

- (1) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, zu dem die momentane Abflussrate am stärksten zunimmt.*
- (2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem seit Beobachtungsbeginn $50\,000 \text{ m}^3$ Wasser aus dem Becken fließen.*

(5 + 4 Punkte)



Name: _____

d) Der Graph von f und der Graph von g sind in der *Abbildung 2* dargestellt.

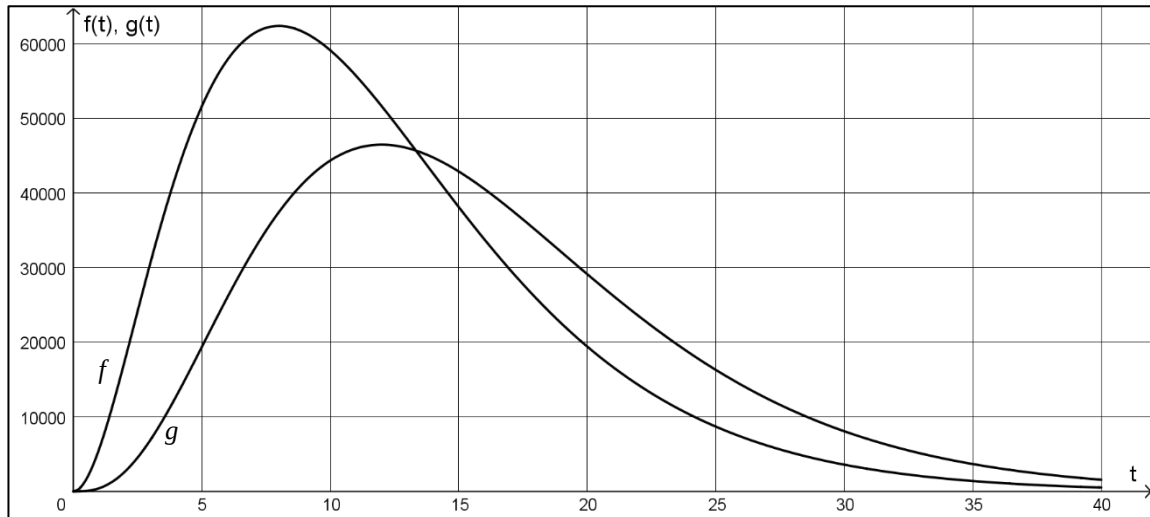


Abbildung 2

Die Funktion d ist durch die Gleichung $d(t) = f(t) - g(t)$ gegeben.

- (1) Geben Sie $d(10)$ und $d(20)$ an und interpretieren Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang.
- (2) Ermitteln Sie anhand von *Abbildung 2* näherungsweise den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, bis zu dem die Wassermenge im Rückhaltebecken zunimmt und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- (3) Bestimmen Sie $\int_0^{40} d(t) dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(5 + 4 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Funktionen und Analysis

- Funktionen als mathematische Modelle
- Fortführung der Differentialrechnung
 - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
 - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
 - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
 - Interpretation und Bestimmung von Parametern bei ganzrationalen Funktionen
 - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
- Grundverständnis des Integralbegriffs
- Integralrechnung

2. Medien/Materialien

- entfällt

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(20) \approx 19405,3$.

20 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Zuflussrate, mit der das Wasser in das Rückhaltebecken fließt, ca. 19 405 m³ pro Stunde.

(2) Unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel ergibt sich:

$$f'(t) = 7200 \cdot (2 \cdot t \cdot e^{-0,25t} - 0,25 \cdot t^2 \cdot e^{-0,25t}) = 7200 \cdot (-0,25 \cdot t^2 + 2 \cdot t) \cdot e^{-0,25t}.$$

(3) Gesucht ist das globale Maximum der Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[0;40]$. Dies kann nur an einer Nullstelle von f' oder einer Randstelle angenommen werden.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 7200 \cdot (-0,25 \cdot t^2 + 2 \cdot t) \cdot e^{-0,25t} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8.$$

Für die Nullstellen von f' gilt: $f(0) = 0$ und $f(8) \approx 62362,5$.

Mit $f(40) \approx 523,007$ folgt, dass bei der Modellierung mit f die momentane Zuflussrate 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn mit ca. 62 362,5 m³ Wasser pro Stunde am größten ist.

Teilaufgabe b)

$$\int_0^{40} f(t) dt \approx 919048.$$

Im Beobachtungszeitraum fließen ca. 919 048 m³ Wasser in das Rückhaltebecken.

Teilaufgabe c)

- (1) Gesucht ist das absolute Maximum von g' im Intervall $[0;40]$. Der Taschenrechner liefert in diesem Intervall (z. B. durch grafische Analyse) den globalen Hochpunkt $H(5,07|6770)$ des Graphen von g' .

Die momentane Zuflussrate nimmt ungefähr 5,07 Stunden nach Beobachtungsbeginn am stärksten zu.

- (2) Die Gleichung $\int_0^t (540 \cdot x^3 \cdot e^{-0,25 \cdot x}) dx = 50\,000$ hat die Lösungen t_1 und t_2 mit

$$t_1 \approx -3,65 \text{ und } t_2 \approx 5,83.$$

Bis zum Zeitpunkt $t_2 \approx 5,83$ fließen $50\,000 \text{ m}^3$ Wasser aus dem Rückhaltebecken.

Teilaufgabe d)

- (1) $d(10) \approx 14775,3$ und $d(20) \approx -9702,6$.

10 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt bei der Berücksichtigung von Zu- und Abfluss die Wassermenge im Rückhaltebecken mit einer Rate von ca. $14\,775 \text{ m}^3$ pro Stunde zu.

20 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt bei der Berücksichtigung von Zu- und Abfluss die Wassermenge im Rückhaltebecken mit einer Rate von ca. $9\,703 \text{ m}^3$ pro Stunde ab.

- (2) Die Wassermenge im Rückhaltebecken nimmt zu, wenn die momentane Zuflussrate größer ist als die momentane Abflussrate. Dies ist der Fall, wenn der Graph von f oberhalb des Graphen von g verläuft, also bis $t \approx 13$.

