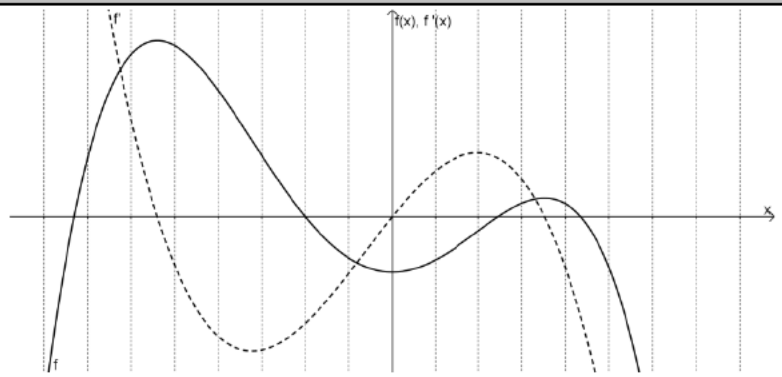
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

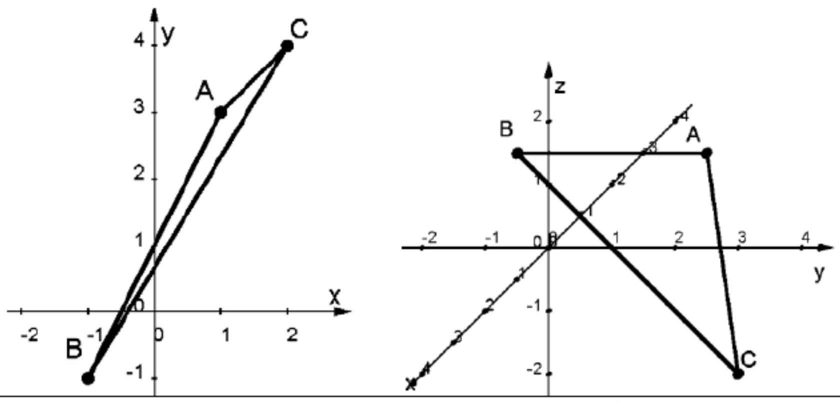
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	bestimmt die Nullstellen, berechnet: $\int_0^1 f(x)dx$ und beurteilt ohne Rechnung, ob $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ ist.	Notw. Bedingung: $f(x) = 0$ $-2x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x^2 + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-2x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$ $\int_0^1 (-2x^3 + 2x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^1$ $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ Die Funktion f ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Von -1 bis 0 verläuft die Funktion unterhalb der Abszissenachse und das Integral hat einen negativen Wert. Von 0 bis 1 verläuft die Funktion über der Abszissenachse und das Integral hat einen positiven Wert. Diese beiden orientierten Flächeninhalte sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung gleich groß und heben sich auf.	5
1b	ordnet begründet den richtigen Graphen zu, gibt die Funktionsgleichung von g an und leitet die 1. Ableitung her.	f_2 ist von den drei zur Auswahl stehenden Graphen von natürlichen Exponentialfunktionen der richtige Graph. Die Punktprobe zeigt, dass die Punkte P_1 und P_3 nicht auf dem Graphen der gegebenen Funktion f liegen, aber der Punkt P_2. Es gilt: $f_2(2) = 0{,}5 \cdot e^{2\cdot 2-4} = 0{,}5$ $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-4}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ Zwischenschritte sind erforderlich: $k'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^x}_{\text{Produktregel}}$ $= \frac{1}{2}e^x \cdot (1 + x)$	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1c</td><td>skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3 und

beurteilt die Aussage.</td><td>

Die Stammfunktion F ist eine Funktion 5. Grades, daher hat die Stammfunktion mindestens eine Nullstelle.

Aufgrund der drei Extremstellen des Graphen der Funktion f besitzt die Stammfunktion genau drei Wendepunkte.
Die Aussage ist also richtig.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>gibt die ganzzahligen Koordinaten der Punkte A, B und C an und

zeichnet die Ansichten des Dreieckes ABC in die Koordinatensysteme.</td><td>A(1|3|2); B(-1|-1|1); C(2|4|-1)

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>bestimmt eine Ebenengleichung, in der die Punkte A, B und C liegen.

entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>Als Ortsvektor der Ebene kann der Ortsvektor $\overrightarrow{0A}$ zum Punkt A genommen werden.
Die Richtungsvektoren der Ebene ergeben sich z. B. aus der Differenz der Ortsvektoren der Punkte A und B bzw. A und C.
$\begin{pmatrix}-1\\2\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\7\\2\end{pmatrix}$
Somit ergibt sich die Ebene E mit
$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}11\\7\\2\end{pmatrix}$
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Der Punkt C liegt auf der Geraden g_1.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Gerade g_2 mit $g_2:\vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ verläuft parallel zur Geraden g_1.</td><td></td><td>X</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1f	prüft, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind,	Zu prüfen ist, ob der Vektor $\vec{b}$ ein Vielfaches von Vektor $\vec{a}$ ist: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Die Gleichung der x-Koordinate $(4 = s \cdot (-2))$ ist für $s = -2$ erfüllt. In der Gleichung der y-Koordinate $(-3 = s \cdot 1)$ führt $s = -2$ zu einem Widerspruch, die Vektoren sind also nicht kollinear.	5
	berechnet den Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ und	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$	
	berechnet den Ausdruck und erläutert das Ergebnis.	$4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 = 0$ Es wird das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ berechnet, da es Null ist, sind die beiden Vektoren orthogonal zueinander.	
			30

Aufgabe 2: Seilbahn

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	leitet die Geradengleichung her,	Der Stützvektor der Geraden ist der Ortsvektor von Punkt A. Der Richtungsvektor der Geraden ist der Verbindungsvektor von Punkt A zu Punkt B: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 78 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}$. Deswegen lautet die Geradengleichung: $g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}$.	6
	gibt den Definitionsbereich des Parameters s an und	$t \in [0; 1]$.	
	bestimmt die Position der Gondel, wenn die Hälfte der Strecke zurückgelegt wurde.	$\begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 225 \\ 41{,}5 \end{pmatrix}$ Die Gondel befindet im Punkt $(60 \mid 225 \mid 41{,}5)$.	
2b	weist nach, dass der Steigungswinkel von $\alpha = 30°$ nicht überschritten wird und	Gesucht ist der Winkel zwischen dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und der Projektion $\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der x-y-Ebene: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert}$ $\alpha \approx 10{,}48\,°$ Der maximale Steigungswinkel wird mit ca. $\alpha \approx 10{,}48\,°$ deutlich unterschritten.	4
	zeigt, dass die zurückzulegende Strecke ca. 400 m beträgt und	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{(-60)^2 + (-390)^2 + 73^2} \approx 401{,}28$. Die zurückzulegende Strecke beträgt ca. 400 m.	
	berechnet die Geschwindigkeit.	$\dfrac{400}{5} = 80$ Die Bahn müsste mindestens mit einer Geschwindigkeit von ca. $80\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$ fahren.	

