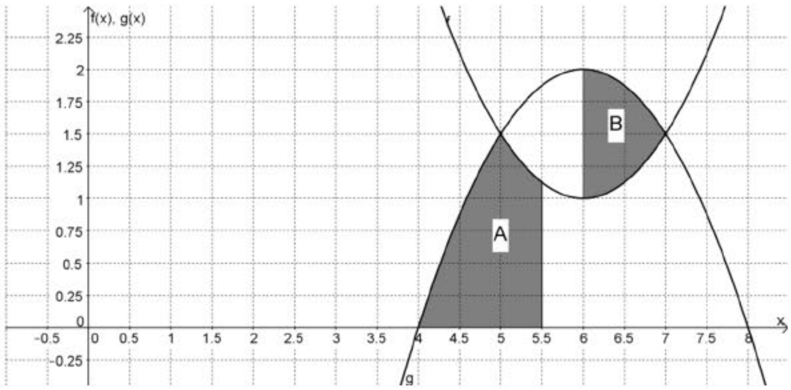
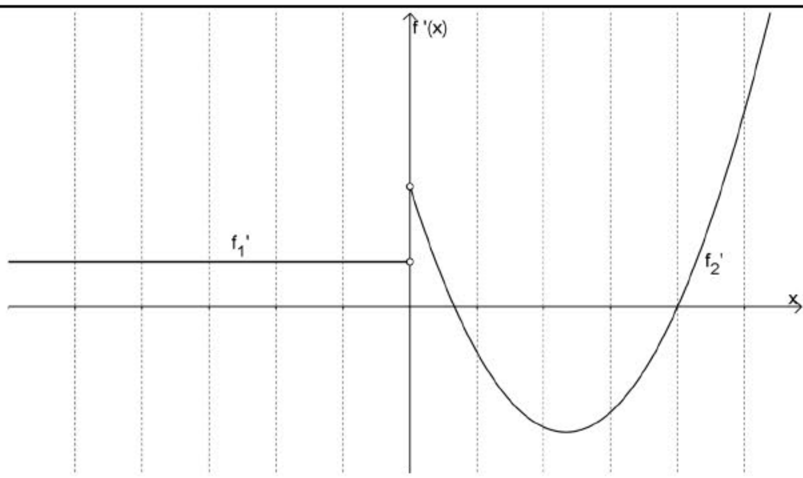
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	gibt die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann, markiert in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral $\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\,dx$ bestimmt werden kann, und ermittelt näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.	$A = \int_4^5 g(x)\ dx + \int_5^{5{,}5} f(x)\ dx$  Ein Kästchen hat einen Wert von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Flächeneinheiten. Das Produkt aus ca. 5,5 ausgezählten Kästchen und $\frac{1}{8}$ beträgt ca. $\frac{11}{16}$ Flächeneinheiten (exaktes Ergebnis: $\frac{2}{3}$ FE).	5
1b	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f und	 *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td>erläutert, welche Besonderheiten beim Ableiten an der Stelle $x = 0$ zu berücksichtigen sind.</td><td>Da der Graph der Funktion f an der Stelle $x = 0$ einen Knick aufweist, hat der Graph an dieser Stelle linksseitig angenähert eine andere Steigung als rechtsseitig angenähert. Eine Steigung an dieser Stelle ist somit nicht definiert (der Graph ist dort nicht differenzierbar).</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>berechnet das Integral $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ und

entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi}$$
$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$
$$= 1 - (-1) = 2$$

<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f besitzt keine Berührpunkte mit der Abszissenachse.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Für den Fall, dass $|a| = |d|$ gilt, hat der Graph von f Berührpunkte mit der Abszissenachse. Dies liegt daran, dass die Verschiebung des Graphen von f in Ordinatenrichtung um d Einheiten dann genau der Amplitude a entspricht, was dazu führt, dass der Graph von f oberhalb bzw. unterhalb der Abszissenachse liegt und mit seinen Hoch- bzw. Tiefpunkten die Abszissenachse berührt.</td></tr>
<tr><td>Wenn $c = d = 0$ ist, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Da $\sin(0) = 0$ ist, gilt auch $f(0) = a \cdot \sin(b \cdot 0) = 0$.</td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>berechnet die Stellen der Graphen von f_a mit waagrechten Tangenten und</td><td>

Notwendige Bedingung:
$f_a'(x) = 0$
$0 = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$
Nach dem Satz vom Nullprodukt und da $e^{-a \cdot x} \neq 0$ ist, sind die Nullstellen des ersten Faktors gesucht:
$2ax - a^2x^2 = 0$
$x \cdot (2a - a^2x) = 0$
Da $a > 0$ ist, existiert x_2 für alle a, daher gilt:
Waagrechte Tangenten liegen in den Punkten mit den Abszissenwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$.

Fortsetzung nächste Seite

</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1d	leitet die Gleichung der 2. Ableitung f_a'' her und vereinfacht den Funktionsterm soweit wie möglich.	Es gilt: $f_a'(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$ Mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel ergibt sich: $f_a''(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot (-a) \cdot e^{-a \cdot x} + (2a - 2a^2x) \cdot e^{-a \cdot x}$ $= (-2a^2x + a^3x^2 + 2a - 2a^2x) \cdot e^{-a \cdot x}$ $= (a^3x^2 - 4a^2x + 2a) \cdot e^{-a \cdot x}$	
1e	bestimmt eine Gleichung der Geraden g_{AB}, gibt eine Gleichung der Ebene E_3 an und bestimmt eine Gleichung der Ebene E_{-3}, die durch diese beiden Geraden aufgespannt wird.	Als Ortsvektor der Geraden g_{AB} kann der Ortsvektor des Punktes $A(1\|4\|-3)$ gewählt werden. Als Richtungsvektor der Geraden g_{AB} kann der Verbindungsvektor zwischen den Punkten $A(1\|4\|-3)$ und $B(-5\|8\|-9)$ berechnet werden. Somit ergibt sich für die Gerade g_{AB}: $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $E_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Als Stützvektor der Ebene kann ein Stützvektor einer der Geraden gewählt werden, bspw.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ Ein Richtungsvektor der Ebene ist ein Richtungsvektor einer der Geraden, bspw.: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Der zweite Richtungsvektor ergibt sich aus dem Verbindungsvektor der beiden Ortsvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ Somit ergibt sich als Ebenengleichung: $E_{-3}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$	5
1f	erläutert die Bedeutung der Lösbarkeit, zeigt, dass die Gleichung für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Lösung hat und	Die drei Vektoren sind linear abhängig (komplanar). (Sie liegen somit in einer Ebene.) Aus der Gleichung ergibt sich durch Einsetzen folgendes Gleichungssystem: I $\quad -2s + t = 2$ II $\quad 8s - 4t = 0$ III $\quad -4s + 2t = 1$ Das Lösen des Gleichungssystems führt zu einem Widerspruch, der Vektor $\vec{c}$ lässt sich nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen. *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1f</td><td>erläutert die Bedeutung der Unlösbarkeit.</td><td>Dies heißt aber noch nicht, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind. Tatsächlich sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, somit sind auch in diesem Fall die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar.</td><td></td></tr>
<tr><td>1g</td><td>entscheidet, welche Lagebeziehung das jeweils angegebene Geradenpaar hat.</td><td>
<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).
<table>
<tr><th>$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$</th><th>sind identisch</th><th>sind parallel</th><th>sind windschief</th><th>Schnittpunkt</th></tr>
<tr><td>g_2 und g_3</td><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>g_3 und g_4</td><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g_1 und g_2</td><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>g_1 und g_3</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g_4 und g_5</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>gibt die Koordinaten der Punkte F und H an und

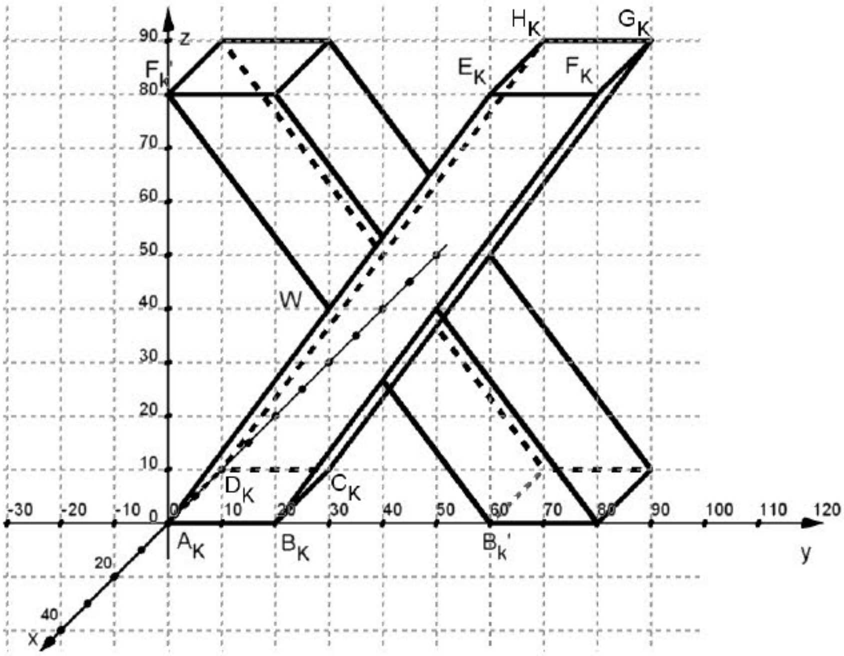
berechnet die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.</td><td>$F(-2|7|5)$
$H(-6|2|2)$