(3)
$$\int_0^{40} d(t) dt = \int_0^{40} (f(t) - g(t)) dt \approx 98180,9 > 0.$$

Am Ende des Beobachtungszeitraums befinden sich ca. $98\,000 \text{ m}^3$ mehr Wasser im Rückhaltebecken als zu Beginn des Beobachtungszeitraums.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) gibt den Funktionswert von f an der Stelle $t = 20$ an und interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) zeigt: $f'(t) = 7200 \cdot (-0,25 \cdot t^2 + 2 \cdot t) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$.	3			
3	(3) weist rechnerisch nach, dass die momentane Zuflussrate 8 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal ist, und gibt die maximale momentane Zuflussrate an.	7			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13)					
Summe Teilaufgabe a)		13			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	ermittelt, wie viel Wasser im Beobachtungszeitraum von 40 Stunden in das Rückhaltebecken fließt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)					
Summe Teilaufgabe b)		4			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, zu dem die momentane Abflussrate am stärksten zunimmt.	5			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt, bis zu dem 50 000 m ³ Wasser aus dem Becken fließen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9)					
	Summe Teilaufgabe c)	9			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) gibt $d(10)$ und $d(20)$ an.	2			
2	(1) interpretiert die beiden Werte im Sachzusammenhang.	3			
3	(2) ermittelt anhand von <i>Abbildung 2</i> näherungsweise den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, bis zu dem die Wassermenge im Rückhaltebecken zunimmt.	2			
4	(2) begründet sein Vorgehen.	2			
5	(3) bestimmt $\int_0^{40} d(t) dt$.	3			
6	(3) interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
	Summe Teilaufgabe d)	14			

Summe insgesamt	40			
------------------------	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.



Name: _____

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Das Jagdverhalten von Raubkatzen in der freien Wildbahn ist gekennzeichnet durch eine hohe Anfangsbeschleunigung. Darauf folgt eine kurze Phase mit annähernd konstanter Geschwindigkeit, bevor die Geschwindigkeit wieder abfällt.

Die Geschwindigkeit eines Tigers bei einem Jagdvorgang aus der Ruheposition heraus wird für $0 \leq t \leq 10$ zunächst ohne Berücksichtigung der Phase mit konstanter Geschwindigkeit modelliert. Dazu wird für $0 \leq t \leq 10$ die Funktion f mit

$$f(t) = 0,0808 \cdot t^3 - 1,71 \cdot t^2 + 10,08 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}$$

verwendet. Dabei gibt t die Zeit seit Verlassen der Ruheposition in Sekunden und $f(t)$ die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.

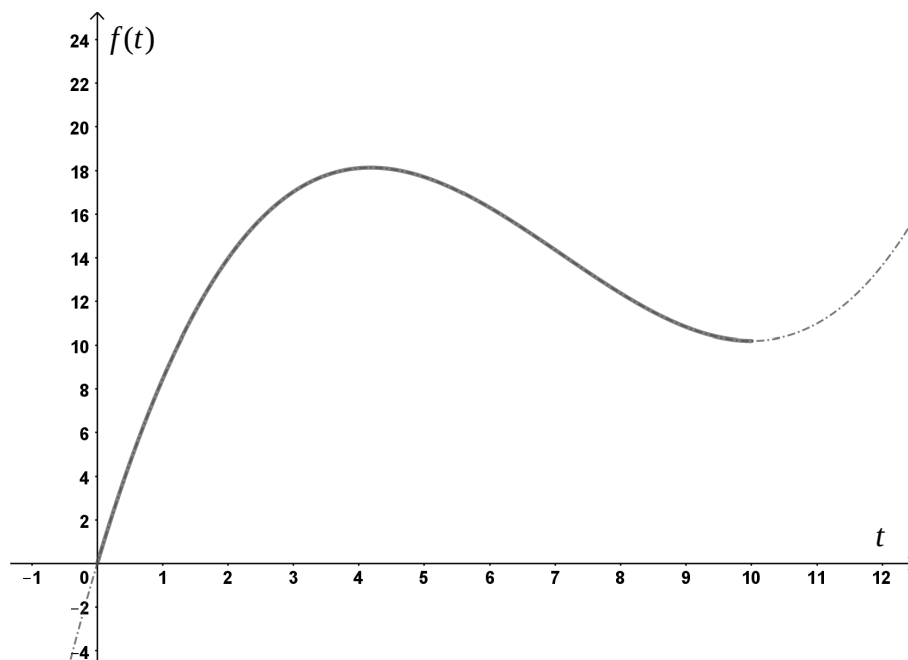


Abbildung 1



Name: _____

a) (1) *Geben Sie den Funktionswert von f für $t = 5$ an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Tiger seine Maximalgeschwindigkeit von ca. $18,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ungefähr 4,2 Sekunden nach Verlassen der Ruheposition erreicht, und geben Sie die Maximalgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.*

(3 + 8 Punkte)

b) (1) *Erläutern Sie die Bedeutung der ersten Ableitung von f im Sachzusammenhang.*

(2) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt, auf zwei Nachkommastellen genau.*

(2 + 4 Punkte)

c) *Ermitteln Sie das Zeitintervall, in dem die Geschwindigkeit des Tigers mindestens $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt.*

(4 Punkte)

d) (1) *Berechnen Sie $\int_0^{10} f(t)dt$ und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.*

(2) *Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Tigers in den modellierten 10 s.*

(6 + 2 Punkte)



Name: _____

e) Nehmen Sie an, dass der Tiger zunächst seine Maximalgeschwindigkeit gemäß dem Modell von Seite 1 erreicht (Phase 1). Nach Erreichen seiner Maximalgeschwindigkeit behält er diese noch 5 s lang bei (Phase 2). Anschließend verringert sich seine Geschwindigkeit gemäß einem neuen Modell (Phase 3). Dieses entspricht bis auf eine zeitliche Verschiebung dem Modell von Seite 1 (vgl. *Abbildung 2*). Ab $t = 15$ läuft er mit konstanter Geschwindigkeit weiter (Phase 4). Im Folgenden werden die ersten 15 s (Phase 1 bis 3) dieses Ablaufs betrachtet.