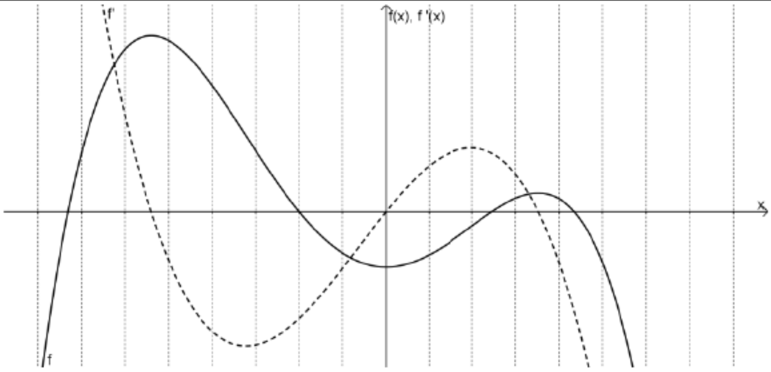
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2c	beurteilt, ob der Granitfelsen beim Verlegen der Versorgungsleitung im Weg sein wird und untersucht, ob die von der Gemeinde zur Verfügung gestellte Summe ausreicht, um die entstehenden Kosten zu tragen.	Die x-Koordinate des Felsens ist in x-Achsen-Richtung näher am Ursprung als die x-Koordinate der Bergstation. Die y-Koordinate des Felsens ist in y-Achsen-Richtung näher am Ursprung als die y-Koordinate der Bergstation. Dementsprechend liegt der Granitfelsen „hinter" der Bergstation und stellt kein Problem dar, wenn die Versorgungsleitung vom Punkt R in Richtung der Bergstation verlegt wird. Gesucht ist zunächst der Abstand vom Punkt R zum Punkt B_F: $\lvert\overrightarrow{RB_F}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}30\\30\\73\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}50\\160\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-20\\-130\\73\end{pmatrix}\right\rvert.$ $\lvert\overrightarrow{RB_F}\rvert \approx 150{,}43$ Die Kosten pro Meter betragen 45,00 EUR. $\lvert\overrightarrow{RB_F}\rvert \cdot 45 \approx 6\,769{,}32$ Die Kosten betragen ca. 6 769,32 EUR, demnach wird die Summe der Gemeinde ausreichen.	5
2d	weist nach, dass der Berghang durch einen Ausschnitt der Ebene E_W modelliert werden kann und bestimmt, aus welcher lotrechten Höhe die Fahrgäste abgeseilt werden müssen.	Einsetzen des x-Achsenschnittpunktes $P_x(250 \mid 0 \mid 0)$ in die Ebenengleichung E_W: $4 \cdot 250 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 1\,000$ $1\,000 = 1\,000$ Einsetzen des y-Achsenschnittpunktes $P_y(0 \mid 200 \mid 0)$ in die Ebenengleichung E_W: $4 \cdot 0 + 5 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 1\,000$ $1\,000 = 1\,000$ Einsetzen des z-Achsenschnittpunktes $P_z(0 \mid 0 \mid 100)$ in die Ebenengleichung E_W: $4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 100 = 1\,000$ $1\,000 = 1\,000$ Alle drei Punkte liegen in der Ebene E_W, somit kann der Berghang mit einem Ausschnitt der Ebene E_W modelliert werden. Die Höhe des Hanges lotrecht unter der Gondel ergibt sich durch Einsetzen der x- und y-Koordinate des Punktes G in die Ebenengleichung E_W. $4 \cdot 42 + 5 \cdot 108 + 10 \cdot z = 1\,000 \;\Leftrightarrow z = 29{,}2$ Der vertikale Abstand der Gondel zum Hang beträgt also $63{,}4 - 29{,}2 = 34{,}2$ Demnach müssten die Touristen aus einer Höhe von 34,2 m über dem Berghang gerettet werden.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2e	gibt das Ergebnis des Ausdrucks an und erläutert, was mit diesem Ausdruck im Sachzusammenhang berechnet wurde	$\alpha \approx 44{,}13°$ Mit dem Ausdruck wird der Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 3{,}75 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnet. Dabei ist $\begin{pmatrix} 3{,}75 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt H und dem Punkt T und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor der senkrechten Tanne. Der Winkel $\alpha \approx 44{,}13°$ gibt also den Winkel an, unter dem das Stahlseil an der Tanne befestigt ist.	3
2f	prüft, ob das Tragseil der Seilbahn die Flugbahn der Fallschirmspringer schneidet.	Die Flugbahn der Fallschirmspringer kann durch einen Teil der Geraden g_f modelliert werden. Der Ortsvektor entspricht dem Vorsprung an der Felswand. Der Richtungsvektor berücksichtigt je Meter Sinkflug (z-Koordinate hat den Wert -1) zwei Meter Horizontalflug: $g_f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0{,}5 \\ 200 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Durch Gleichsetzen mit der Geradengleichung des Tragseils ergibt sich ein Gleichungssystem: $30 = 90 + t \cdot (-60)$ $0{,}5 + k \cdot 2 = 420 + t \cdot (-390)$ $200 + k \cdot (-1) = 5 + t \cdot 73$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung, also kreuzt das Tragseil nicht die Flugbahn der Fallschirmspringer.	4
2g	bestimmt die Gleichung einer Funktion f und erläutert, warum sich aus $\lvert\overline{CD}\rvert = 400$ der Definitionsbereich $D(f) = [0; 393{,}3]$ ergibt.	Gesucht ist eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Durch das folgende Gleichungssystem können die Unbekannten bestimmt werden: $f(0) = 78$ $f(393{,}3) = 5$ $f'(393{,}3) = 0$ Daraus ergibt sich $a = \frac{7\,300}{15\,468\,489}, b = -\frac{1\,460}{3\,933}$ und $c = 78$ und somit die Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{7\,300}{15\,468\,489} \cdot x^2 - \frac{1\,460}{3\,933} \cdot x + 78$ Die Länge des (geradlinigen) Seils beträgt ca. 400 m und der Höhenunterschied der Stationen beträgt 73 m. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich der horizontale Abstand der Stationen: $d = \sqrt{400^2 - 73^2}$ $d \approx 393{,}3$ Im neuen Koordinatensystem ergibt sich aus dieser Entfernung der Definitionsbereich $D(f) = [0; 393{,}3]$.	4
			30