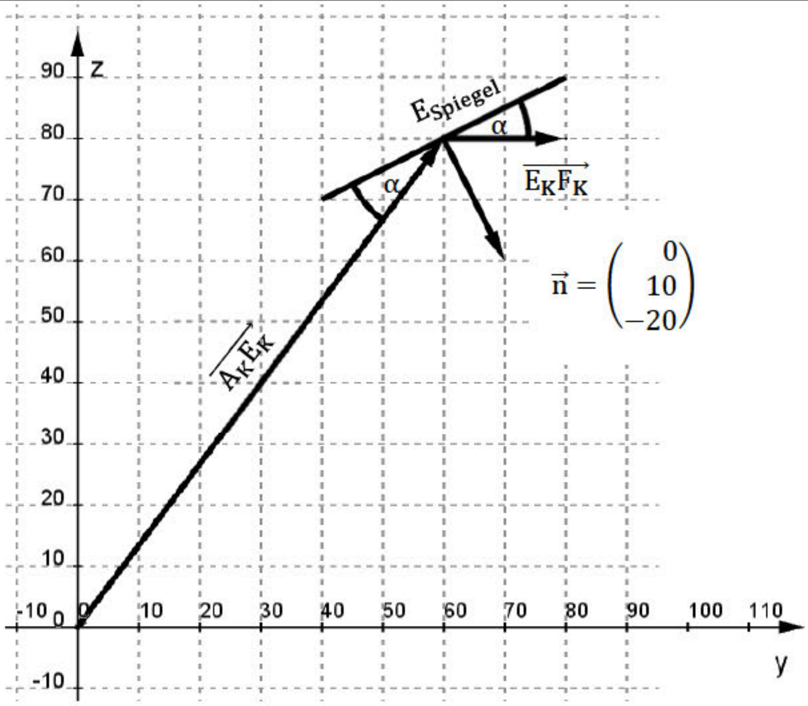
Allgemeine Form E: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$
Die gesuchte Ebene E ist parallel zur y-Achse, somit gilt $b = 0$.
Durch Einsetzen der Punkte A und C ergibt sich das folgende LGS:
I $\quad a + c = d$
II $\quad -3a - 2c = d$
Als Lösung ergibt sich $a = -3d$ und $c = 4d$.
Für $d = 1$ ergibt sich die Ebenengleichung $E: -3x + 4z = 1$</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Fehmarnbelt

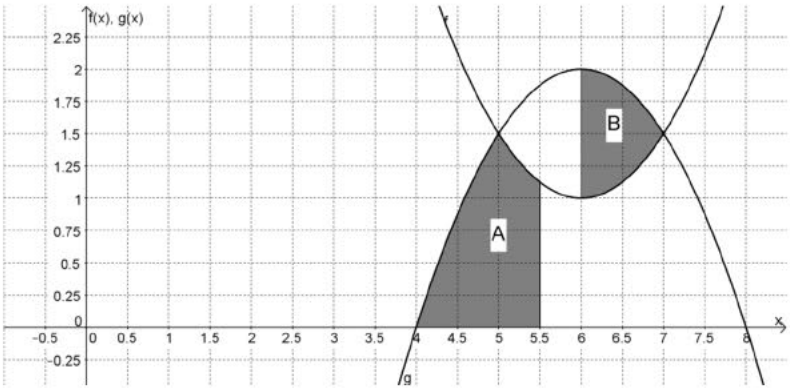
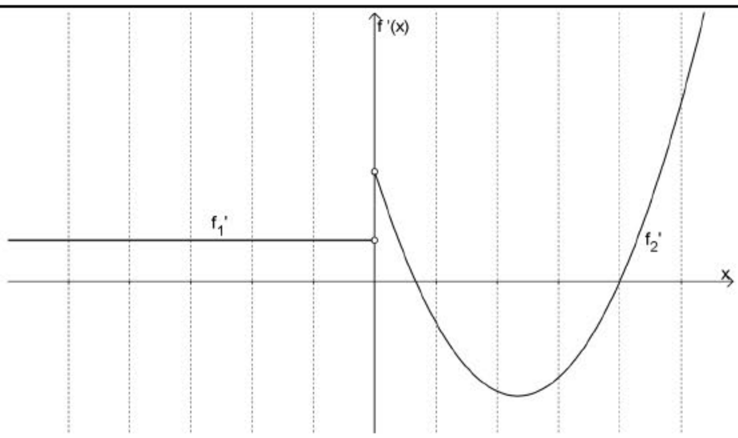
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	begründet ohne Rechnung, dass die Ebene E_2 parallel zur x-y-Ebene liegt, und	Alle Punkte der Ebene E_2 haben als z-Koordinate den Wert drei. Alle Punkte der x-y-Ebene haben als z-Koordinate den Wert null. Die beiden Ebenen haben dementsprechend keine gemeinsamen Punkte, folglich müssen sie parallel verlaufen.	4
	gibt die Stärke d der Haltefüllung an.	Die Stärke beträgt drei Meter.	
2b	zeigt, dass die rechte Seitenkante k durch einen Teil der Geraden g_1 modelliert werden kann und	Eine Gerade wird durch zwei Punkte eindeutig definiert. Auf der Geraden g_1 liegen die Punkte $P_1(0\|5\|0)$ und $P_2(0\|13\|8{,}9)$. Das Einsetzen der Punkte in die Geradengleichung ergibt jeweils eine wahre Aussage (exemplarisch mit P_1 durchgeführt): $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow s = 0$ Beide Punkte liegen auf der Geraden g_1, somit kann die rechte Seitenkante k durch einen Teil der Geraden g_1 modelliert werden.	7
	prüft rechnerisch, ob die Vorgaben zur Mindestbreite und zum Mindestabstand eingehalten werden.	Zur Ermittlung der y-Koordinate der rechten Seite in einer Höhe von zwei Metern wird die Gleichung $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\2\end{pmatrix}$ aufgelöst und es ergeben sich die Werte $x = 0$ und $y \approx 6{,}8$. Somit ergibt sich in einer Höhe von zwei Metern eine Breite von näherungsweise 6,8 m. Die Mindestbreite wird also eingehalten. Für den Verbindungsvektor eines Punktes P der Geraden g_1 zum Punkt R gilt: $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix}.$ Im Falle des kürzesten Abstandes ist der Vektor $\overrightarrow{PR}$ orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g_1: $\left(\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow s = \frac{3\,120}{14\,321}$ *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2b		Die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PR}$ mit $s = \frac{3\,120}{14\,321}$ beträgt $\left\|\overrightarrow{PR}\right\| \approx 9{,}07$ Der kürzeste Abstand beträgt näherungsweise 9,07 m, der Mindestabstand von neun Metern wird eingehalten. Der Ingenieur hat mit seiner Behauptung nicht Recht.	
2c	ermittelt eine Gleichung der Ebene in Parameterform, in der die linke Seitenfläche des trapezförmigen Grabens liegt.	In der Ebene E_{links} liegen unter anderem die Punkte $P_1(0\|-47{,}2\|0)$, $P_2(-1\|-47{,}2\|0)$ und $P_3(0\|-55{,}2\|8{,}9)$. Daraus ergibt sich die Parametergleichung $E_{links}\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -47{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8{,}9 \end{pmatrix}$	3
2d	leitet die Werte der Parameter a bis e her und gibt näherungsweise das Volumen mit Einheit an.	Es gilt: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b$ entspricht dem Volumen des Kegels in m^3, zusammengesetzt aus den beiden halben Kegeln am linken und rechten Rand des Sandhaufens. Der Radius des Kegels beträgt 15 m, dementsprechend muss $a = 15$ gelten. Die Höhe des Kegels beträgt 20 m, also gilt $b = 20$. Es gilt: $\frac{c \cdot d}{2} \cdot e$ entspricht dem Volumen des Prismas in m^3 in der Mitte des Sandhaufens. Die Grundfläche bildet ein Dreieck mit der Grundseite von 30 m und der Höhe von 20 m. Somit ergeben sich die Werte $c = 30$ und $d = 20$. Die Höhe/ Länge des Prismas beträgt 30 m, also $e = 30$. Das Volumen des Sandhaufens beträgt 13 712,4 m^3.	5
2e	prüft, ob die Vermutung des Ingenieurs richtig ist.	Zunächst wird der Punkt P gesucht, der die Strecke $\overline{B_S C_S}$ im Verhältnis 3:1 teilt. x-Koordinate: 15 y-Koordinate: $\frac{3}{4} \cdot 30 = 22{,}5$ z-Koordinate: 0 Der Punkt $P(15\|22{,}5\|0)$ teilt die Strecke $\overline{B_S C_S}$ im Verhältnis 3: 1. Eingesetzt in die Ebenengleichung E_t ergibt sich: $2 \cdot 22{,}5 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 90 - 3t \Leftrightarrow t = 15$ Nach 15 Stunden wird die Strecke $\overline{B_S C_S}$ im Verhältnis 3: 1 geteilt, die Vermutung des Ingenieurs ist also richtig.	5
2f	bestimmt den Winkel zwischen der Ebene E_{15} und der x-y-Ebene und	Zur Berechnung des Winkels zwischen den Ebenen wird der Winkel zwischen den Normalenvektoren bestimmt. *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2f	begründet innermathematisch, warum sich dieser Winkel für keine der Ebenen von E_t ändert.	$\cos(\alpha) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\rvert \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$ Der Winkel beträgt 53,1°. Der Winkel zwischen Ebenen wird über den Winkel der Normalenvektoren bestimmt. Der Normalenvektor der Ebene E_t lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Da in dem Ausdruck kein t enthalten ist, ist der Normalenvektor für alle Ebenen der Ebenenschar E_t gleich, und somit auch der Winkel zwischen jeder der Ebenen der Ebenenschar E_t und der x-y-Ebene.	
2g	ergänzt die beiden Teilstücke des zweiten Balkens und berechnet den Winkel des Metallwinkels, der im Punkt W zur Stabilisierung angelegt werden muss.	 Der Winkel α im Punkt W entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{E_K A_K}$ und $\overrightarrow{B_K' F_K'}$. $\cos(\alpha) = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 80 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ -80 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 80 \end{pmatrix} \right\rvert} \right) \Rightarrow \alpha \approx 106°$ Der Winkel beträgt ca. 106°.	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2h	skizziert den Vektor $\vec{n}$, der den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{A_K E_K}$ und $\overrightarrow{E_K F_K}$ halbiert,		5
	gibt den Vektor $\vec{n}$ näherungsweise an und	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$	
	bestimmt näherungsweise eine Gleichung der Ebene $E_{Spiegel}$ so, dass der Vektor $\overrightarrow{A_K E_K}$ an der Ebene $E_{Spiegel}$ reflektiert wird und der Vektor $\overrightarrow{E_K F_K}$ entsteht.	Ein Normalenvektor der gesuchten Ebene entspricht dem Vektor $\vec{n}$. Als Ortsvektor der Ebene kann der Punkt E_K gewählt werden. Daraus ergibt sich die Ebenengleichung $E_{Spiegel}$ mit $E_{Spiegel}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} = 0.$	
			40