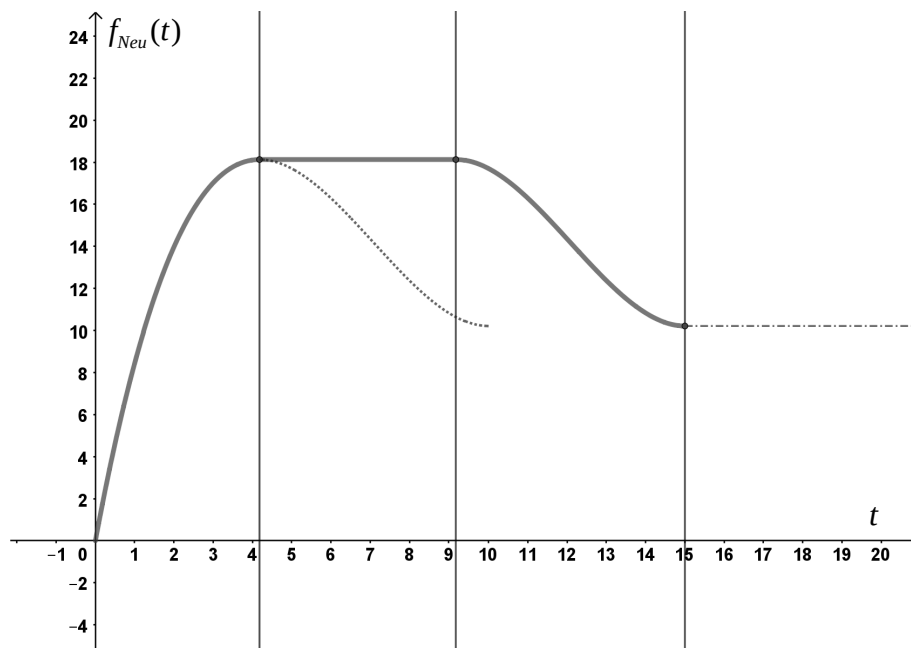


Abbildung 2

- (1) Geben Sie für die Phasen 2 und 3 jeweils einen Funktionsterm an.
[Hinweis: Der Term für Phase 3 muss nicht vereinfacht werden.]
- (2) Prüfen Sie, ob nach 15 s ein knickfreier Übergang zu einer konstanten Funktion, welche die Geschwindigkeit in Phase 4 modelliert, möglich ist.
- (3) Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die der Tiger in diesen ersten 15 s zurücklegt.

(4 + 3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Funktionen und Analysis

- Funktionen als mathematische Modelle
- Fortführung der Differentialrechnung
 - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
 - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
 - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
 - Interpretation und Bestimmung von Parametern bei ganzrationalen Funktionen
 - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
- Grundverständnis des Integralbegriffs
- Integralrechnung

2. Medien/Materialien

- entfällt

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(5) = 17,75$.

5 s nach Verlassen der Ruheposition hat der Tiger eine Geschwindigkeit von $17,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- (2) Gesucht wird das absolute Maximum von f im Intervall $[0;10]$. Dies kann nur an einer Nullstelle der Ableitung oder am Rand angenommen werden.

Es ist $f'(t) = 0,2424 \cdot t^2 - 3,42 \cdot t + 10,08$.

Der TR liefert als Nullstellen dieser Parabel $t_1 \approx 4,19$ und $t_2 \approx 9,91$.

Es ist $f(0) = 0$, $f(4,19) \approx 18,16$, $f(9,91) \approx 10,59$ und $f(10) = 10,6$. Daher hat der Tiger

nach ca. 4,2 s seine Maximalgeschwindigkeit von ca. $18,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 65,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht.

Teilaufgabe b)

- (1) f' gibt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit des Tigers [momentane Beschleunigung des Tigers] nach t s seit Verlassen der Ruheposition an.

- (2) Die zu f' gehörende Parabel hat ihr Minimum an der Stelle $t_{\text{Min}} \approx 7,05$ mit

$$f'(t_{\text{Min}}) \approx -2 < 0.$$

Die Geschwindigkeit des Tigers nimmt daher zum Zeitpunkt $t_{\text{Min}} \approx 7,05$ [s] am stärksten ab.

Teilaufgabe c)

Der TR liefert für die Gleichung $f(t) = 15$ die Lösungen $t_{s1} \approx 2,266$, $t_{s2} \approx 6,739$ und $t_{s3} \approx 12,159$. Der Zeitpunkt t_{s3} liegt außerhalb des betrachteten Zeitrahmens.

Unter Berücksichtigung des Verlaufs des Graphens von f folgt, dass das gesuchte Zeitintervall ca. 2,3 s nach dem Verlassen der Ruheposition beginnt und ca. 6,7 s nach dem Verlassen der Ruheposition endet.

Teilaufgabe d)

(1) Es ist $F(t) = 0,0202 \cdot t^4 - 0,57 \cdot t^3 + 5,04 \cdot t^2$ eine Stammfunktion von f .

$$\text{Damit gilt } \int_0^{10} f(t) dt = F(10) - F(0) = 136.$$

Der Tiger legt in den modellierten 10 s eine Strecke von 136 m zurück.

(2) Der Tiger legt in den modellierten 10 s eine Strecke von 136 m zurück.

Er erreicht somit eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $13,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Teilaufgabe e)

(1) Term für Phase 2 [$4,2 < t \leq 9,2$]: $f_2(t) = f(4,2) \approx 18,2$.

Term für Phase 3 [$9,2 < t \leq 15$]: $f_3(t) = f(t-5)$.

(2) $f_3'(15) = f'(10) = 0,12$. Daher ist die Tangente an f_3 an der Stelle $t = 15$ nur näherungsweise eine Parallele zur t -Achse. Der Übergang ist also nicht knickfrei.

(3) Da man die Strecken für Phase 1 und Phase 3 direkt mit dem Originalmodell ermitteln kann, ergibt sich für die gesuchte Strecke:

$$\begin{aligned} & \int_0^{4,2} f(t) dt + 5 \cdot 18,2 + \int_{9,2}^{15} f_3(t) dt \\ &= \int_0^{10} f(t) dt + 5 \cdot 18,2 = 136 + 91 = 227 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Der Tiger legt insgesamt eine Strecke von 227 m zurück.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) gibt den Funktionswert an.	1			
2	(1) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) weist rechnerisch nach, dass der Tiger seine Maximalgeschwindigkeit von ca. 18,2 m/s nach ca. 4,2 Sekunden erreicht.	7			
4	(2) gibt den Wert in km/h an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11)					
	Summe Teilaufgabe a)	11			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) erläutert die Bedeutung von f' im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) ermittelt den Zeitpunkt der stärksten Abnahme auf zwei Nachkommastellen genau.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
	Summe Teilaufgabe b)	6			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	ermittelt das Zeitintervall, in dem die Geschwindigkeit des Tigers mindestens 15 m/s beträgt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)					
Summe Teilaufgabe c)		4			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) berechnet das Integral.	4			
2	(1) erläutert die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) ermittelt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Tigers in den modellierten 10 s.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8)					
Summe Teilaufgabe d)		8			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt für die Phasen 2 und 3 jeweils einen Funktionsterm an.	4			
2	(2) prüft, ob der gesuchte Übergang knickfrei möglich ist.	3			
3	(3) ermittelt die Länge der Strecke, die der Tiger in den ersten 15 s zurücklegt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11)					
Summe Teilaufgabe e)		11			

Summe insgesamt		40			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.



