Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie):

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In Abbildung 1.1 sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt.

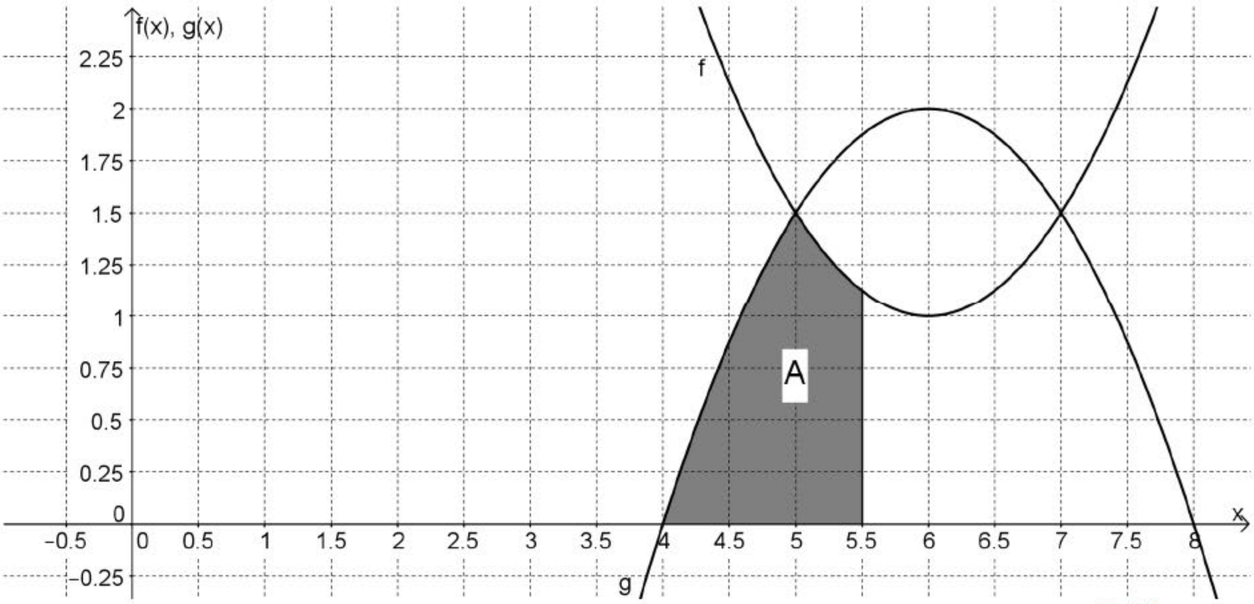

Abbildung 1.1

a1) Geben Sie die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann.

a2) Markieren Sie in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral

$$\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\, dx$$

bestimmt werden kann und

ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.

b) In Abbildung 1.2 ist der Graph einer abschnittweise definierten Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{mit} \quad x \le 0 \\ f_2(x) & \text{mit} \quad x > 0 \end{cases}$$

dargestellt.

b1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

b2) Erläutern Sie, welche Besonderheiten beim Ableiten an der Stelle $x = 0$ zu berücksichtigen sind.