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	gibt die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann, markiert in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral $\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\,dx$ bestimmt werden kann, und ermittelt näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.	$A = \int_4^5 g(x)\,dx + \int_5^{5,5} f(x)\,dx$  Ein Kästchen hat einen Wert von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Flächeneinheiten. Das Produkt aus ca. 5,5 ausgezählten Kästchen und $\frac{1}{8}$ beträgt ca. $\frac{11}{16}$ FE Flächeneinheiten (exaktes Ergebnis: $\frac{2}{3}$ FE).	5
1b	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f und	 *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td>erläutert, welche Besonderheiten beim Ableiten an der Stelle x = 0 zu berücksichtigen sind.</td><td>Da der Graph der Funktion f an der Stelle $x = 0$ einen Knick aufweist, hat der Graph an dieser Stelle linksseitig angenähert eine andere Steigung als rechtsseitig angenähert. Eine Steigung an dieser Stelle ist somit nicht definiert (der Graph ist dort nicht differenzierbar).</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>berechnet das Integral $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ und

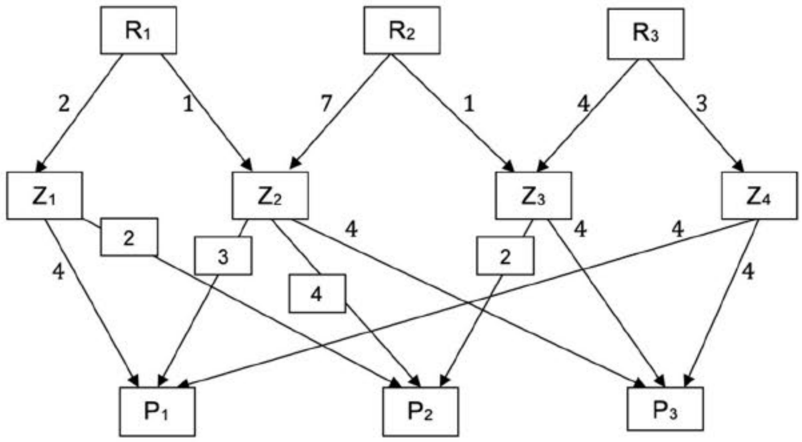
entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi}$$
$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$
$$= 1 - (-1) = 2$$
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f besitzt keine Berührpunkte mit der Abszissenachse.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Für den Fall, dass $|a| = |d|$ gilt, hat der Graph von f Berührpunkte mit der Abszissenachse. Dies liegt daran, dass die Verschiebung des Graphen von f in Ordinatenrichtung um d Einheiten dann genau der Amplitude a entspricht, was dazu führt, dass der Graph von f oberhalb bzw. unterhalb der Abszissenachse liegt und mit seinen Hoch- bzw. Tiefpunkten die Abszissenachse berührt.</td></tr>
<tr><td>Wenn $c = d = 0$ ist, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Da $\sin(0) = 0$ ist, gilt auch $f(0) = a \cdot \sin(b \cdot 0) = 0$.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>berechnet die Stellen der Graphen von f_a mit waagrechten Tangenten und</td><td>Notwendige Bedingung:
$f_a'(x) = 0$
$0 = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$
Nach dem Satz vom Nullprodukt und da $e^{-a \cdot x} \neq 0$ ist, sind die Nullstellen des ersten Faktors gesucht:
$2ax - a^2x^2 = 0$
$x \cdot (2a - a^2x) = 0$
Da $a > 0$ ist, existiert x_2 für alle a, daher gilt:
Waagrechte Tangenten liegen in den Punkten mit den Abszissenwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1d	leitet die Gleichung der 2. Ableitung f_a'' her und vereinfacht den Funktionsterm soweit wie möglich.	Es gilt: $f_a'(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$ Mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel ergibt sich: $f_a''(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot (-a) \cdot e^{-a \cdot x} + (2a - 2a^2x) \cdot e^{-a \cdot x}$ $= (-2a^2x + a^3x^2 + 2a - 2a^2x) \cdot e^{-a \cdot x}$ $= (a^3x^2 - 4a^2x + 2a) \cdot e^{-a \cdot x}$	
1e	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). (w / f) Die Matrix M mit $M = (A \cdot B)^2$ ist eine stochastische Matrix. — w: X Wenn A und B stochastische Matrizen sind, folgt daraus $A \cdot B = B \cdot A$. — f: X Die Matrix Q mit $Q = C^T \cdot A$ ist eine Matrix vom Typ (2x3). — f: X Der Vektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ ist ein Fixvektor der Übergangsmatrix B. — w: X Da $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ die Inverse von C. — f: X	5
1f	berechnet, für welche Werte des Parameters k die Matrizengleichung eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat.	Die Matrizengleichung lässt sich folgendermaßen umformen: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -2k & -3 \\ 0 & 2 & 6k^2 - 4k & -12 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right)$ $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -2k & -3 \\ 0 & 2 & 6k^2 - 4k & -12 \\ 0 & 0 & -30k^2 + 20k & 68 \end{array}\right)$ Die Matrizengleichung ist unlösbar, wenn in der dritten Zeile der oberen Dreiecksmatrix eine falsche Aussage steht, z.B. $0 \cdot x_3 = 68$: $-30k^2 + 20k = 0$ $\Leftrightarrow -10k(3k - 2) = 0$ $\Leftrightarrow k_1 = 0; k_2 = \frac{2}{3}$ Nimmt k die Werte $k_1 = 0; k_2 = \frac{2}{3}$ an, so entsteht die falsche Aussage $0 = 68$ in der dritten Zeile der oberen Dreiecksmatrix, somit hat die Matrixgleichung in diesen Fällen keine Lösung. Der Fall, dass die Matrizengleichung unendlich viele Lösungen hat, kann nicht eintreten, da es nicht möglich ist eine Nullzeile zu erzeugen. Für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{0 ; \frac{2}{3}\right\}$ gilt: $-30k^2 + 20k \neq 0$. In diesen Fällen gibt es für die Matrizengleichung eine eindeutige Lösung, weil x_3 in der dritten Zeile direkt berechnet werden kann und somit sukzessiv auch x_1 und x_2.	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1g	berechnet die inverse Matrix M^{-1} der Matrix M und begründet, warum für $a = -1{,}5$ keine inverse Matrix M^{-1} existiert.	Es gilt: $\left(\begin{array}{cc\|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & a & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & \frac{-2a}{2a+3} & \frac{6}{2a+3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} \end{array}\right)$ Somit gilt: $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{2a+3} & \frac{6}{2a+3} \\ \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} \end{pmatrix}$ Für $a = -1{,}5$ ergibt sich in allen Nennern in der Inversen von M der Wert null, somit existiert für diesen Fall keine Inverse zu M.	5
1h	erstellt eine 4x4-Matrix A und löst die Matrizengleichung nach X auf.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 16 \end{pmatrix}$ $2 \cdot P \cdot X - (X^T \cdot M)^T + 2 \cdot X = X - N$ $\Leftrightarrow \quad 2 \cdot P \cdot X - M^T \cdot X + X = -N$ $\Leftrightarrow \quad (2 \cdot P - M^T + E) \cdot X = -N$ $\Leftrightarrow \quad X = (2 \cdot P + M + E)^{-1} \cdot (-N)$	5
			40