Name: _____

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In *Abbildung 1* ist ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(10|10|0)$, $C(10|0|10)$ und $D(0|10|10)$ in einem kartesischen Koordinatensystem abgebildet.

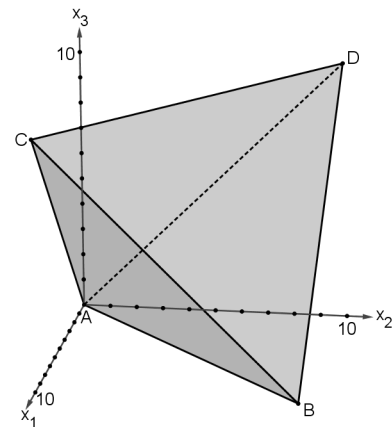


Abbildung 1

- a) (1) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M von \overline{AB} an.
- (2) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.
- (3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und den Oberflächeninhalt des Tetraeders $ABCD$.
- [Zur Kontrolle: $O_{\text{Tetraeder}} = 200 \cdot \sqrt{3}$ FE]
- (4) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen $V = 1000$ VE an, der das Tetraeder enthält.

(2 + 4 + 4 + 4 Punkte)



Name: _____

b) (1) E ist die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

ist eine Gerade, die durch den Punkt D verläuft.

Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt P von g und E .

[Zur Kontrolle: $P\left(\frac{20}{3} \mid \frac{10}{3} \mid \frac{10}{3}\right)$]

(2) Zeigen Sie, dass \overline{DP} auf \overline{AB} und \overline{AC} senkrecht steht.

(3) Bestimmen Sie rechnerisch das Volumen des Tetraeders $ABCD$.

(6 + 3 + 3 Punkte)

Das Tetraeder $ABCD$ modelliert einen Körper mit Kanten aus Draht. Diesen Körper taucht man in Seifenlaug. Beim Herausnehmen bilden sich im Inneren des Körpers Flächen aus Seifenhaut (vgl. Abbildungen 2 und 3).

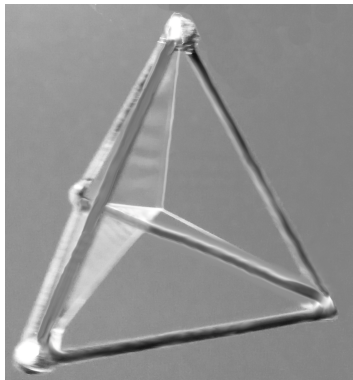


Abbildung 2

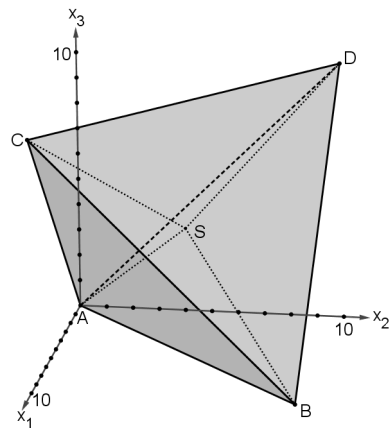


Abbildung 3



Name: _____

Die Seifenhaut besteht aus sechs kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt, der durch $S(5|5|5)$ modelliert wird. S liegt im Inneren des Tetraeders. Jedes dieser Dreiecke hat den Flächeninhalt $F = 25 \cdot \sqrt{2}$ FE.

c) (1) *Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Gesamtflächeninhalt der Seifenhaut kleiner ist als der Oberflächeninhalt des Tetraeders.*

(2) *Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.*

(3) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt S auf der Strecke \overline{DP} liegt.*

(4) *Begründen Sie, dass das Volumen der Pyramide $ABCS$ ein Viertel des Volumens des Tetraeders $ABCD$ beträgt.*

(3 + 3 + 5 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
Analytische Geometrie und Lineare Algebra
 - Lineare Gleichungssysteme
 - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
 - Lagebeziehungen
 - Skalarprodukt
2. *Medien/Materialien*
 - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $M(5|5|0)$.

$$(2) \text{ Es gilt } \overline{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Aus } |\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ [LE] folgt,}$$

dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

$$(3) \text{ Mit } |\overline{MC}| = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{150} = 5 \cdot \sqrt{6} \text{ folgt für die Fläche des}$$

$$\text{Dreiecks } ABC: A_{ABC} = 0,5 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{6} = 25 \cdot \sqrt{12} = 50 \cdot \sqrt{3} \text{ [FE].}$$

$$\text{Damit ergibt sich } O_{\text{Tetraeder}} = 4 \cdot A_{ABC} = 200 \cdot \sqrt{3} \text{ [FE].}$$

(4) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen $V = 1000$ VE sind $P_1(0|0|0)$, $P_2(10|10|0)$, $P_3(10|0|10)$, $P_4(0|10|10)$, $P_5(10|0|0)$, $P_6(0|10|0)$, $P_7(0|0|10)$ und $P_8(10|10|10)$.

Teilaufgabe b)

$$(1) E: \vec{x} = k \cdot \overrightarrow{AB} + l \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, k, l \in \mathbb{R}, \text{ ist eine Parameterform der Ebene } E,$$

in der das Dreieck ABC liegt.

$$\text{Aus } \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich das Gleichungssystem}$$

$$\begin{cases} -t + 10k + 10l = 0 \\ t + 10k = 10 \\ t + 10l = 10 \end{cases}.$$

Der TR liefert die Lösung $t = \frac{20}{3}$, $k = \frac{1}{3}$ und $l = \frac{1}{3}$.

Einsetzen von $t = \frac{20}{3}$ in die Parametergleichung von g liefert $P\left(\frac{20}{3} \mid \frac{10}{3} \mid \frac{10}{3}\right)$.

$$(2) \text{ Es gilt } \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wegen } \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \text{ steht } \overrightarrow{DP} \text{ auf } \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{AC} \text{ senkrecht.}$$

$$(3) \text{ Mit } |\overrightarrow{DP}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{3} \text{ folgt}$$

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{ABC}} \cdot |\overrightarrow{DP}| = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1000}{3} \text{ [VE].}$$

Teilaufgabe c)

(1) Die Seifenhaut hat einen Gesamtflächeninhalt von $6 \cdot F = 150 \cdot \sqrt{2}$ [FE].