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	bestimmt die Nullstellen, berechnet: $\int_0^1 f(x)dx$ und beurteilt ohne Rechnung, ob $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ ist.	Notw. Bedingung: $f(x) = 0$ $-2x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x^2 + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-2x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$ $\int_0^1 (-2x^3 + 2x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^1$ $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ Die Funktion f ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Von -1 bis 0 verläuft die Funktion unterhalb der Abszissenachse und das Integral hat einen negativen Wert. Von 0 bis 1 verläuft die Funktion über der Abszissenachse und das Integral hat einen positiven Wert. Diese beiden orientierten Flächeninhalte sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung gleich groß und heben sich auf.	5
1b	ordnet begründet den richtigen Graphen zu, gibt die Funktionsgleichung von g an und leitet die 1. Ableitung her.	f_2 ist von den drei zur Auswahl stehenden Graphen von natürlichen Exponentialfunktionen der richtige Graph. Die Punktprobe zeigt, dass die Punkte P_1 und P_3 nicht auf dem Graphen der gegebenen Funktion f liegen, aber der Punkt P_2. Es gilt: $f_2(2) = 0{,}5 \cdot e^{2\cdot 2-4} = 0{,}5$ $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-4}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ Zwischenschritte sind erforderlich: $k'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot e^x + \frac{1}{2}\cdot x \cdot e^x}_{\text{Produktregel}}$ $= \frac{1}{2}e^x \cdot (1 + x)$	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1c</td><td>skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3 und

beurteilt die Aussage.</td><td>

Die Stammfunktion F ist eine Funktion 5. Grades, daher hat die Stammfunktion mindestens eine Nullstelle.

Aufgrund der drei Extremstellen des Graphen der Funktion f besitzt die Stammfunktion genau drei Wendepunkte.
Die Aussage ist also richtig.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>gibt für das Gleichungssystem eine Matrizen-Gleichung an und

berechnet die Lösungsmenge des Gleichungssystems.</td><td>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x & -y & & = & -1 \\ \text{II} & x & +y & -4z & = & 7 \\ \text{III} & x & -3y & +2z & = & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{I} - \text{II} & \text{IV} & -2y & +4z & = & -8 \\ \text{I} - \text{III} & \text{V} & 2y & -2z & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{IV} + \text{V} \quad \text{VI} & +2z = -2 & \Leftrightarrow z = -1 \\ z \text{ in IV} & -2y - 4 = -8 & \Leftrightarrow y = 2 \\ y \text{ in I} & x - 2 = -1 & \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

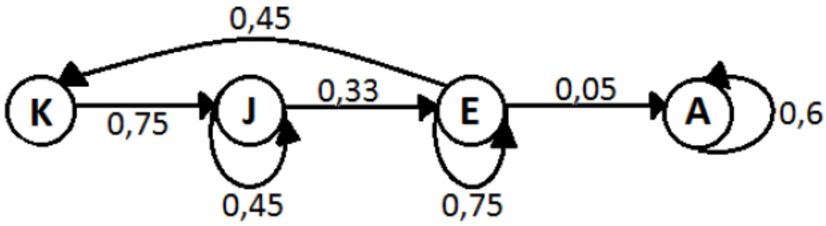
$L = \{(1,2,-1)\}$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Durch Addition einer 2 x 4-Matrix mit einer 4 x 3-Matrix ergibt sich eine 2 x 3-Matrix.		X
Wenn das Produkt $A \cdot B$ definiert ist, dann gilt: $A \cdot B = A^T \cdot B^T$.		X
Für die Multiplikation einer quadratischen Matrix D mit der Einheitsmatrix E und einem Skalar a gilt $D \cdot E \cdot a = a \cdot D$.	X	
Wenn für zwei Matrizen A und B gilt $A + B = B + A$, dann folgt daraus $A \cdot B = B \cdot A$.		X
Wenn gilt: $A \cdot B = E$, dann ist B invers zu A.	X	

</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1f	ermittelt $\vec{p}_1$, also die Verteilung nach einem Übergang, und erläutert die Bedeutung des Vektors $\vec{p}_0$.	$\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0$ $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}75 \cdot 0{,}4 \\ 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}3 \\ 0{,}3 + 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\vec{p}_0 = \vec{p}_1$ Es handelt sich um eine stabile Verteilung, da sich die Anfangsverteilung durch die Übergänge, die durch die Übergangsmatrix A beschrieben werden, nicht verändert.	5
			30

Aufgabe 2: Schweinswale

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	stellt den Prozess durch einen geeigneten Graphen dar und beurteilt die drei Aussagen der Schülerin.	 „Nur die erwachsenen Tiere (E) sind fortpflanzungsfähig.“ Alle Elemente in der ersten Zeile außer $m_{13} = 0{,}45$ betragen null. Damit führt bei einer Multiplikation mit einem Bestandsvektor nur dieses Element zu einer Zunahme beim Kälberbestand K. Die Aussage ist daher richtig. „Die Sterberate ist bei den Jungtieren (J) am höchsten.“ Sterberate bei J: $1-(m_{22}+m_{32}) = 1-(0{,}45+0{,}33) = 0{,}22$ Sterberate bei K: $1-m_{21} = 1-0{,}75 = 0{,}25$ Sterberate bei E: $1-(m_{33}+m_{43}) = 1-(0{,}75+0{,}05) = 0{,}2$ Sterberate bei A: $1-m_{44} = 1-0{,}6 = 0{,}4$ Die Aussage ist falsch, da z. B. die Kälber eine höhere Sterberate aufweisen als die Jungtiere. „Die Population wird in 20 Jahren vom Aussterben bedroht sein.“ $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\cdot\left(M^{20}\cdot\begin{pmatrix}40\\60\\200\\30\end{pmatrix}\right) \approx 194 > 30$ Somit ist die Aussage falsch.	5
2b	zeigt, dass die von den Schülerinnen und Schülern erstellte Matrix M zu einer ähnlichen Prognose für das Jahr 2008 führt wie die Prognose der Experten, gibt für $M^2 = S$ die Matrizenelemente s_{12} und s_{41} an und interpretiert die Werte im Sachzusammenhang.	$M = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0{,}45 & 0\\0{,}75 & 0{,}45 & 0 & 0\\0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0\\0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6\end{pmatrix}, \vec{p}_0 = \begin{pmatrix}40\\60\\200\\30\end{pmatrix}$ $M^2\cdot\vec{p}_0 = \vec{p}_2 \approx \begin{pmatrix}76\\93\\146\\25\end{pmatrix}$ Der Gesamtbestand für 2008 liegt mit ca. 340 Tieren zwischen 320 und 350 Tieren, die Matrix M liefert ähnliche Werte wie die Prognose der Experten. $s_{12} = 0{,}1485$ $s_{41} = 0$ Der Wert 0,1485 bedeutet, dass 14,85 % der Jungtiere zwei Jahre später Nachkommen haben. Der Wert 0 bedeutet, dass die Kälber zwei Jahre später nicht in die Altersstufe der Alttiere gewechselt sind.	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>2c</td><td>gibt an, unter welcher Voraussetzung der Rechenansatz des Schülers verwendet werden kann und