Aufgabe 2: Parfumherstellung

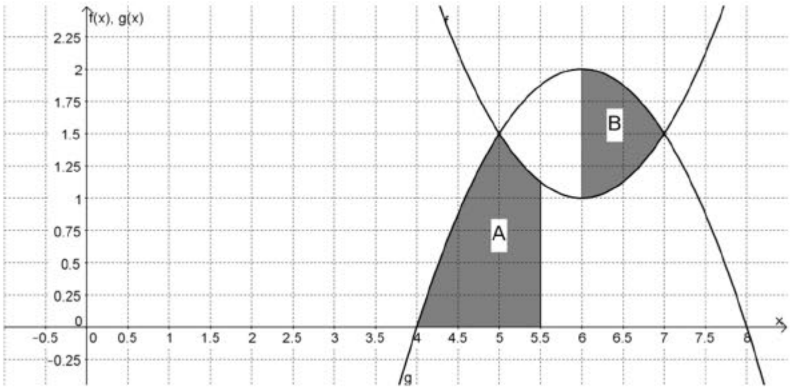
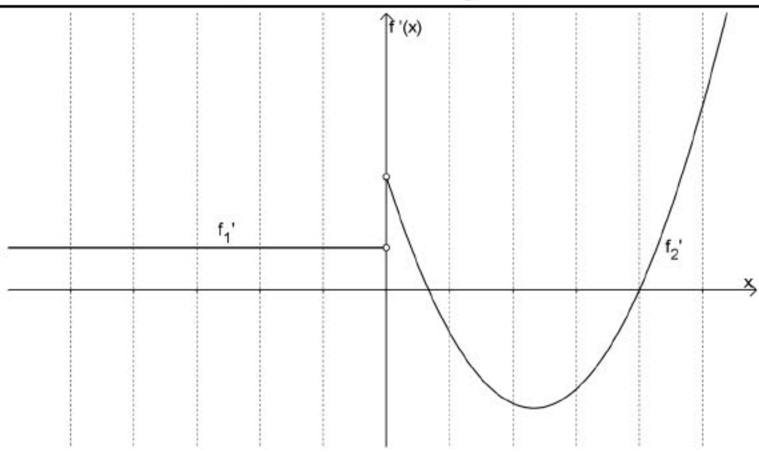
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	begründet anhand der zweiten Spalte und mittleren Zeile der Matrix A, dass die Matrix A den gleichen Materialfluss wie das Verflechtungsdiagramm darstellt, und ergänzt die fehlenden Angaben in den Kästchen im Verflechtungsdiagramm mithilfe der Matrix B.	In der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ist in jeder Spalte ablesbar, wie viele ME der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 in jeweils eine ME der einzelnen Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 einfließen. Bei Riechstoff Z_2 ist dies in der zweiten Spalte ablesbar: Es fließen 1 ME R_1 und 7 ME R_2 und keine ME R_3 in die Produktion von einer ME Z_2. Im Verflechtungsdiagramm (Abb. 2.1) lässt sich erkennen, dass ein Pfeil mit 1 ME von R_1 zu Z_2, ein Pfeil mit 7 ME von R_2 zu Z_2 und kein Pfeil von R_3 zu Z_2 verläuft. Somit ist die zweite Spalte von A korrekt. In den Zeilen der Matrix A ist ablesbar, wie viele ME der jeweiligen Rohstoffe bei der Produktion der einzelnen Riechstoffe benötigt werden. Aus der zweiten Zeile von A wird deutlich, dass 7 ME R_2 in Z_2 sowie 1 ME R_2 in Z_3 einfließen und Z_1 sowie Z_4 keinen Rohstoff R_2 beinhalten. Im Verflechtungsdiagramm lässt sich erkennen, dass ein Pfeil mit 7 ME von R_2 zu Z_2 und ein Pfeil mit 1 ME von R_2 zu Z_3 verläuft und keine Pfeile von R_2 zu Z_1 und Z_4 verlaufen. Somit ist die mittlere Zeile von A korrekt.  Abbildung 2.1	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2b	leitet das Element c_{32} der Rohstoff-Endprodukt-Matrix C her und	Es gilt: $A \cdot B = C$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 4 \\ 21 & 30 & 32 \\ 12 & 8 & 28 \end{pmatrix}$ $c_{32} = 8$ und kommt aufgrund der Definition der Matrizenmultiplikation folgendermaßen zustande: Jedes Element aus der dritten Zeile von A wird mit dem entsprechenden Element aus der zweiten Spalte von B multipliziert und es werden dann die einzelnen Produkte addiert. Das Ergebnis ergibt dann den Eintrag c_{32} in Matrix C. $0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$	5
	ermittelt die Menge der pflanzlichen Rohstoffe R_1, R_2 und R_3, die für den Auftrag benötigt werden.	Für den Auftragsvektor gilt: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix}$ $C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 513 \\ 1\,747 \\ 944 \end{pmatrix}$ Somit werden 513 ME von R_1, 1 747 ME von R_2 und 944 ME von R_3 für den Auftrag benötigt.	
2c	bestimmt den Verkaufspreis für das Parfum „Lovely Spring" so, dass die Parfum-Manufaktur mindestens einen Gewinn in Höhe von 500,00 EUR erwirtschaftet.	Für die Berechnung der Herstellkosten der Riechstoffe gilt: $(3 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \cdot B \cdot \vec{p} = (34 \quad 20 \quad 36) \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} = 1\,874$ Für die Berechnung der Herstellkosten der Parfums gilt: $(6 \quad 10 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} = 497$ Die gesamten Kosten für den Auftrag betragen demnach 1 874,00 EUR + 497,00 EUR + 200,00 EUR = 2 571,00 EUR. Der Erlös bestimmt sich folgendermaßen: $(44 \quad z \quad 47) \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} = 24z + 1\,811$ Damit der Gewinn mindestens 500,00 EUR beträgt, muss gelten: $24z + 1\,811 - 2\,571 \geq 500$ $\Leftrightarrow z \geq 52{,}5$ Der Preis für einen Flakon von Parfum „Lovely Spring" sollte mindestens 52,50 EUR betragen.	5
2d	zeigt, dass mithilfe des Ausdrucks die Anzahl der Flakons der verschiedenen Parfumsorten berechnet werden kann, und	Folgende Matrizengleichung muss gelöst werden, um die Anzahl der Flakons zu bestimmen, die produziert werden können bei gleichzeitiger Auflösung des Bestandes der vom Haltbarkeitsproblem betroffenen Rohstoffe: Seien x_1, x_2, x_3 die Anzahl der Flakons von P_1, P_2, P_3. $C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 170 \\ 136 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2d	berechnet diese Anzahl.	Somit ergibt sich: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 170 \\ 136 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Es können 2 ME von „Happy Summer", 0 ME von „Lovely Spring" und 4 ME von „Spicy Ginger" produziert werden, sodass alle vom Haltbarkeitsproblem betroffenen Rohstoffe restlos aufgebraucht werden.	
2e	entscheidet begründet, welcher der beiden Mitarbeiter Recht hat.	Aus dem Text und der Tabelle ergibt sich folgende Matrizengleichung, die zu lösen ist: $\begin{pmatrix} 2c & 3 & a \\ 0 & a & b \\ b+c & 1 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I.} & 10a + 20c = 40 \\ \text{II.} & 10a + 10b = 60 \\ \text{III.} & 10b + 10c + 10d = 60 \end{array}$ $\Leftrightarrow\ L_t = \{(a,b,c,d)\} = \left\{\left(\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}t + \frac{14}{3}, -\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}, t\right) \middle\vert\, t \in \mathrm{IN}\right\}$ Da $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t \leq 4$ gilt (ansonsten ergeben sich negative Werte für c), ergeben sich nur zwei mögliche Lösungen des LGS: $L = \{(2{,}4{,}1{,}1); (4{,}2{,}0{,}4)\}$ Diese beiden Lösungen für die Rezeptur könnten ausprobiert werden und danach könnte die bessere von beiden ins Angebot aufgenommen werden. Somit hat der zweite Mitarbeiter mit seiner Behauptung Recht.	5
2f	berechnet anhand der Tabelle 2.3, wie viele Kunden zu Beginn des Jahres 2019 und ein Jahr später die Parfumsorte „Happy Summer" gekauft haben,	Um die Anzahl der Kunden zu ermitteln, die zu Beginn des Jahres 2019 die Parfumsorte „Happy Summer" gekauft hat, müssen die Einträge in der ersten Spalte addiert werden. Somit ergibt sich: $66\,000 + 18\,000 + 36\,000 = 120\,000$ Zu Beginn des Jahres 2019 haben 120 000 Kunden die Parfumsorte „Happy Summer" gekauft. Um die Anzahl der Kunden zu ermitteln, die ein Jahr später die Parfumsorte „Happy Summer" gekauft haben, müssen die Einträge in der ersten Zeile addiert werden. Somit ergibt sich: $66\,000 + 18\,000 + 22\,500 = 106\,500$ Ein Jahr später haben 106 500 Kunden die Sorte „Happy Summer" gekauft.	5
	bestimmt das Elements m_{31} der Übergangsmatrix M und	Es gilt: $m_{31} = \frac{36\,000}{120\,000} = 0{,}3$	
	erläutert die Bedeutung des Elements m_{31} im Sachzusammenhang.	30 % der Käufer der Parfumsorte „Happy Summer" wechseln innerhalb eines Jahres zur Parfumsorte „Spicy Ginger".	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2g	beurteilt die Behauptung des Mitarbeiters.	Von Jahr zu Jahr betrachtet hat der Mitarbeiter Recht, da in jeder Spalte die Einträge $m_{11} = 0{,}55$, $m_{22} = 0{,}65$ und $m_{33} = 0{,}70$ den größten Wert annehmen und größer als 0,5 sind. Langfristig betrachtet ergibt sich die Grenzmatrix: $M^{50} \approx \lim\limits_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 0{,}275 & 0{,}275 & 0{,}275 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}425 & 0{,}425 & 0{,}425 \end{pmatrix}$ In der Grenzmatrix lässt sich erkennen, dass langfristig die meisten Kunden zum Parfum „Spicy Ginger" greifen und diese Aussage somit auch wahr ist.	5
2h	bestimmt die nichtstochastische Matrix D,	$D = 1{,}05 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}65 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5775 & 0{,}21 & 0{,}1575 \\ 0{,}1575 & 0{,}6825 & 0{,}1575 \\ 0{,}315 & 0{,}1575 & 0{,}735 \end{pmatrix}$	5
	erläutert, warum die Matrix D nicht stochastisch sein kann, und	Bei einer stochastischen Matrix muss die Summe der Einträge in jeder Spalte den Wert 1 ergeben sowie für alle Elemente $d_{ij} \geq 0$ gelten. In diesem Fall wurde die stochastische Matrix M mit dem Skalar 1,05 multipliziert. Somit ergibt die Summe der Einträge in allen drei Spalten von D den Wert 1,05.	
	berechnet, wie viele Kunden jeweils die Parfumsorten „Happy Summer" (P_1), „Lovely Spring" (P_2) und „Spicy Ginger" (P_3) ein Jahr nach Durchführung der Werbemaßnahme bevorzugen würden.	Folgende Gleichung muss gelöst werden: $D^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114\,843 \\ 123\,721 \\ 178\,181 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = D^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 114\,843 \\ 123\,721 \\ 178\,181 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 106\,629 \\ 108\,674 \\ 162\,697 \end{pmatrix}$ Ein Jahr nach Start der Werbemaßnahme würden 106 629 Kunden „Happy Summer", 108 674 Kunden „Lovely Spring" und 162 697 Kunden „Spicy Ginger" kaufen.	