Aus $1 - \frac{150 \cdot \sqrt{2}}{200 \cdot \sqrt{3}} \approx 0,3876$ folgt, dass der Gesamtflächeninhalt der Seifenhaut um

ca. 38,76 % kleiner ist als der Oberflächeninhalt des Tetraeders.

(2) Für den Winkel α zwischen \overrightarrow{SB} und \overrightarrow{SD} gilt $\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|} = -\frac{1}{3}$.

Daraus folgt $\alpha \approx 109,47^\circ$.

(3) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$, $r \in [0;1]$, ist eine Parameterform der Strecke \overline{DP} .

Es muss die Gleichung $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ -\frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$ gelöst werden.

Die Lösung lautet $r = \frac{3}{4}$. Mit $r = \frac{3}{4} \in [0;1]$ liegt S auf \overline{DP} .

(4) Da der Punkt S die Strecke \overline{DP} im Verhältnis 1:3 teilt, hat die Höhe der Pyramide $ABCS$ ein Viertel der Länge der Höhe des Tetraeders $ABCD$. Bei gleicher Grundfläche ABC beträgt das Volumen der Pyramide $ABCS$ ein Viertel des Volumens des Tetraeders $ABCD$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) gibt die Koordinaten des Mittelpunktes M von \overline{AB} an.	2			
2	(2) zeigt, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.	4			
3	(3) bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .	3			
4	(3) bestimmt den Oberflächeninhalt des Tetraeders $ABCD$.	1			
5	(4) gibt die Koordinaten der Eckpunkte eines Würfels mit dem Volumen $V = 1000$ VE an, der das Tetraeder enthält.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
	Summe Teilaufgabe a)	14			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt rechnerisch den Schnittpunkt P von g und E .	6			
2	(2) zeigt, dass \overrightarrow{DP} auf \overline{AB} und \overline{AC} senkrecht steht.	3			
3	(3) bestimmt rechnerisch das Volumen des Tetraeders $ABCD$.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12)					
	Summe Teilaufgabe b)	12			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt, um wie viel Prozent der Gesamtflächeninhalt der Seifenhaut kleiner ist als der Oberflächeninhalt des Tetraeders.	3			
2	(2) berechnet die Größe des Winkels zwischen \overline{SB} und \overline{SD} .	3			
3	(3) weist rechnerisch nach, dass der Punkt S auf der Strecke \overline{DP} liegt.	5			
4	(4) begründet, dass das Volumen der Pyramide ABCS ein Viertel des Volumens des Tetraeders ABCD beträgt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
Summe Teilaufgabe c)		14			

Summe insgesamt	40			
------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil A	24			
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	40			
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	40			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	104			
aus der Punktzahl resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverordnung auf der Grundlage von § 34 APO-GOST

Die Klausur wird abschließend mit der Note _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0



Name: _____

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Mit einem Glücksrad mit fünf gleich großen Sektoren (siehe *Abbildung 1*), einem Spielplan und einer Figur (siehe *Abbildung 2*) wird folgendes Spiel gespielt:

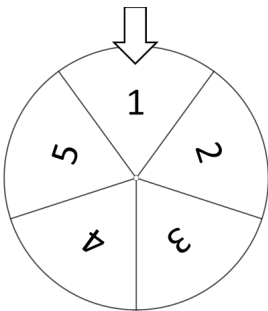


Abbildung 1: Glücksrad

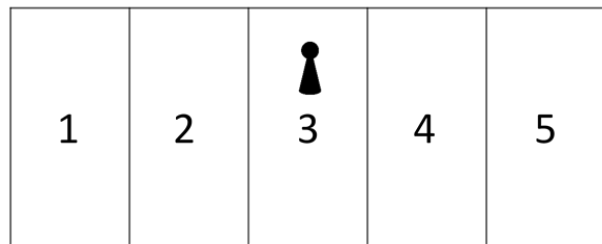


Abbildung 2: Spielplan mit Figur

Zu Beginn entscheidet der Spieler, ob er sein Spiel auf dem Feld 2, 3 oder 4 beginnt. Er stellt die Figur auf dem Spielplan auf das Feld mit der entsprechenden Zahl. Anschließend wird das Glücksrad gedreht. Die Figur bewegt sich dann nach den folgenden Regeln:

- Zeigt der Pfeil am Glücksrad auf die Zahl des Feldes, auf dem sich die Figur befindet, so bleibt die Figur auf diesem Feld.
- Zeigt der Pfeil auf eine Zahl, die größer als die Zahl des Feldes ist, auf dem sich die Figur befindet, so wandert die Figur ein Feld nach rechts.
- Zeigt der Pfeil auf eine Zahl, die kleiner als die Zahl des Feldes ist, auf dem sich die Figur befindet, so wandert die Figur ein Feld nach links.

Erreicht die Figur das Feld 1, so hat der Spieler das Spiel verloren und das Spiel ist beendet.

Erreicht die Figur das Feld 5, so hat der Spieler das Spiel gewonnen und das Spiel ist beendet.



Name: _____

Das Spiel kann als stochastischer Prozess mit den Zuständen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 und Z_5 modelliert werden. Zustand Z_1 bedeutet, dass sich die Figur auf dem Feld 1 befindet, Zustand Z_2 bedeutet, dass sich die Figur auf dem Feld 2 befindet usw.

Der Spielverlauf kann durch die Matrix M modelliert werden:

$$M = \begin{array}{ccccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & \text{von/nach} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{array} \end{array} .$$

- a) (1) *Erklären Sie aus dem Sachzusammenhang, wie sich die Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte der Matrix M ergeben.*
- (2) *Erstellen Sie ein zur Matrix M passendes Übergangsdiagramm.*
- (3) *Wenn der Spieler sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, so ist es für ihn gleich wahrscheinlich, das Spiel zu gewinnen oder zu verlieren.*

Erklären Sie anhand der Übergangswahrscheinlichkeiten ohne weitere Berechnung diese Tatsache.

(4 + 4 + 3 Punkte)

- b) (1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach höchstens zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt.*
- (2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach genau zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt.*
- (3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach höchstens fünf Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt.*



Name: _____

- (4) Ein Spieler beginnt das Spiel auf dem Feld 4. Der Spielbeginn wird durch den Vektor \vec{s} beschrieben.

$$\text{Für ein geeignetes } a \in \mathbb{N} \text{ gilt dann: } M^a \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{48}{625} \\ \frac{108}{625} \\ \frac{156}{625} \\ \frac{109}{625} \\ \frac{204}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0768 \\ 0,1728 \\ 0,2496 \\ 0,1744 \\ 0,3264 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie a .