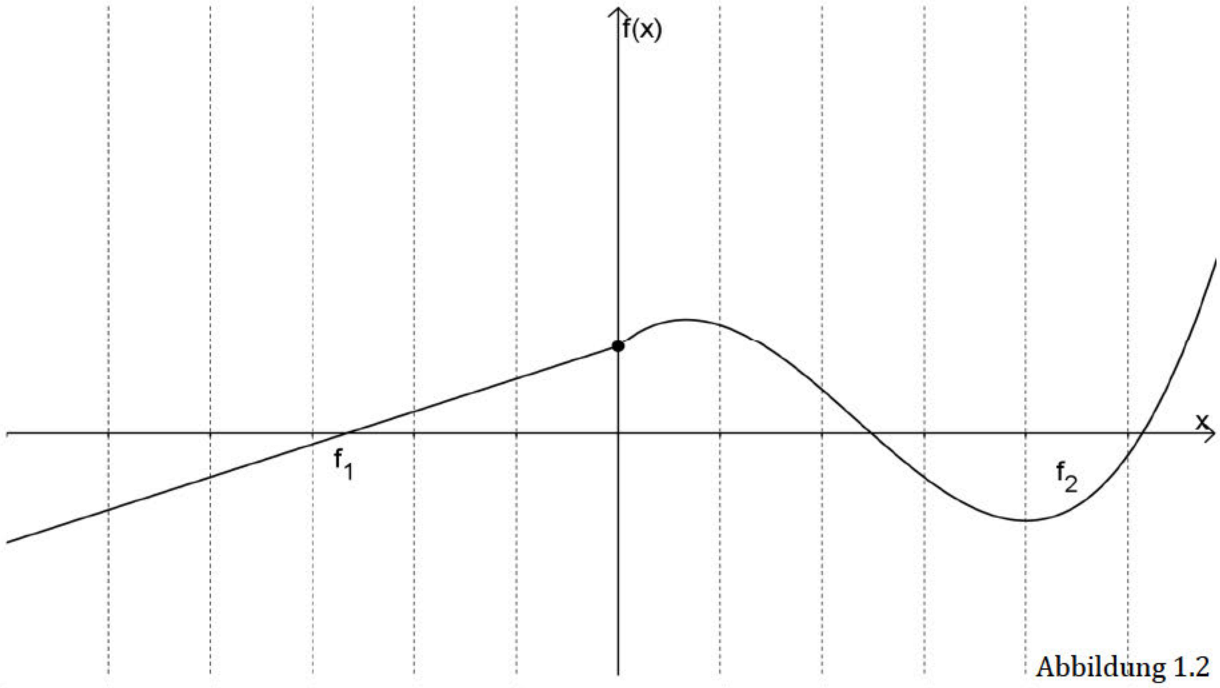

Abbildung 1.2

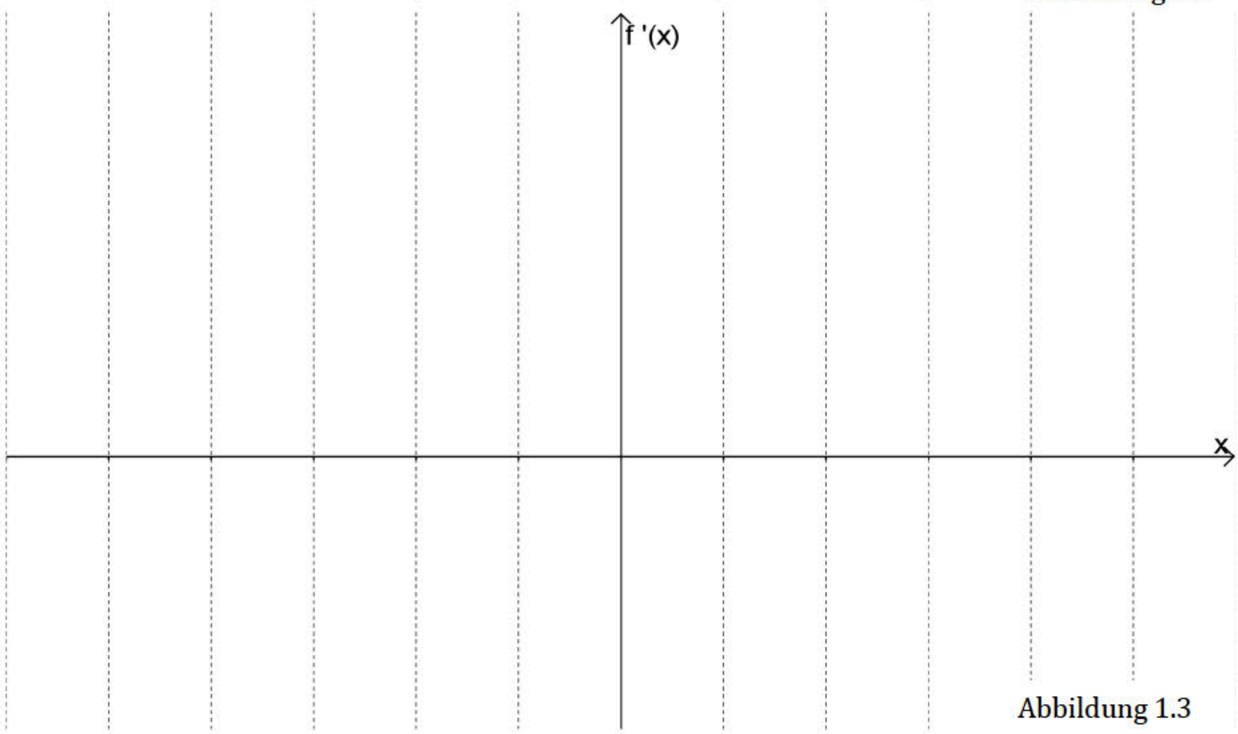

Abbildung 1.3

c)

c1) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

c2) Gegeben ist die modifizierte trigonometrische Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0$$

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f besitzt keine Berührpunkte mit der Abszissenachse.	
Wenn $c = d = 0$ ist, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung.	

d) Gegeben ist die Funktionschar f_a und ihre Ableitungsfunktionen f_a' mit

$$f_a(x) = ax^2 e^{-a \cdot x} \text{ und } f_a'(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$$

mit $a > 0$ und der Eulerschen Zahl e.

d1) Berechnen Sie die Stellen der Graphen von f_a mit waagrechten Tangenten.

d2) Leiten Sie die Gleichung der 2. Ableitung f_a'' her und vereinfachen Sie den Funktionsterm soweit wie möglich.