Aufgabe 1 mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	gibt die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann, markiert in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral $\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\, dx$ bestimmt werden kann, und ermittelt näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.	$A = \int_4^5 g(x)\ dx + \int_5^{5,5} f(x)\ dx$  Ein Kästchen hat einen Wert von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Flächeneinheiten. Das Produkt aus ca. 5,5 ausgezählten Kästchen und $\frac{1}{8}$ beträgt ca. $\frac{11}{16}$ Flächeneinheiten (exaktes Ergebnis: $\frac{2}{3}$ FE).	5
1b	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f und	 *Fortsetzung nächste Seite*	5

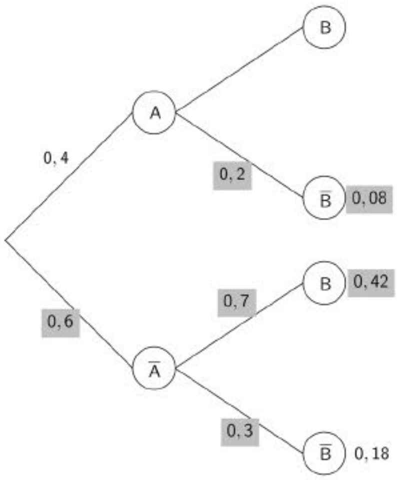
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td>erläutert, welche Besonderheiten beim Ableiten an der Stelle $x = 0$ zu berücksichtigen sind.</td><td>Da der Graph der Funktion f an der Stelle $x = 0$ einen Knick aufweist, hat der Graph an dieser Stelle linksseitig angenähert eine andere Steigung als rechtsseitig angenähert. Eine Steigung an dieser Stelle ist somit nicht definiert (der Graph ist dort nicht differenzierbar).</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>berechnet das Integral $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ und

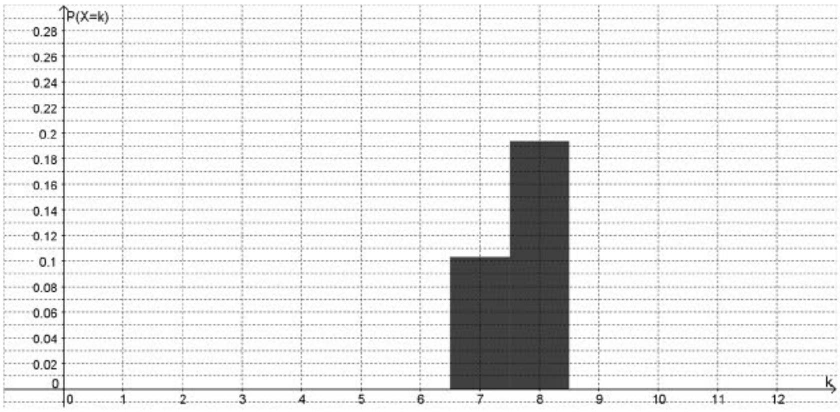
entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi$$
$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$
$$= 1 - (-1) = 2$$

<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f besitzt keine Berührpunkte mit der Abszissenachse.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Für den Fall, dass $|a| = |d|$ gilt, hat der Graph von f Berührpunkte mit der Abszissenachse. Dies liegt daran, dass die Verschiebung des Graphen von f in Ordinatenrichtung um d Einheiten dann genau der Amplitude a entspricht, was dazu führt, dass der Graph von f oberhalb bzw. unterhalb der Abszissenachse liegt und mit seinen Hoch- bzw. Tiefpunkten die Abszissenachse berührt.</td></tr>
<tr><td>Wenn $c = d = 0$ ist, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Da $\sin(0) = 0$ ist, gilt auch $f(0) = a \cdot \sin(b \cdot 0) = 0$.</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>berechnet die Stellen der Graphen von f_a mit waagrechten Tangenten und</td><td>Notwendige Bedingung:
$f_a'(x) = 0$
$0 = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$
Nach dem Satz vom Nullprodukt und da $e^{-a \cdot x} \neq 0$ ist, sind die Nullstellen des ersten Faktors gesucht:
$2ax - a^2x^2 = 0$
$x \cdot (2a - a^2x) = 0$
Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:
$x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$
Da $a > 0$ ist, existiert x_2 für alle a .Daher gilt:
Waagrechte Tangenten liegen in den Punkten mit den Abszissenwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$.

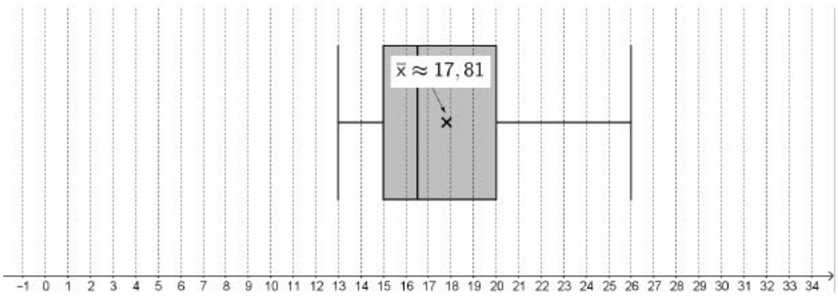
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1d	leitet die Gleichung der 2. Ableitung f_a'' her und vereinfacht den Funktionsterm soweit wie möglich.	Es gilt: $f_a'(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$ Mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel ergibt sich: $f_a''(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot (-a) \cdot e^{-a \cdot x} + (2a - 2a^2x) \cdot e^{-a \cdot x}$ $= (-2a^2x + a^3x^2 + 2a - 2a^2x) \cdot e^{-a \cdot x}$ $= (a^3x^2 - 4a^2x + 2a) \cdot e^{-a \cdot x}$	
1e	ergänzt die in den Kästchen fehlenden Wahrscheinlichkeiten und		5
	erläutert, welche Schlussfolgerung aufgrund der Ungleichung getroffen werden kann.	Das Eintreten des Gegenereignisses von A wird vom vorherigen Eintritt des Ereignisses von B beeinflusst. Die Ereignisse A und B sind somit voneinander stochastisch abhängig.	
1f	begründet, dass $x_{10} = 5$ gelten muss und	x_1, x_2 und x_3 weichen um $3 + 3 + 1 = 7$ nach oben vom arithmetische Mittel $\overline{x} = 5$ ab und x_4, x_5 und x_6 weichen um $3 + 2 + 2 = 7$ nach unten vom arithmetische Mittel $\overline{x} = 5$ ab. Die Abweichungen nach oben und unten gleichen sich aus. Da x_7, x_8 und x_9 nicht vom arithmetischen Mittel abweichen, muss $x_{10} = 5$ gelten und somit ebenfalls dem arithmetischen Mittel entsprechen.	5
	erläutert, wie die empirische Varianz der zweiten Datenreihe direkt aus der empirischen Varianz der ersten Datenreihe hergeleitet werden kann,	Durch die Erhöhung aller Werte um drei erhöht sich das arithmetische Mittel zwar auf $\overline{x} = 8$, aber die Differenzen der einzelnen Werte zum arithmetischen Mittel bleiben gleich. Folglich gilt für die zweite Datenreihe die gleiche empirische Standardabweichung wie für die erste Datenreihe.	
	und gibt deren Wert an.	Die empirische Varianz der zweiten Datenreihe beträgt somit $s^2 = 2^2$ $= 4$	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1g	zeichnet einen Ausschnitt der Verteilung ein und		5
	berechnet die Wahrscheinlichkeit.	$\mu = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{12 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ $P(9 - 1{,}5 < X < 9 + 1{,}5) = P(7{,}5 < X < 10{,}5)$ $\approx 0{,}1936 + 0{,}2581 + 0{,}2323$ $\approx 0{,}684$	
1h	begründet, warum $P(Z > 6) = P(Z \geq 6)$ gilt, und	$P(Z > 6) = P(Z \geq 6)$ gilt, weil die Normalverteilung eine stetige Verteilung ist.	5
	entscheidet begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.	(siehe Tabelle unten)	
			40

Aussage	Entscheidung und Begründung
$\varphi''(3) = 0$	Die Aussage ist richtig, da der Wendepunkt der Dichtefunktion φ an der Stelle $X_W = \mu - \sigma = 5 - 2 = 3$ liegt.
$P(Z \leq 3) < 0{,}5$	Die Aussage ist richtig. Die Fläche, die die Dichtefunktion mit der Abszissenachse einschließt, beträgt 1 (100 %).