(4 + 4 + 5 + 4 Punkte)

- c) (1) Vergleicht man für eine beliebige natürliche Zahl n die Matrixpotenzen M^n und M^{n+1} , so ist zu erkennen, dass alle Einträge in der ersten und in der fünften Zeile der Matrix M^{n+1} größer oder gleich den entsprechenden Einträgen in der Matrix M^n sind.

Erklären Sie diese Tatsache.

[Ein rechnerischer Nachweis dieser Tatsache ist nicht erforderlich.]

Für die Matrixpotenz M^{100} gilt:

$$M^{100} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0,6250 & 0,5000 & 0,3750 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0 \\ 0 & 0,3750 & 0,5000 & 0,6250 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) *Interpretieren Sie die vierte Spalte der Matrix M^{100} im Hinblick auf die langfristige Entwicklung des Spieles.*

Der Einsatz für ein Spiel hängt davon ab, auf welchem Feld ein Spieler beginnt. Gewinnt der Spieler, dann werden ihm 8€ ausgezahlt. Wenn er verliert, dann wird ihm nichts ausgezahlt, d. h. er hat seinen Einsatz verspielt.

- (3) Entscheidet sich der Spieler dafür, sein Spiel auf dem Feld 4 zu beginnen, so beträgt sein Einsatz 5,50€.

Untersuchen Sie, ob ein Spieler, der jedes seiner Spiele auf dem Feld 4 beginnt, langfristig Gewinn macht.



Name: _____

- (4) Der Einsatz für das Feld 2 soll so festgesetzt werden, dass ein Spieler, der jedes seiner Spiele auf diesem Feld beginnt, langfristig weder Gewinn noch Verlust macht.

Ermitteln Sie den Einsatz für das Feld 2 so, dass diese Bedingung erfüllt ist.

(4 + 3 + 3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt Matrizen

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Stochastik

- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung
- Stochastische Prozesse

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

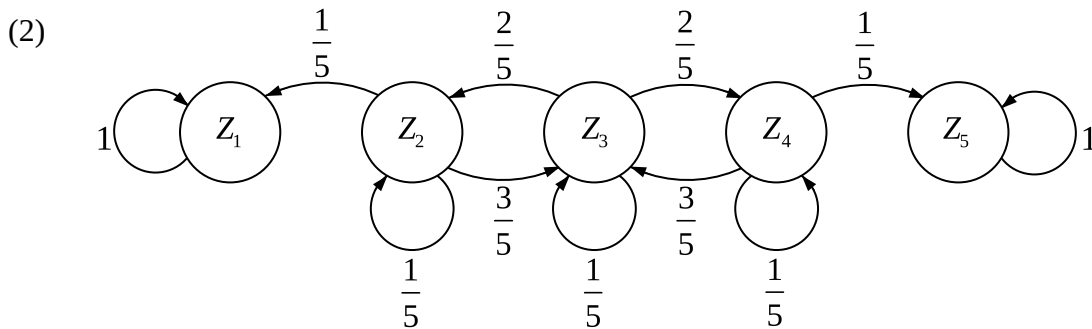
Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Befindet sich die Figur auf dem Feld 2 (Zustand Z_2),

- so wandert die Figur zum Feld 1 (Zustand Z_1), wenn bei der nächsten Drehung die Zahl 1 auftritt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{5}$ geschieht.
- so bleibt die Figur auf dem Feld 2 (Zustand Z_2), wenn bei der nächsten Drehung die Zahl 2 auftritt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{5}$ geschieht.
- so wandert die Figur zum Feld 3 (Zustand Z_3), wenn bei der nächsten Drehung eine der Zahlen 3, 4 oder 5 auftritt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{3}{5}$ geschieht.

Es gibt keine Möglichkeit, die Felder 4 und 5 (Zustände Z_4 und Z_5) von Feld 2 aus direkt zu erreichen.



(3) Von der Mitte des Spielfeldes aus gesehen stimmen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Spielfigur nach links wandert, mit den Wahrscheinlichkeiten überein, mit denen die Spielfigur nach rechts wandert. Auch die Wahrscheinlichkeiten, von den Spielfeldern 2 und 4 wieder zur Mitte des Spielfeldes zu gelangen, stimmen überein.

Daher ist es vom Feld 3 aus gleich wahrscheinlich, die Felder 1 und 5 zu erreichen und damit zu verlieren bzw. zu gewinnen.

Teilaufgabe b)

$$(1) \quad M^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,3267 \\ 0,0927 \\ 0,1613 \\ 0,0927 \\ 0,3267 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,3267 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach höchstens zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt, beträgt ungefähr $0,3267 [= 32,67\%]$.

$$(2) \quad M^9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,3058 \\ 0,1046 \\ 0,1794 \\ 0,1046 \\ 0,3058 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,3058 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach genau zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt, beträgt ungefähr $0,3267 - 0,3058 = 0,0209 [= 2,09\%]$.

$$(3) \quad M^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,3613 \\ 0,1347 \\ 0,2582 \\ 0,1344 \\ 0,1114 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,3613 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0,1114 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach höchstens fünf Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt, beträgt ungefähr $0,3613 + 0,1114 = 0,4727 [= 47,27\%]$.

[Ohne Rundung der Zwischenergebnisse ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $0,4726$.]

- (4) Da der Spieler auf dem Feld 4 beginnt, gilt $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Vergleich des Nenners 625 ($= 5^4$), der in den Wahrscheinlichkeiten $\frac{48}{625}$, $\frac{108}{625}$,

$\frac{156}{625}$ und $\frac{204}{625}$ im Vektor auftritt, mit dem Nenner 5, der in den Übergangswahrschein-

lichkeiten in der Matrix M auftritt, lässt vermuten, dass $a = 4$ gilt.

Die Berechnung $M^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{625} \\ \frac{108}{625} \\ \frac{156}{625} \\ \frac{109}{625} \\ \frac{204}{625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0768 \\ 0,1728 \\ 0,2496 \\ 0,1744 \\ 0,3264 \end{pmatrix}$ bestätigt diese Vermutung.