begründet anhand des Kälberbestands, dass das Ergebnis in diesem Fall nicht verwendet werden kann.</td><td>Der Ansatz kann nur verwendet werden, wenn sich das Wechselverhalten nicht geändert hat.

$M^{-1} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} -162 \\ 404 \\ 89 \\ 43 \end{pmatrix}$

Es kann kein negativer Kälberbestand existieren, wie er im Ergebnis steht. Die Matrix ist für diese Berechnung nicht geeignet, da sich die Modellbedingungen massiv verändert haben müssen.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2d</td><td>prüft, ob die eingewanderten erwachsenen Tieren (E) nach diesem Modell zu einem Gesamtbestand zu Beginn des Jahres 2020 von über 300 Tieren führen könnten.</td><td>Der Bestand für 2020 berechnet sich mit der Mindestangabe von 82 für die eingewanderte erwachsene Tiere (E):

$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \cdot M_{neu} \cdot \left(\begin{pmatrix} 32 \\ 55 \\ 131 \\ 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 82 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \approx 303$

Folglich liegt der Gesamtbestand in 2020 bei über 300 Tieren.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2e</td><td>vervollständigt die Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle und

ermittelt, wie viele Metallblöcke M_3 für die Herstellung der 30 Pinger mindestens bestellt werden müssen.</td><td>Für die aus den Tabellen zu erstellenden Matrizen Q_{MZ}, Q_{ZB} und Q_{MB} gilt: $Q_{MZ} \cdot Q_{ZB} = Q_{MB}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 1 \\ a & 0 & 0 & c \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 4 & 3b+2 \\ 2a & 2a+4c & a+2c \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2b & 4 & 3b+2 \\ 2a & 2a+4c & a+2c \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a = 1, b = 2$ und $c = 1$

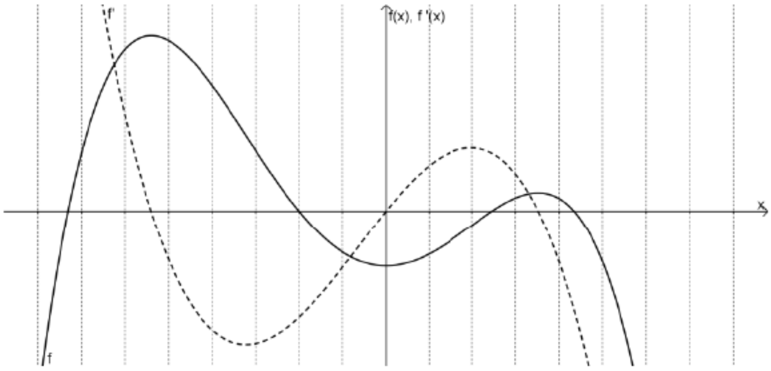
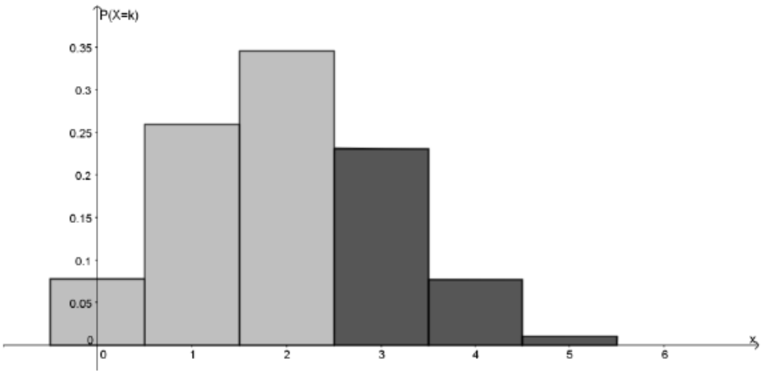
Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle

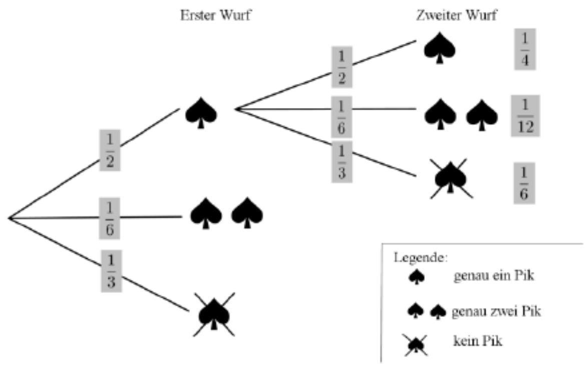
<table><tr><th></th><th>Z_1</th><th>Z_2</th><th>Z_3</th><th>Z_4</th></tr><tr><td>M_1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>M_2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>M_3</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>
$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 \\ 330 \\ 690 \end{pmatrix}$
$690 - 20 = 670$
Es müssen mindestens 670 Stück von M_3 bestellt werden.</td><td>4</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2f	entscheidet begründet, wie viele Pinger maximal mit dem Lagerbestand produziert werden können.	Es gilt: b_1, b_2, b_3 gibt die Anzahl der Bauteile B_1, B_2, B_3 an. Wenn der Lagerbestand aufgebraucht werden würde, müsste zunächst einmal gelten: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 44 \\ 78 \end{pmatrix}$ Das sich daraus ergebende lineare Gleichungssystem hat die folgende ganzzahlige Lösung: $b_1 = 7, b_2 = 4$ und $b_3 = 2$. Es können nur zwei Pinger gefertigt werden, da die entstandenen Bauteile im Verhältnis 1:1:1 benötigt werden.	4
2g	zeigt, dass die Gesamtkosten für die Herstellung eines Pingers 215,00 EUR betragen.	Kosten K_M der Metallbauteile in EUR für die Produktion von jeweils einem Bauteil B_1, B_2 und B_3: $K_M = (5 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix} = (28 \quad 38 \quad 59)$ Kosten K_Z der Zwischenprodukte in EUR für die Produktion von jeweils einem Bauteil B_1, B_2 und B_3 $K_Z = (2 \quad 4 \quad 4 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (16 \quad 32 \quad 42)$ Gesamtkosten der Metallbauteile und Zwischenprodukte für die Produktion eines Pingers: $(K_M + K_Z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ((28 \quad 38 \quad 59) + (16 \quad 32 \quad 42)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (215)$ Die Gesamtkosten für die Produktion eines Pingers betragen 215,00 EUR.	4
			30