Aufgabe 2: Bienensterben

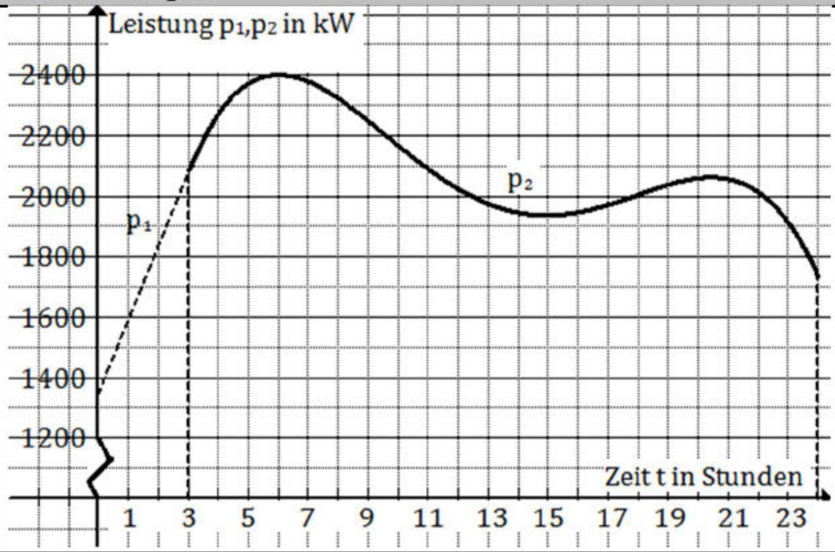
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	zeichnet die im zweiten Boxplot fehlenden Antennen ein,	 Lösungshilfe (exakte Kennzahlen): 2016/17: $x_{min} = 16;\ x_{max} = 33;$ $Q_1 = 18;\ Q_3 = 25$ 2017/18: $x_{min} = 13;\ x_{max} = 26$ $Q_1 = 15;\ Q_3 = 20$	6
	vergleicht exemplarisch eine statistische Kennzahl im Sachzusammenhang miteinander und	Die maximale Verlustquote ist von 33 % auf 26 % gesunken. Im Winter 2016/17 gab es wenigstens ein Bundesland mit einer besonders hohen Verlustquote und im Winter 2017/18 nur wenigstens eines mit einer Verlustquote von 26 %. (Dies weist auf ein besonders schädigendes Ereignis in Winter 2016/17 hin, welches wenigstens ein Bundesland betroffen hat.) Des Weiteren könnten alternativ auch das arithmetische Mittel, die Spannweite, Interquartilsabstände sowie die oberen und die unteren Quartile beider Jahre miteinander verglichen werden.	
	erläutert, warum das arithmetische Mittel im Winter 2017/2018 von der Verlustquote in Deutschland abweicht.	Diese, wenn auch geringe, Abweichung liegt darin begründet, dass in den einzelnen, berechneten Verlustquoten (Tab. 2.1) lediglich ein Verhältnis von Verlustvölkern zu eingewinterten Bienenvölkern je Bundesland dargestellt wird. Informationen über die jeweiligen Anzahlen sind in Quoten nicht enthalten. Somit ist das arithmetische Mittel der einzelnen Verlustquoten, in welches die Verlustquoten aller Bundesländer gleichgewichtet einfließen, nicht identisch mit der Verlustquote im gesamten Bundesgebiet, die das Verhältnis der Summe aller Anzahlen von Verlustvölkern zu allen eingewinterten Bienenvölkern berücksichtigt, sodass Bundesländer mit vielen eingewinterten Völkern entsprechend berücksichtigt werden.	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2b	erläutert, unter welchen Annahmen die Anzahl der Bienenvölker, die den Winter nicht überleben, als binomialverteilte Zufallsvariable mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 15\,\%$ betrachtet werden kann.	• Für die Bienenvölker gilt, dass sie entweder überleben oder nicht überleben, also gibt es nur zwei mögliche Ausgänge. • Die Sterbe-/Überlebenswahrscheinlichkeit ändert sich über den Winter nicht. Die Bienenvölker sterben unabhängig voneinander, auch wenn sie von dem selben Imker eingewintert werden. • Es handelt sich um eine diskrete Zufallsvariable. Die Anzahl der Verlustvölker ist ganzzahlig. • Die Völker des Imkers müssen für den Landkreis repräsentativ sein, damit die dortige Verlustwahrscheinlichkeit für die Bienenvölker des Imkers angenommen werden kann.	4
2c	ergänzt den Ausdruck in der Klammer, gibt das Ergebnis näherungsweise an und interpretiert dieses im Sachzusammenhang.	(Die Zufallsvariable X mit $X \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 500\}$ ist die „Anzahl der Bienenvölker, die den Winter nicht überleben". X ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 500$ und die Eintrittswahrscheinlichkeit beträgt $p = 0{,}15$.) $P(\mathbf{X} = \mathbf{80}) = \binom{500}{80} \cdot 0{,}15^{80} \cdot 0{,}85^{420} \approx \mathbf{0{,}0401}$ Das Näherungsergebnis besagt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau 80 Bienenvölker nicht überleben (sterben) bei ca. 4 % liegt.	4
2d	berechnet die Wahrscheinlichkeiten und vergleicht die beiden Werte im Sachzusammenhang miteinander.	Die Wahrscheinlichkeit, dass ... • mehr als 70 Bienenvölker sterben, beträgt $P(X \geq 71) = P(X > 70) \approx 71{,}00\,\%$. • mindestens 40, aber weniger als 430 Bienenvölker den Winter überstehen, beträgt $P(40 \leq \overline{X} < 430) = P(40 \leq \overline{X} \leq 429)$ $= P(\overline{X} \leq 429) - P(\overline{X} \leq 39) \approx 71{,}00\,\%$. Beide Wahrscheinlichkeiten sind ungefähr gleich groß, • da die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 70 Bienenvölker sterben gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit ist, dass weniger als 430 Bienenvölker den Winter überstehen und • da $P(X < 40) \approx 0\,\%$ gilt, kann dies zusätzlich vernachlässigt werden.	7
2e	ermittelt die Anzahl der Bienenvölker, die der Berufsimker mindestens einwintern muss.	Gesucht ist die Anzahl n der Bienenvölker, die der Berufsimker einwintern muss, damit mindestens 450 Bienenvölker überleben. Es wird also die binomialverteilte Zufallsvariable Y mit $Y \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ betrachtet. Sie gibt die Anzahl der eingewinterten Bienenvölker, die den Winter überleben an. Y ist binomialverteilt mit der unbekannten Kettenlänge n und der Eintrittswahrscheinlichkeit $p = 0{,}85$. $P(450 \leq Y \leq n) = 1 - F_{n;0{,}85}(449) \geq 0{,}98$ CAS: $n = 549$; $P(450 \leq Y \leq 549) \approx 0{,}9778$ $n = 550$; $P(450 \leq Y \leq 550) \approx 0{,}9823$ Er muss folglich mindestens 550 Bienenvölker einwintern.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2f	gibt die Nullhypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 aus Sicht des Mitbewerbers an.	Nullhypothese H_0: Die Sterberate bei den Bienenvölkern bleibt unverändert bei 30 % ($p = 0{,}3$). Gegenhypothese H_1: Die Sterberate bei den Bienenvölkern hat sich erhöht und ist deshalb höher als 30 % ($p > 0{,}3$).	2
2g	entscheidet begründet, welche Art von Signifikanztest vorliegt, und ermittelt die Irrtumswahrscheinlichkeit.	Es wird die binomialverteilte Zufallsvariable K: „Anzahl der befallenen Bienenvölker, die überleben“, $K \in \{0; 1; 2; 3; \ldots; 500\}$, $n = 500$ und $p = 0{,}7$ betrachtet. Da die Prognose für eine Abweichung nach oben vorliegt, wird ein rechtsseitiger Hypothesentest durchgeführt. (Die ursprüngliche Annahme spiegelt sich in der Nullhypothese H_0: $p = 0{,}7$ wider. Die Gegenhypothese H_1 ist somit $p > 0{,}7$. Außerdem ist aufgrund des gegebenen Annahmebereiches zu erkennen, dass sich der Ablehnungsbereich auf der rechten Seite befindet und es daher ein rechtsseitiger Test ist.) Für die Irrtumswahrscheinlichkeit gilt: $P(K \geq 368) \approx 4{,}26\ \%$.	4
2h	entscheidet begründet, welche Entscheidung der Imker treffen sollte, und erläutert, warum auf Grundlage der Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art nicht berechnet werden kann.	Da $500 - 134 = 366$ Bienenvölker überleben und dies im Annahmebereich liegt, wird die Nullhypothese, dass die Sterberate bei den Bienenvölkern unverändert bei 30 % liegt, weiterhin beibehalten. (Beim Fehler 2. Art wird die Wahrscheinlichkeit ermittelt, dass eine falsche Nullhypothese irrtümlich weiter beibehalten wird.) In diesem Fall wird also die Wirksamkeit des Mittels irrtümlich nicht erkannt. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit diesen Fehler zu begehen, ist die tatsächliche Eintrittswahrscheinlichkeit p_1 nötig, die zum Zeitpunkt des Tests aber noch unbekannt ist. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art kann somit erst zu einem späteren Zeitpunkt ermittelt werden. Die Kenntnis der tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeit würde einen Signifikanztest obsolet machen.	4
2i	ermittelt den langfristig zu erwartenden Erlös pro Glas.	Die Zufallsvariable Z: „Füllmenge pro Glas“ ist mit $\mu = 500$ und $\sigma = 5$ normalverteilt. 1. Wahl: $P(Z \geq 495) \approx 84{,}13\ \%$ 2. Wahl: $P(490 \leq Z < 495) \approx 13{,}59\ \%$ Hofverkauf: $P(485 \leq Z < 490) \approx 2{,}14\ \%$ Erlös pro Glas $= 5{,}00 \cdot P(Z \geq 495) + 4{,}00 \cdot P(490 \leq Z < 495) + 3{,}00 \cdot P(485 \leq Z < 490) \approx 4{,}81$ [Euro]. Der langfristig zu erwartende Erlös beträgt ca. 4,81 Euro.	5
			40