Teilaufgabe c)

- (1) Die Eintragungen in der ersten Zeile der Matrix M^n bzw. M^{n+1} sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ausgehend von dem Zustand Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bzw. Z_5 das Spiel nach n bzw. $n+1$ Drehungen in dem Zustand Z_1 ist, die Eintragungen in der fünften Zeile der Matrix M^n bzw. M^{n+1} sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ausgehend von dem Zustand Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bzw. Z_5 das Spiel nach n bzw. $n+1$ Drehungen in dem Zustand Z_5 ist. Da das Spiel nicht mehr in einen anderen Zustand übergehen kann, wenn es sich im Zustand Z_1 oder im Zustand Z_5 befindet (Z_1 und Z_5 sind absorbierende Zustände), können diese Wahrscheinlichkeiten mit zunehmender Spieldauer, also z. B. beim Übergang von n zu $n+1$, nur größer werden oder gleich bleiben.
- (2) Die Übergangswahrscheinlichkeiten in der vierten Spalte beziehen sich auf ein Spiel, bei dem sich die Spielfigur auf dem Feld 4 befindet. Langfristig befindet sich die Spielfigur dann mit großer Wahrscheinlichkeit nicht auf einem der Felder 2, 3 oder 4, d. h. das Spiel ist beendet. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel von Feld 4 aus langfristig verloren wird, beträgt 0,3750 [= 37,50%], die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von Feld 4 aus beträgt 0,6250 [= 62,50%].
- (3) Der Erwartungswert der Auszahlung pro Spiel beträgt $0,625 \cdot 8\text{€} = 5\text{€}$, wenn der Spieler sein Spiel auf dem Feld 4 beginnt. Da der Einsatz pro Spiel 5,50€ beträgt, macht ein Spieler in diesem Fall langfristig Verlust.
- (4) Da der Erwartungswert der Auszahlung pro Spiel $0,375 \cdot 8\text{€} = 3\text{€}$ beträgt, wenn ein Spieler sein Spiel auf dem Feld 2 beginnt, muss der Einsatz pro Spiel 3,00€ betragen.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) erklärt aus dem Sachzusammenhang, wie sich die Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte der Matrix M ergeben.	4			
2	(2) erstellt ein zur Matrix M passendes Übergangsdiagramm.	4			
3	(3) erklärt anhand der Übergangswahrscheinlichkeiten ohne weitere Berechnung, dass es für den Spieler gleich wahrscheinlich ist, das Spiel zu gewinnen oder zu verlieren, wenn er sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11)					
	Summe Teilaufgabe a)	11			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach höchstens zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt.	4			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler, der sein Spiel auf dem Feld 3 beginnt, nach genau zehn Drehungen des Glücksrades das Spiel gewinnt.	4			
3	(3) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach höchstens fünf Drehungen beendet ist, wenn der Spieler auf dem Feld 2 beginnt.	5			
4	(4) ermittelt a .	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17)					
	Summe Teilaufgabe b)	17			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) erklärt die Tatsache.	4			
2	(2) interpretiert die vierte Spalte der Matrix M^{100} im Hinblick auf die langfristige Entwicklung des Spieles.	3			
3	(3) untersucht, ob ein Spieler, der jedes seiner Spiele auf dem Feld 4 beginnt, langfristig Gewinn macht.	3			
4	(4) ermittelt den Einsatz für das Feld 2 so, dass ein Spieler, der jedes seiner Spiele auf diesem Feld beginnt, langfristig weder Gewinn noch Verlust macht.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12)					
	Summe Teilaufgabe c)	12			

	Summe insgesamt	40			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil A	24			
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	40			
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	40			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	104			
aus der Punktzahl resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverordnung auf der Grundlage von § 34 APO-GOST

Die Klausur wird abschließend mit der Note _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0



Name: _____

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Reisen mit dem Fernbus werden immer beliebter. Reiseanbieter werben mit günstigen Preisen und besonderem Komfort.

a) Für eine Städtereise stellt ein Busunternehmen einen Fernbus mit 59 Plätzen bereit, die vor Reiseantritt gebucht und bezahlt werden. Im Mittel werden 95 % der Buchungen angetreten.

(1) *Erläutern Sie, unter welcher Voraussetzung die Anzahl der angetretenen Buchungen bei einer Reise als binomialverteilt mit $p = 0,95$ angenommen werden kann.*

(2) Die Anzahl der angetretenen Buchungen wird als binomialverteilt mit $p = 0,95$ vorausgesetzt. Für einen bestimmten Reiseternin sind genau 59 Buchungen vorgenommen worden.

Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

E_1 : Genau 59 Buchungen werden angetreten.

E_2 : Mindestens 55 Buchungen werden angetreten.

E_3 : Mehr als 6 Buchungen werden nicht angetreten.

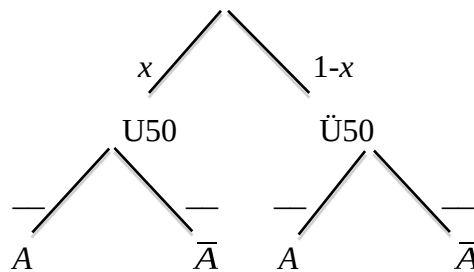


Name: _____

- (3) Obwohl Buchungen insgesamt mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht angetreten werden, treten Reisende unter 50 Jahren eine Buchung deutlich häufiger nicht an als Reisende über 50 Jahren. [Reisende, die genau 50 Jahre alt sind, werden zur Gruppe der Reisenden über 50 Jahren gezählt.]

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Buchung nicht angetreten wird, betrage bei Reisenden unter 50 Jahren 6 %, bei Reisenden über 50 Jahren nur 2 %.

- (i) Geben Sie auf den waagerechten Strichen die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im folgenden Baumdiagramm an.



U50: Reisende unter 50 Jahren

A: Antreten der Buchung

Ü50: Reisende über 50 Jahren

\bar{A} : Nichtantreten der Buchung

- (ii) Ein Reisender wird zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit x , dass es sich um einen Reisenden unter 50 Jahren handelt.

[Kontrolllösung: $x = 0,75$]

- (iii) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der Buchung eines Reisenden, der die Buchung nicht antritt, um einen Reisenden unter 50 Jahren handelt.

(3 + 9 + 8 Punkte)



Name: _____

b) Da erfahrungsgemäß nicht alle Buchungen angetreten werden, verkauft das Busunternehmen mehr Plätze als vorhanden sind. Für eine Städtereise mit 96 Plätzen werden 99 Buchungen vorgenommen (Überbuchung). Vereinfachend wird wieder angenommen, dass die Anzahl der angetretenen Buchungen binomialverteilt mit $p = 0,95$ ist.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person ihre Reise wegen Überbuchung nicht antreten kann.*

Kann eine Person die Reise wegen Überbuchung nicht antreten, wird vom Busunternehmen der komplette Reisepreis von 20 Euro zurückerstattet. Als Entschädigung wird zusätzlich ein Betrag von 300 Euro ausgezahlt.