Aufgabe 1 mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	bestimmt die Nullstellen, berechnet: $\int_0^1 f(x)dx$ und beurteilt ohne Rechnung, ob $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ ist.	Notw. Bedingung: $f(x) = 0$ $-2x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x^2 + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-2x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$ $\int_0^1 (-2x^3 + 2x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^1$ $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ Die Funktion f ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Von -1 bis 0 verläuft die Funktion unterhalb der Abszissenachse und das Integral hat einen negativen Wert. Von 0 bis 1 verläuft die Funktion über der Abszissenachse und das Integral hat einen positiven Wert. Diese beiden orientierten Flächeninhalte sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung gleich groß und heben sich auf.	5
1b	ordnet begründet den richtigen Graphen zu, gibt die Funktionsgleichung von g an und leitet die 1. Ableitung her.	f_2 ist von den drei zur Auswahl stehenden Graphen von natürlichen Exponentialfunktionen der richtige Graph. Die Punktprobe zeigt, dass die Punkte P_1 und P_3 nicht auf dem Graphen der gegebenen Funktion f liegen, aber der Punkt P_2. Es gilt: $f_2(2) = 0{,}5 \cdot e^{2\cdot 2-4} = 0{,}5$ $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-4}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ Zwischenschritte sind erforderlich: $k'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot e^x + \frac{1}{2}\cdot x \cdot e^x}_{\text{Produktregel}}$ $= \frac{1}{2}e^x \cdot (1 + x)$	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1c	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3 und beurteilt die Aussage.	 Die Stammfunktion F ist eine Funktion 5. Grades, daher hat die Stammfunktion mindestens eine Nullstelle. Aufgrund der drei Extremstellen des Graphen der Funktion f besitzt die Stammfunktion genau drei Wendepunkte. Die Aussage ist also richtig.	5
1d	gibt μ sowie $P(X=\mu)$ an, zeichnet $P(X \geq 3)$ in das Säulendiagramm ein und berechnet die Standardabweichung.	Der Erwartungswert beträgt $\mu = 2$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X=\mu)$ beträgt 34,56 %.  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{100}} = 3$ Die Standardabweichung beträgt $\sigma = 3$.	5
1e	vergleicht die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse miteinander.	Fünf Seiten von sechs möglichen Seiten zeigen maximal ein Pik an. Vier Seiten von sechs möglichen Seiten zeigen ein Herz an. Somit ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von Ereignis A geringer als die von Ereignis B. $P(A) = \frac{5}{6} > P(B) = \frac{2}{3}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

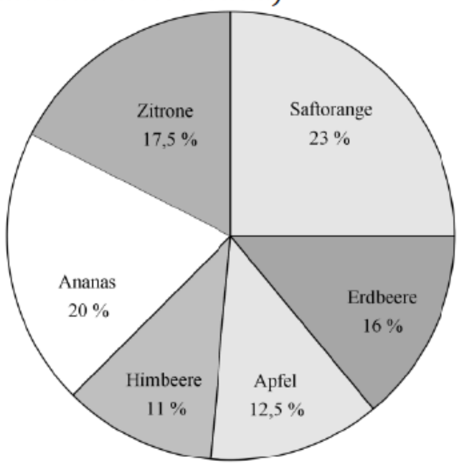
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1e	ergänzt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.		
	ermittelt die Wahrscheinlichkeit.	$P(\text{kein Pik}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Pik zu sehen ist, beträgt $\frac{1}{9}$.	
1f	gibt das arithmetische Mittel an,	$\bar{x} = 7$	5
	erstellt eine sortierte Urliste und	Sortierte Urliste:	
	prüft, ob dem Boxplot die Urliste zugrunde liegen könnte.	Es existieren $n = 8$ Ausprägungen des Merkmals x. Minimum: 3 Maximum: 10 Median: $x_{Med} = \frac{x_4+x_5}{2} = 7{,}5$ Erstes Quartil (Median der ersten Hälfte): $Q_1 = \frac{x_2+x_3}{2} = 6$ Drittes Quartil (Median der zweiten Hälfte): $Q_3 = \frac{x_6+x_7}{2} = 8$ Dem Boxplot kann folglich die Urliste zugrunde liegen. (! Quartile können unterschiedlich berechnet werden.)	
			30

Sortierte Urliste (zu 1f):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	6	6	7	8	8	8	10

Aufgabe 2: Gummibärchen

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>ergänzt die fehlenden Werte.</td><td>H: Himbeere; Z: Zitrone; Ap: Apfel; E: Erdbeere; So: Saftorange; An: Ananas
<table>
<tr><th>x_i</th><th>H</th><th>Z</th><th>Ap</th><th>E</th><th>So</th><th>An</th><th>Σ</th></tr>
<tr><td>$H(x_i)$</td><td>18</td><td>18</td><td>30</td><td>21</td><td>36</td><td>27</td><td>150</td></tr>
<tr><td>$h(x_i)$</td><td>12</td><td>12</td><td>20</td><td>14</td><td>24</td><td>18</td><td>100</td></tr>
</table></td><td>3</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>vervollständigt das Kreisdiagramm (Abbildung 2.1) und

ergänzt die fehlenden relativen Häufigkeiten.</td><td>$100\,\% - 23\,\% - 16\,\% - 11\,\% - 12{,}5\,\% = 37{,}5\,\%$
$200 \cdot 37{,}5\,\% = 75$
Folglich gibt es 75 Zitronen (Z) und Ananasgummibärchen (An).
Es gilt also: $Z + An = 75$ und $Z + 5 = An$.
$\Rightarrow Z = 35 \wedge An = 40$
(Rechenwege sind nicht erforderlich.)