Aufgabe 3: Windkraftanlage

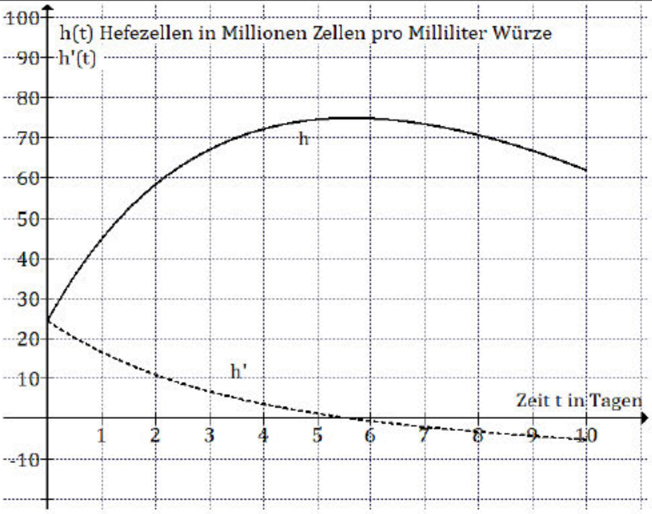
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	erläutert im Sachzusammenhang zwei Aspekte des in Abbildung 3.2 dargestellten Leistungsverlaufs p_2 und begründet, warum die Modellierung dieses Abschnittes durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades nicht möglich ist.	Die generierte Leistung steigt bis ca. 6:00 Uhr immer langsamer an, bis um 6:00 Uhr die maximale Leistung dieses Tages erreicht wird. In der Zeit von 6:00 Uhr bis 14:30 Uhr sinkt die generierte Leistung immer weiter auf ein Minimum von ca. 1 900 kW. Um ca. 10:00 Uhr sinkt die Leistung am stärksten. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt genau einen Wendepunkt. Im Verlauf des Graphen sind zwei Wendepunkte zu erkennen, so dass dieser Verlauf nur durch eine ganzrationale Funktion mindestens 4. Grades beschrieben werden kann.	6
3b	leitet die fehlende Gleichung des ersten Funktionsabschnittes p_1 her und	Gesucht ist eine lineare Funktion der Form $p_1(t) = m \cdot t + b$. Es gilt: $p_2'(t) = -\frac{49}{125} \cdot t^3 + \frac{81}{5} \cdot t^2 - 202 \cdot t + 715$ $p_1'(t) = m$ Ein sprung- und knickfreier Übergang bei $t = 3$ bedeutet, dass $p_1(3) = p_2(3)$ und $p_1'(3) = p_2'(3)$ gelten muss: Sprungfreiheit: $p_1(3) = p_2(3) \Rightarrow p_1(3) = \frac{1\,036\,931}{500} \approx 2\,074$ Knickfreiheit: $p_1'(3) = p_2'(3) \Rightarrow m = \frac{30\,527}{125} \approx 244$ Mit der Punktsteigungsform für lineare Funktionen ergibt sich: $p_1(t) = \frac{30\,527}{125} \cdot (t-3) + \frac{1\,036\,931}{500}$ $= \frac{30\,527}{125} \cdot t + \frac{670\,607}{500}$ $\approx 244 \cdot t + 1\,341$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3b	ergänzt den Graphen von p_1 in Abbildung 3.2.		
3c	begründet, warum Tims Ansatz ungeeignet ist, und ermittelt mit Susannes Ansatz näherungsweise die an diesem Tag insgesamt generierte elektrische Energie.	Das Produkt aus $p(t_1)$ und der Zeit t_1, also $p(t_1)\cdot t_1$, ergibt die über diesen Zeitraum generierte Energie nur dann, wenn die Leistung im Mittel oder konstant $p(t_1)$ betragen hätte. Das ist hier offensichtlich nicht der Fall, also ist dieser Ansatz ungeeignet. Die gesamte generierte Energie e in kWh an diesem Tag ergibt sich aus $e \approx 5\,123 + \int_3^{24} p_2(t)dt$ $\approx 49\,752$ Es werden an diesem Tag also ca. 49 752 kWh elektrische Energie generiert.	6
3d	zeigt, dass der gesuchte Höhenverlauf der Spitze A durch die Funktion h_A modelliert werden kann und	Zu bestätigen sind die Parameter der trigonometrischen Funktion h_A mit $h_A(t) = 58{,}5 \cdot \sin\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{48}\right)\right) + 141{,}5$: Laut Abbildung 3.4 beträgt der Rotorradius 58,50 m $\Rightarrow\ a = r = 58{,}5$ Die maximale Gesamthöhe beträgt 200 m, daher gilt für die Nabenhöhe n: $\Rightarrow n = 200 - r$ Die Nabenhöhe entspricht der vertikalen Verschiebung: $\Rightarrow d = n = 200 - 58{,}5 = 141{,}5$ Die Umlaufdauer beträgt 5 s bzw. $\frac{1}{12}$ Minuten. Da t in Minuten anzugeben ist, gilt: $T = p = \frac{1}{12} \Rightarrow b = \frac{2\cdot\pi}{p} = \frac{2\cdot\pi}{\frac{1}{12}} = 24\,\pi$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

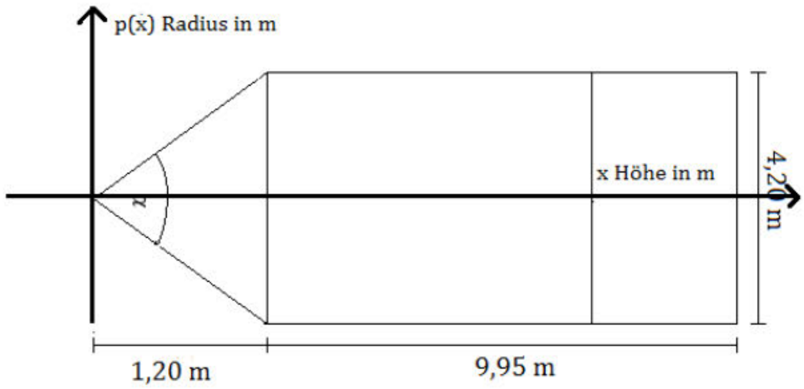
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3d	ergänzt die Nenndrehzahl (die Anzahl der Umdrehungen pro Minute).	Zu Beobachtungsbeginn zeigt die Spitze A nach oben ⇒Verschiebung des Graphen um eine Viertel Periode nach links $\Rightarrow c = +\frac{p}{4} = \frac{1}{48}$ Damit lässt sich der gesuchte Höhenverlauf mit h_A modellieren. **<u>Technische Daten WRS 24</u>** Rotorradius: 58,50 m Max. Gesamthöhe (incl. Rotorblätter): 200 m Bei 10 $\frac{m}{s}$ Windgeschwindigkeit beträgt (1) die Umlaufdauer T: 5 s (2) die Nenndrehzahl: $\boxed{\mathbf{12}}\ \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{min}}$	
3e	ermittelt die Wendestelle (in Sekunden) des Höhenverlaufs h_A für $0 \leq t \leq \frac{1}{20}$, bestimmt die zugehörige Steigung in $\frac{km}{h}$ und erläutert im Sachzusammenhang die Bedeutung dieser Stelle und der zugehörigen Steigung.	Die Wendestelle in diesem Intervall wird nach einer Viertel Periode und damit nach 1,25 s erreicht. $h_A'(t) = 1\,404 \cdot \pi \cdot \cos\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{48}\right)\right)$ $h_A'\left(\frac{1}{48}\right) = -1\,404 \cdot \pi\ \left[\frac{m}{min}\right]$ $\Rightarrow -1\,404 \cdot \pi \cdot \frac{60}{1\,000} \frac{km}{h} \approx -265\ \frac{km}{h}$ Die Wendestelle des Höhenverlaufs wird im betrachteten Intervall nach 1,25 Sekunden erreicht und die Steigung beträgt dort ca. $-265\,\frac{km}{h}$. Nach 1,25 Sekunden steht der Rotor mit der Spitze A waagrecht und erreicht dort seine höchste „Fall"-Geschwindigkeit von 265 $\frac{km}{h}$ bzw. verliert dort am schnellsten an Höhe (diese entspricht auch der Umlaufgeschwindigkeit der Rotorspitze).	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3f	prüft diese Vermutung, indem er beschreibt, durch welche Verschiebungen und Spiegelungen der Graph von g aus dem Graphen von h_A hervorgeht.	Das negative Vorzeichen von $a_g = -58{,}5$ bewirkt eine Spiegelung des Graphen von h_A an der zur Abszissenachse parallelen Achse $d = 141{,}5$ $\Rightarrow$ bei $t = 0$ liegt jetzt zunächst der Tiefpunkt. Der Parameter $c_g = \frac{1}{16}$ entsteht durch Addition des Parameters $c_h = \frac{1}{48}$ mit $\frac{2}{48}$. Diese Addition einer halben Periode bewirkt somit anschließend an die vorhergehende Spiegelung eine Verschiebung des entstandenen Graphen um eine halbe Periode nach links, somit liegt wieder der Hochpunkt bei $t = 0$. Somit ist diese Behauptung richtig.	4
3g	zeigt, dass die maximale Abweichung der Ordinatenwerte der beiden Funktionen bei $t = \frac{1}{48}$ liegt und	Für die Abweichung d gilt: $d(t) = h_A(t) - q(t)$ $\quad = 58{,}5 \cdot \sin\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{48}\right)\right) + 16\,848 \cdot \pi^2 \cdot t^2 - 58{,}5$ Wenn das Maximum dieser Funktion am Rand des Intervalls liegen soll, dann darf die Funktion in diesem Intervall kein relatives Maximum aufweisen. $d'(t) = 1\,404 \cdot \pi \cdot \cos\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{48}\right)\right) + 33\,696 \cdot \pi^2 \cdot t$ $d'(t) = 0$ $\Leftrightarrow t_e = 0$ Für $t_e = 0$ gilt: $d(0) = 0$ und $d''(0) > 0$ $\Rightarrow$ minimale Abweichung bei $t_e = 0$ Am rechten Rand des Intervalls beträgt die Abweichung d: $d\left(\frac{1}{48}\right) = h_A\left(\frac{1}{48}\right) - q\left(\frac{1}{48}\right)$ $\quad = 16\,848 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^2 - 58{,}5$ $\quad \approx 13{,}67$ Da die Abweichung am Rand des Intervalls positiv ist, liegt die maximale Abweichung also am rechten Rand des Intervalls bei $t = \frac{1}{48}$.	6
	bestimmt die rechte Intervallgrenze t_m des Intervalls $[0; t_m]$, in dem die Abweichung vom tatsächlichen Wert bei maximal 5 % liegt.	Damit die Abweichung vom tatsächlichen Funktionswert bei maximal 5 % liegt, muss folgendes gelten: $\frac{d(t)}{h_A(t)} \leq 0{,}05$ $\Rightarrow t_m \approx 0{,}01796$ $\Rightarrow$ die rechte Intervallgrenze t_m beträgt ca. 0,01796.	
			40