(2) Das Busunternehmen erfasst Werte zur Überbuchung in der folgenden Tabelle.

Ermitteln Sie die in der Tabelle fehlenden Werte.

Anzahl der Personen, die wegen Überbuchung nicht antreten können	1	2	3
Anzahl k der angetretenen Buchungen	97	98	99
$P_{99; 0,95}(X = k)$			
Kosten für Erstattung und Entschädigung in €	320		

(3) *Beurteilen Sie, ob sich aus finanzieller Sicht die Praxis, 99 Buchungen für eine Reise mit 96 Plätzen zu bestätigen, für das Busunternehmen im Mittel lohnt.*

(3 + 5 + 4 Punkte)



Name: _____

c) In der Werbung eines anderen Busunternehmens werden bisher Kunden damit gewonnen, dass bis kurz vor Reiseantritt eine kostenlose Stornierung der Buchung möglich ist. Aktuell liegt der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen bei 7 %.

Das Busunternehmen ändert die Vertragsbedingungen dahingehend, dass bei kurzfristigen Stornierungen ein Teil des Fahrpreises gezahlt werden muss. Es geht davon aus, dass durch diese Maßnahme der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen sinkt.

Die nächsten 1000 Buchungen sollen auf diese Wirkung hin untersucht werden. Die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen wird als binomialverteilt angenommen.

Falls weniger als 55 Buchungen kurzfristig storniert werden, geht das Busunternehmen davon aus, dass die Maßnahme erfolgreich ist.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Maßnahme als erfolgreich angesehen wird, obwohl sich der Anteil der Buchungen, die kurzfristig storniert werden, nicht verändert hat.*

(2) Angenommen, die Maßnahme habe Erfolg gehabt und es gelte $p = 0,04$.

Bestimmen Sie für $n = 1000$ und $p = 0,04$ die Wahrscheinlichkeit $P_{1000; 0,04}(X \geq 55)$

und erklären Sie deren Bedeutung im Sachkontext.

(3 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2020

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2020

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Stochastik

- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Jede Buchung wird unabhängig von den anderen Buchungen mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 0,95$ angetreten.

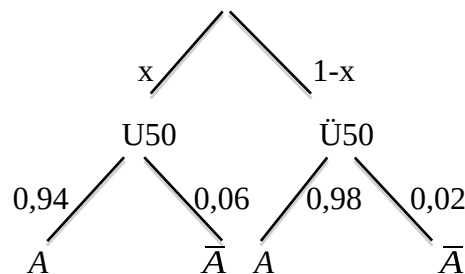
(2) X : Anzahl der angetretenen Buchungen.

$$P(E_1) = P_{59;0,95}(X = 59) \approx 0,0485.$$

$$P(E_2) = P_{59;0,95}(X \geq 55) \approx 0,8281.$$

$$P(E_3) = P_{59;0,95}(X \leq 52) \approx 0,0274.$$

(3) (i)



U50: Reisende unter 50 Jahren

A: Antreten der Buchung

Ü50: Reisende über 50 Jahren

\bar{A} : Nichtantreten der Buchung

(ii) Da insgesamt 5 % der Buchungen nicht angetreten werden, ergibt sich aus dem Baumdiagramm:

$$0,06 \cdot x + 0,02 \cdot (1 - x) = 0,05$$

$$0,04 \cdot x = 0,03$$

$$x = 0,75$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Reisenden unter 50 Jahren handelt, beträgt 0,75.

$$(iii) \frac{0,75 \cdot 0,06}{0,05} = 0,9$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem Reisenden, der die Buchung nicht antritt, um einen Reisenden unter 50 Jahren handelt, beträgt 0,9.

Teilaufgabe b)

X : Anzahl der angetretenen Buchungen.

$$(1) P_{99;0,95}(X \geq 97) \approx 0,1225.$$

(2)

Anzahl der Personen, die wegen Überbuchung nicht antreten können	1	2	3
Anzahl der angetretenen Buchungen, k	97	98	99
$P_{99;0,95}(X = k)$	0,0837	0,0325	0,0062
Kosten für Erstattung und Entschädigung in €	320	640	960

$$(3) \text{ Erwartete Kosten: } K \approx 0,0837 \cdot 320 \text{ €} + 0,0325 \cdot 640 \text{ €} + 0,0062 \cdot 960 \text{ €} \approx 53,54 \text{ €}.$$

[Ohne Rundung der Zwischenergebnisse ergibt sich $K \approx 53,56 \text{ €}$.]

$$\text{Zusatzeinnahmen durch Überbuchung: } E = 3 \cdot 20 \text{ €} = 60 \text{ €}.$$

Bei der beschriebenen Praxis entsteht im Mittel ein Gewinn von 6,46 € für das Busunternehmen. Die Praxis lohnt sich aus finanzieller Sicht im Mittel.

Teilaufgabe c)

(1) X : Anzahl der Buchungen, die kurzfristig storniert werden.

$$P_{1000;0,07}(X \leq 54) \approx 0,0241.$$

$$(2) P_{1000;0,04}(X \geq 55) \approx 0,0124.$$

Unter der Annahme, dass der Anteil der Stornierungen durch 4 % gegeben ist, beschreibt $P_{1000;0,04}(X \geq 55)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 1000 Buchungen zufällig 55 oder mehr Buchungen kurzfristig storniert werden und das Busunternehmen dann irrtümlicherweise von einem ausbleibenden Erfolg der Maßnahme ausgeht.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) erläutert unter welcher Voraussetzung die Anzahl der angetretenen Buchungen als binomialverteilt mit $p = 0,95$ angenommen werden kann.	3			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 .	3			
3	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 .	3			
4	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3 .	3			
5	(3) (i) gibt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm an.	2			
6	(3) (ii) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit x .	3			
7	(3) (iii) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20)					
	Summe Teilaufgabe a)	20			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
2	(2) ermittelt die in der Tabelle fehlenden Werte.	5			
3	(3) beurteilt, ob sich aus finanzieller Sicht die Praxis, 99 Buchungen für eine Reise mit 96 Plätzen zu bestätigen, im Mittel lohnt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12)					
	Summe Teilaufgabe b)	12			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
3	(2) erklärt die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit im Sachkontext.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8)					
	Summe Teilaufgabe c)	8			

	Summe insgesamt	40			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil A	24			
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	40			
Übertrag der Punktzahl aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	40			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	104			
aus der Punktzahl resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverordnung auf der Grundlage von § 34 APO-GOST

Die Klausur wird abschließend mit der Note _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0