</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2c

zu</td><td>erläutert aus mathematischer Sicht, warum eine Tüte Gummibärchen nicht ausreicht,

bestimmt die Standardabweichung der Datenreihe der Gummibärchen mit Zitronengeschmack,</td><td>Die relative Häufigkeit für das Ziehen eines Gummibärchens mit Zitronengeschmack ist abhängig von der Versuchsanzahl n. Mit steigender, hinreichend großer Versuchsanzahl n, pendelt die relative Häufigkeit der Stichprobe beim Wert der relativen Häufigkeit der Grundgesamtheit ein (empirisches Gesetz der großen Zahlen).

Im Mittel befinden sich $\bar{x} = \frac{17+27+29+22+25+26+30+20+21+23}{10} = 24$ Zitronengummibärchen in einer Tüte.
$\sigma^2 = \frac{(17-24)^2 + (27-24)^2 + \cdots + (23-24)^2}{10} = 15{,}4$
$\sigma \approx 3{,}92$
Die Standardabweichung der Gummibärchen mit Zitronengeschmack in den 10 Tüten beträgt ca. 4.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>2c</td><td>gibt den Modalwert an und

erläutert dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.</td><td>Der Modalwert stellt den häufigsten Wert unter den Gummibärchen in Stück dar und ist somit ablesbar:
$x_{Mod} = 152$
Am häufigsten sind unter den 10 Gummibärchentüten Tüten mit 152 Gummibärchen vorzufinden.</td><td></td></tr>
<tr><td>2d</td><td>erstellt eine vollständige Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten und

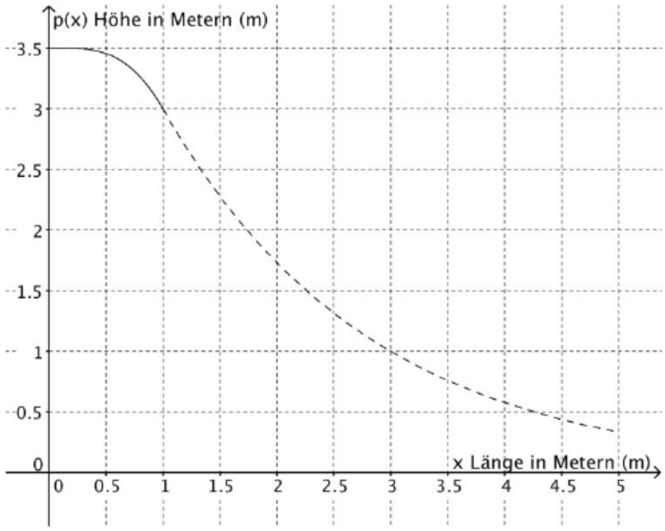
prüft, ob die Vorliebe für Zironengummibärchen vom Geschlecht der Schülerinnen und Schüler abhängig ist.</td><td>
<table>
<tr><th>absolute Häufigkeit H</th><th>bevorzugt Zitronengummibärchen (Z)</th><th>bevorzugt keine Zitronengummibärchen ($\bar{Z}$)</th><th>Summe</th></tr>
<tr><td>Schüler ($\bar{S}$)</td><td>10</td><td>8</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Schülerin (S)</td><td>**6**</td><td>4</td><td>**10**</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>**16**</td><td>12</td><td>**28**</td></tr>
</table>
Anhand der Vierfeldertafel ist ersichtlich, dass:
$h_{\bar{S}}(Z) = \frac{10}{18} \approx 56\,\%$,
$h_S(Z) = \frac{6}{10} = 60\,\%$
und somit $h_{\bar{S}}(Z) \neq h_S(Z)$ gilt.
Folglich ist die Vorliebe für Zitronengummibärchen in der Klasse vom Geschlecht der Schülerinnen und Schüler abhängig.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2e</td><td>Erläutert, unter welchen Bedingungen die Anzahl an Zitronengummibärchen als binomialverteilt betrachtet werden können.</td><td>Die Verteilung der Zufallsvariablen X: „Anzahl der Zitronengummibärchen“ kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn
• nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind (Erfolg: Zitronengummibärchen und Misserfolg: kein Zitronengummibärchen).
• die Auswahl der Gummibärchen unabhängig voneinander passiert, d. h. sie müssen vereinzelt zufällig aus einer sehr großen Grundgesamtheit ausgewählt werden und nicht beispielsweise als Gruppe zusammenkleben.
• die Zufallsvariable X diskret verteilt ist.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2f</td><td>beweist oder widerlegt die Behauptung des Mitarbeiters.</td><td>Die Zufallsvariable X: „Anzahl der Zitronengummibärchen“ mit $X \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ 300\}$ ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 300$ und die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{1}{6}$.
$P(X > 100) = \sum_{i=101}^{300} \binom{300}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{300-i} \approx 0\,\%.$
Da $\binom{300}{i} > 0$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{i} > 0$ und $\left(\frac{5}{6}\right)^{300-i} > 0$ gilt, muss die Wahrscheinlichkeit für $P(X > 100)$ folglich größer null sein.
Es handelt sich nur um einen sehr kleinen Wert, der näherungsweise null beträgt.
Die Behauptung ist somit falsch, die Wahrscheinlichkeit ist zwar sehr gering und beträgt nicht genau, sondern nur näherungsweise null. Mehr als 100 Gummibärchen könnten vorkommen.</td><td>4</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
2g	prüft den Wahrheitsgehalt der Behauptung.	Die Zufallsvariable X: „Anzahl der Zitronengummibärchen“ ist binomialverteilt mit einer Kettenlänge von $n = 300$. Die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass maximal 54 Zitronengummibärchen in einem Auswurf vorhanden sind, beträgt: $P(X \leq 54) \approx 75{,}99\ \%$. Die Aussage ist wahr, da $75{,}99\ \% < 80\ \%$ ist.	4
			30

Aufgabe 3: Spielplatz

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>ergänzt die in der Tabelle fehlenden Werte.</td><td><table><tr><th>Fläche des Spielplatzes in m^2</th><th>Umfang der Fäche des Spielplatzes in m</th><th>Materialkosten für den Zaun in EUR</th></tr><tr><td>2 500</td><td>200</td><td>5 000,00</td></tr><tr><td>2 256,25</td><td>190</td><td>4 750,00</td></tr><tr><td>3 025</td><td>220</td><td>5 500,00</td></tr></table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>berechnet die Abmessungen des Spielplatzes und