Aufgabe 3: Gärung

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	skizziert den Graphen der ersten Ableitung in das gegebene Koordinatensystem. (Abbildung 3.1),		7
	gibt die Einheit von $h'(t)$ an und	$h'(t)$wird in Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag angeben.	
	erläutert im Sachzusammenhang zwei Aspekte des Verlaufs des Graphen der 1. Ableitung h'.	Die Vermehrungsgeschwindigkeit der Hefezellen ist direkt nach Zugabe der Hefezellen positiv und am höchsten. Danach sinkt sie immer weiter, bis sie im Verlauf des sechsten Tages auf null absinkt und danach die Hefezellen immer schneller abgebaut werden.	
3b	beurteilt diese beiden Aussagen.	.... ob, der Hefebestand (1) in den ersten vier Tagen durchschnittlich um etwa 12 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag ansteigt Zu bestimmen ist die Sekantensteigung im Intervall [0;4]: $\frac{h(4)-h(0)}{4} \approx 11{,}895$ Die Aussage ist also korrekt. (2) mit höchstens 4 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag abnimmt Wie der Graphik entnommen werden kann, befindet sich der Zeitpunkt der stärksten Abnahme am rechten Rand des Definitionsbereichs. Es gilt: $h'(t) = 49 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t - 0{,}7} - 0{,}6 \cdot t$ $h'(10) \approx -5{,}265$ $\|-5{,}265\| > 4$ Die Aussage ist falsch, da die höchste Abnahme mehr als vier Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag beträgt.	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3c	begründet anhand der Graphik, warum die Gleichung nicht lösbar ist, und beweist diese Unlösbarkeit.	Der Graph ist laut Zeichnung im angegebenen Intervall ausschließlich rechtsgekrümmt und besitzt daher keinen Punkt ohne Krümmung, also gilt in diesem Intervall $h''(x) < 0$. Es gilt: $h''(t) = -17{,}15 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t - 0{,}7} - 0{,}6$ Zu beweisen ist, dass $h''(t) \neq 0$ für alle $t \in [0;\ 10]$: $-17{,}15 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t - 0{,}7} - 0{,}6 = 0$ $-17{,}15 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t - 0{,}7} = 0{,}6$ Da die linke Seite dieser Gleichung immer negativ ist, kann die Gleichung nicht erfüllt werden. q. e. d.	5
3d	bestimmt näherungsweise, wie viele Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes die Hefeernte beginnt.	Zeitpunkt des maximalen Hefebestandes: $h'(t) = 0 \Rightarrow t_e \approx 5{,}638$ Wie aus dem Graphen in Abbildung 3.1 zu erkennen ist, liegt an dieser Stelle ein Hochpunkt vor. Die Zeitpunkte, an denen der Hefebestand 70 Millionen Zellen pro Milliliter Würze erreicht, lauten: $h(t) = 70 \Rightarrow t_1 \approx 3{,}52$ und $t_2 \approx 8{,}17$ Aus der Graphik ist erkennbar, dass nur nach t_2 der Wert unterschritten wird. Die Anzahl der gesuchten Tage d beträgt also $d = t_2 - t_e \approx 2{,}53$ [Tage] 2,53 Tage entsprechen ca. 60,72 Stunden. Ca. $60\frac{3}{4}$ Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes wird der Zeitpunkt der Hefeernte erreicht.	6
3e	leitet die Gleichung der Vermehrungsgeschwindigkeit v_a her und weist nach, dass sich die Vermehrungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ proportional zu a verändert.	Es gilt: $v_a(t) = h_a{}'(t)$ $= -140 \cdot (-0.35 \cdot a) \cdot e^{-0{,}35 \cdot a \cdot t - 0{,}7} - 0{,}3 \cdot 2 \cdot t$ $= 49 \cdot a \cdot e^{-0{,}35 \cdot a \cdot t - 0{,}7} - 0{,}6 \cdot t$ Zu zeigen ist, dass eine Konstante k existiert so, dass gilt: $v_a(0) = k \cdot a$: $v_a(0) = 49 \cdot a \cdot e^{-0{,}35 \cdot a \cdot 0 - 0{,}7} - 0{,}6 \cdot 0$ $= 49 \cdot a \cdot e^{-0{,}7}$ $= \underbrace{49 \cdot e^{-0{,}7}}_{\text{konstant}} \cdot a$ Also verändert sich die Vermehrungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ proportional zu a.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3f	ergänzt die Koordinatenachsen in Abbildung 3.3,		6
	zeigt, dass das obere Profil durch den Graphen von p modelliert werden kann, und	Der erste Abschnitt ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung m $m = \frac{2{,}1}{1{,}2}$ $= 1{,}75$ $\Rightarrow p_1(x) = 1{,}75 \cdot x$ Da der Radius des zylinderförmigen Teils 2,10 m beträgt, verläuft der zweite Abschnitt in einem Abstand von 2,1 parallel zur Abszissenachse. Die Steigung für diesen Abschnitt beträgt null. $\Rightarrow p_2(x) = 2{,}1$ Damit kann das obere Profil durch den Graphen von p modelliert werden.	
	berechnet den Öffnungswinkel α des Kegels.	Für den Öffnungswinkel α gilt: $\alpha = 2 \cdot \arctan(m)$ $= 2 \cdot \arctan(1{,}75)$ $\approx 120{,}5°$ Der Öffnungswinkel beträgt ca. 120,5 °.	
3g	begründet, dass das Füllvolumen mit der gegebenen Gleichung ermittelt werden kann und	Das Volumen des Tanks kann durch Berechnung des Rotationsvolumens des Körpers, der entsteht, wenn man die Profilkurve p um die x-Achse rotieren lässt, bestimmt werden. Da die obere Grenze variabel mit $1{,}2 \leq x \leq 11{,}15$ gehalten werden soll, muss zunächst das Volumen des ersten Abschnittes (des Kegels) bestimmt werden: $V_1(1{,}2) = \pi \cdot \int_0^{1{,}2} (1{,}75 \cdot x)^2 dx$ $= 1{,}764 \cdot \pi$ Das Volumen des zweiten Abschnittes (der Zylinder) kann in Abhängigkeit von der Füllhöhe x direkt mit der Formel $V = G \cdot h$ berechnet werden: $V_2(x) = \pi \cdot 2{,}1^2 \cdot (x - 1{,}2)$ $= (4{,}41x - 5{,}292) \cdot \pi$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3g	bestimmt, bis zu welcher Füllgrenze der Tank befüllt werden kann, damit das maximale Füllvolumen von ca. 63 % des gesamten Volumens nicht überschritten wird.	Für das Gesamtvolumen in Abhängigkeit von der Höhe x gilt: $V(x) = V_1(1{,}2) + V_2(x)$ $= 1{,}764 \cdot \pi + (4{,}41x - 5{,}292) \cdot \pi$ $= 4{,}41\pi \cdot x - 5{,}292\pi + 1{,}764\pi$ $= \pi(4{,}41 \cdot x - 3{,}528)$ Das Füllvolumen kann also mit Hilfe dieser Gleichung berechnet werden. Für das maximale Füllvolumen gilt: $V_{max} = 0{,}63 \cdot V(11{,}15)$ $= \frac{5\,751\,081}{20\,000}\pi$ $\approx 90{,}34\ [m^3]$ Die obere Grenze b berechnet sich dann mit $V(b) = V_{max}$ $\pi(4{,}41 \cdot b - 3{,}528) = V_{max}$ $\Rightarrow b = \frac{14\,641}{2\,000} \approx 7{,}32$ Die Füllgrenze liegt bei ca. 7,32 m.	
			40