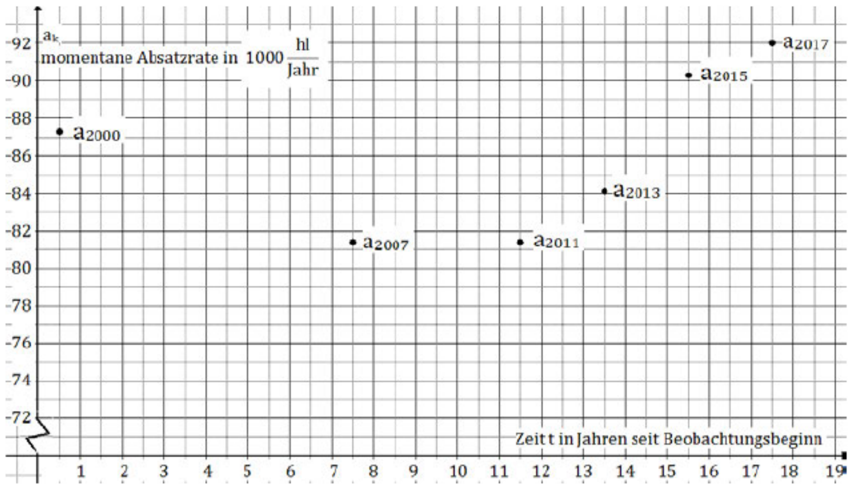
prüft, ob die Mindestfläche und die Kostenvorgabe eingehalten werden können.</td><td>Notwendige Bedingung: $f'(a) = 0$
$f'(a) = -2 \cdot a + 120$
$0 = -2 \cdot a + 120$
$\Leftrightarrow a_e = 60$
Bei f handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel, somit ist a_e Stelle eines Hochpunkts.
$b = 120 - a_e = 60$
Somit sind die Seiten a und b des Spielplatzes 60 m lang.
$f(60) = 3\,600$
Die Mindestfläche von 2 500 m^2 wird eingehalten.
Die Kosten für einen 200 m langen Zaun betragen 5 000,00 EUR und die Kostenvorgabe wird somit eingehalten.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>prüft, ob die Hecke als Abgrenzung des Bereiches für die älteren Kinder verwendet werden kann.</td><td>Die Fläche, die vom Graphen der Funktion h im Intervall $I = [0; 50]$ und der Abszissenachse eingeschlossen wird, kann mithilfe des folgenden Integrals berechnet werden:
$\int_0^{50} h(x)dx \approx 1\,629{,}32$
Damit ergibt sich für die Fläche des Bereiches der älteren Kinder:
$\frac{2}{3} \cdot 2\,500\ m^2 \approx 1\,629{,}32\ m^2$
Somit werden die Vorgaben des Grünflächenamtes eingehalten.</td><td>4</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3d	zeichnet den zweiten Teil des Verlaufs der Rutsche und		6
	zeigt, dass die Teilabschnitte der Funktion p bei $x = 1$ sprung- und knickfrei ineinander übergehen.	Es gilt: $p_1(1) = 3$ und $p_2(1) = 3$ Somit gehen die beiden Teilabschnitte von p an der Stelle $x = 1$ sprungfrei ineinander über. $p'_1(x) = -1{,}95x^2 + 0{,}3x \Longrightarrow p'_1(1) = -1{,}65$ $p'_2(x) = -1{,}65 \cdot e^{-0{,}55(x-1)} \Longrightarrow p'_2(1) = -1{,}65$ Somit gilt $p'_1(1) = p'_2(1)$ und es folgt, dass die beiden Teilabschnitte von p an der Stelle $x = 1$ knickfrei ineinander übergehen.	
3e	untersucht, ob im gesamten Rutschenverlauf p die Sicherheitsbestimmungen eingehalten werden.	Untersuchung des durchschnittlichen Gefälles: Für die durchschnittliche Steigung gilt: $m \approx \frac{0{,}33-3{,}5}{5-0} \approx -0{,}63$ Somit liegt das durchschnittliche Gefälle bei ca. 63 %, damit wird der geforderte Höchstwert von 85 % nicht überschritten. Untersuchung des größten Winkels: An der Stelle $x = 1$ geht der Graph der Funktion von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Damit liegt der steilste Punkt der Rutsche an der Stelle $x = 1$. Die Steigung an dieser Stelle beträgt $p'(1) \approx -1{,}65$. Wird dieser Wert in den Steigungswinkel umgerechnet, so ergibt sich $\arctan(-1{,}65) \approx -58{,}78°$. Auch dieser Wert entspricht den Vorgaben, denn an keiner Stelle ist die Rutsche steiler als 60°.	5
3f	berechnet die Uhrzeit, bei der der Besucherstrom am größten ist.	$b'(t) = 0{,}01e^{0{,}1\cdot t} \cdot (t^2 - 8t)^2 + 0{,}1e^{0{,}1\cdot t} \cdot (4t^3 - 48t^2 + 128t)$ Notwendige Bedingung: $b'(t) = 0$ $\Longrightarrow\ t_{e1} \approx -36{,}4 \quad t_{e2} = 0 \quad t_{e3} \approx 4{,}4 \quad t_{e4} = 8$ t_{e1} liegt nicht im Definitionsbereich. Hinreichende Bedingung: $b'(t_e) = 0$ und $b''(t_e) < 0$ $b''(t_{e2}) = 12{,}8$ und $b''(t_{e4}) \approx 28{,}49$ t_{e2} und t_{e4} gehören somit zu den Tiefpunkten (morgens bzw. abends, wenn der Spielplatz nicht so stark frequentiert wird). $b''(t_{e3}) \approx -10{,}03$ Somit ist t_{e3} Stelle eines Hochpunktes. Der Besucherstrom ist um ca. 14:24 Uhr am größten.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3g	interpretiert den Ausdruck $\int_0^8 b(t)dt \approx 164{,}8$ im Sachzusammenhang.	Am Eröffnungstag haben ca. 165 Besucher in der Zeit von 10:00 bis 18:00 Uhr den Spielplatz betreten.	3
			30

Aufgabe 3: Gestaltung

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>ergänzt die fehlenden Werte in Tabelle 3.1,

vervollständigt die Abbildung 3.1 um die fehlenden Punkte aus der Tabelle 3.1,</td><td>
<table>
<tr><td>Jahr k</td><td>2000</td><td>2007</td><td>2011</td><td>2013</td><td>2015</td><td>2017</td></tr>
<tr><td>Absatzrate a_k in der Jahresmitte des Jahres k in 1 000 Hektolitern pro Jahr</td><td>$\approx \mathbf{87,3}$</td><td>81,4</td><td>≈81,4</td><td>≈84,1</td><td>≈90,3</td><td>≈92,0</td></tr>
</table>


</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>begründet, inwieweit aufgrund der gesamten Datenlage zur Modellierung der Entwicklung der Absatzraten der letzten 18 Jahre eine aus drei unterschiedlichen Funktionstypen abschnittsweise definierte Funktion geeignet sein könnte.</td><td>Der Verlauf der Absatzraten kann aufgrund des beschriebenen Verlaufs bis zum Jahr 2007 annähernd durch einen exponentiellen Zerfall beschrieben werden. Bis 2011 bleibt die Absatzrate annähernd konstant, so dass eine lineare Funktion (ohne Steigung) geeignet erscheint, ab dem Jahr 2011 wächst die Absatzrate zunächst schnell und dann langsamer an. Hier könnte ein weiterer Funktionstyp z. B. eine ganzrationale Funktion verwendet werden. Es handelt sich also um drei sehr unterschiedliche Verläufe, die durch drei verschiedene Funktionstypen beschrieben werden können, nämlich zunächst mittels einer Exponentialfunktion, dann mittels einer linearen Funktion und im letzten Abschnitt mittels einer ganzrationalen 3. Grades.</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>prüft die Schlussfolgerung.</td><td>Die durchschnittliche Absatzrate beträgt:
$\frac{92-81,4}{6} \approx 1,77$
Der mittlere jährliche Zuwachs beträgt ca. 1 770 $\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$.</td><td>3</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3c	leitet eine Stammfunktion G der Funktion g unter Angabe der Zwischenschritte her und	$g(t) = -\frac{1}{6}\cdot t^3 + \frac{115}{16}\cdot t^2 - \frac{24\,011}{240}\cdot t + \frac{34\,231}{64}$ $G(t) = -\frac{1}{6\cdot 4}\cdot t^{3+1} + \frac{115}{16\cdot 3}\cdot t^{2+1} - \frac{24\,011}{240\cdot 2}\cdot t^{1+1} + \frac{34\,231}{64}t^{0+1}$ $= -\frac{1}{24}\cdot t^4 + \frac{115}{48}\cdot t^3 - \frac{24\,011}{480}\cdot t^2 + \frac{34\,231}{64}\cdot t$	4
	berechnet näherungsweise die Gesamtgetränkeabsatzmenge in Litern (l) für die Jahre 2011 bis einschließlich 2017.	$100\,000\cdot\int_{11}^{18} g(t)dt = \frac{584\,689}{960} \approx 61\,000\,000$ Die Gesamtgetränkeabsatzmenge beträgt für diesen Zeitraum ca. 61 Millionen Liter.	
3d	vergleicht die beiden Verläufe anhand von zwei Aspekten und berücksichtigt dabei auch die Gesamtgetränkeabsatzmengen der beiden Brauereien über den betrachteten Zeitraum.	Die momentane Absatzrate der Weldebräu ist im Jahr 2011 angestiegen und bei der Hansebräu zunächst gefallen. Zu Beginn des Jahres 2016 erreicht die momentane Absatzrate der Weldebräu ihr Minimum, bei der Hansebräu zu Beginn des Jahres 2017 ein Maximum. Das bedeutet für die Gesamtabsatzmenge, dass hier Wendepunkte liegen. Der Gesamtabsatz der Hansebräu steigt dann immer langsamer an, der der Weldebräu immer schneller. Für den betrachteten Zeitraum scheint aber die Gesamtabsatzmenge identisch zu sein, da die von beiden Graphen eingeschlossenen Flächen ungefähr gleich groß zu sein scheinen.	4
3e	beurteilt unter Berücksichtigung der Wanddicke von 2 mm, ob die neue Flasche die Anforderungen erfüllt und	Es ist zu beurteilen, ob der maximale Außendurchmesser $D \leq 61$ mm ist. Aufgrund der Abbildung 3.1 kann man erkennen, dass der maximale Außendurchmesser im unteren Bereich der Flasche liegt. $D = 2\cdot 27{,}2 + 2\cdot 2 = 58{,}4$ [mm] Der maximale Außendurchmesser beträgt 58,4 mm und erfüllt damit die Anforderungen. Es ist zu beurteilen, ob für den minimaler Innendurchmesser d gilt, dass : $10 \text{ mm} \leq d \leq 20 \text{ mm}$ Der minimale Innendurchmesser d liegt im mittleren Bereich der Flasche. Es ist also das Minimum des zweiten Funktionsabschnittes zu bestimmen: Notwendige Bedingung: $f_2{}'(x) = 0$ für $x \in [10; 23]$ $f_2'(x) = -\frac{8}{65}\pi\cdot\sin\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right) - 0{,}14$ $\Rightarrow x_{e1} \approx 13{,}63\,;\ x_{e2} \approx 16{,}12\,;\ x_{e3} \approx 20{,}13\,;\ x_{e4} \approx 22{,}62$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3e	gibt den tatsächlichen Außendurchmesser und den minimalen Innendurchmesser an.	Aufgrund der Abbildung 3.1 ergibt sich, dass das absolute Minimum des Innendurchmessers bei einer (Innen-)Höhe von ca. 20,13 cm erreicht wird. Für d gilt daher: $d = 2 \cdot f_2(x_{e3}) \approx 1{,}06[\text{cm}]$ Daher beträgt der minimale Innendurchmesser ca. 10,6 mm und erfüllt damit die Anforderungen knapp. Der maximale Außendurchmesser beträgt 58,4 mm und der minimale Innendurchmesser ca. 10,6 mm.	
3f	untersucht den Graphen an der Stelle $x = 10$ auf Knickfreiheit (Sprungfreiheit wird vorausgesetzt).	$f_2'(x) = -\frac{8}{65}\pi \cdot \sin\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right) - 0{,}14$ Es ist zu prüfen, ob $f_2'(10) = 0$ gilt, da die Steigung des ersten Abschnittes Null beträgt. $f_2'(10) = -0{,}14 \neq 0$ $\Rightarrow$Der Übergang an der Stelle $x = 10$ ist nicht knickfrei.	3
3g	berechnet alle Wendestellen für $10 \leq x \leq 23$ und gibt die zugehörigen Innenradien an.	$f_2''(x) = -\frac{32}{845}\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right)$ Notwendige Bedingung für die Wendestellen: $f_2''(x) = 0$ $-\frac{32}{845}\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right) = 0$ (auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung kann bei Bezug auf die Abbildung 3.1 verzichtet werden) $\Rightarrow x_{w1} = 11{,}625$; $x_{w2} \approx 14{,}875$; $x_{w3} \approx 18{,}125$; $x_{w4} \approx 21{,}375$. Die Innenradien betragen ca. 2,09 cm, ca. 1,64 cm, ca. 1,18 cm und ca. 0,73 cm.	4
			30