e) Gegeben sind die beiden Punkte $A(1 | 4 | -3)$ und $B(p | 8 | -9)$ sowie die Geradenschar g_q mit

$$g_q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}.$$

Die Gerade g_{AB} verläuft durch die Punkte A und B.

e1) Für $p = -5$ und $q = 3$ schneiden sich die Gerade g_3 und die Gerade g_{AB}. Sie spannen die Ebene E_3 auf.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g_{AB} und

geben Sie eine Gleichung der Ebene E_3 an.

e2) Für $p = 11$ und $q = -3$ verlaufen die Geraden g_{-3} und g_{AB} parallel zueinander.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_{-3}, die durch diese beiden Geraden aufgespannt wird.

f) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ und die Gleichung

$$s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} = \vec{c}.$$

f1) Erläutern Sie die Bedeutung der Lösbarkeit der Gleichung für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

f2) Zeigen Sie, dass die obige Gleichung für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Lösung hat und

erläutern Sie die Bedeutung der Unlösbarkeit der Gleichung für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

g) Gegeben sind die Geraden g_1 bis g_5.

Entscheiden Sie, welche Lagebeziehung das jeweils angegebene Geradenpaar hat.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

	sind identisch	sind parallel	sind windschief	schneiden sich
g_2 und g_3				
g_3 und g_4				
g_1 und g_2				
g_1 und g_3				
g_4 und g_5				

h) Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C und G des Würfels in Abbildung 1.4 mit $A(1|2|1)$, $B(1|7|1)$, $C(-3|7|-2)$ und $G(-6|7|2)$.

h1) Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und H an.

h2) Berechnen Sie die Gleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen, in Koordinatenform.

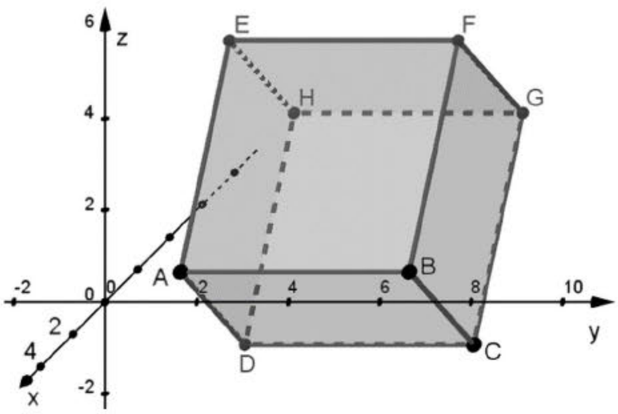

Abbildung 1.4

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** Analytische Geometrie (Fehmarnbelt)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	7	3	5	5	5	6	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die feste Fehmarnbeltquerung gilt derzeit als eines der größten europäischen Verkehrsprojekte. Die dänische Insel Lolland und die deutsche Insel Fehmarn sollen dabei mit einem Tunnel verbunden werden.

Der Querschnitt eines Tunnelelementes sowie die Lage eines Tunnelelementes im Meeresgrund sind in Abbildung 2.1 (nicht maßstabsgetreu) dargestellt[1]. Die Tunnelelemente sind parallel zur x-y-Ebene verlegt, der trapezförmige Graben für das Kiesbett, das Tunnelelement, die Füllungen und die Schutzschicht sind symmetrisch zur Ebene E_1 mit E_1: $y = -21{,}1$.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

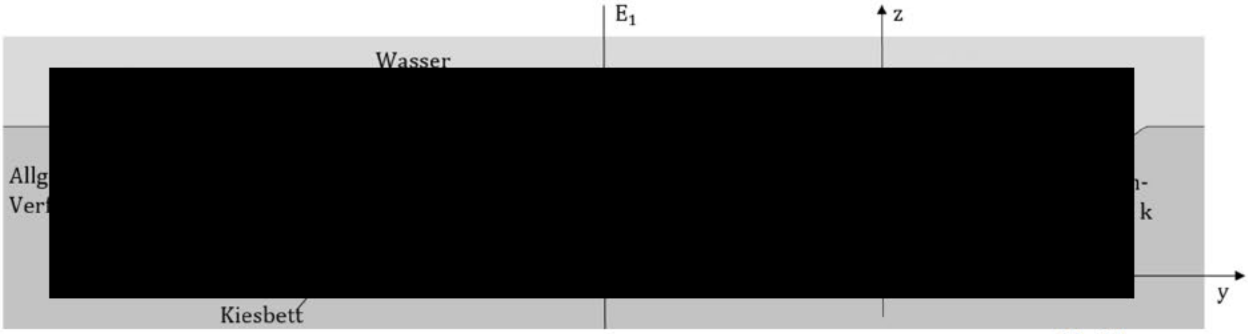

Abbildung 2.1

Das mit der Planung des Tunnels beauftragte Ingenieurbüro „Schneider“ beschäftigt sich mit verschiedenen Aspekten, die bei dem Tunnelbau zu beachten sind. Die Füllungen an den Seiten der Tunnelelemente sind wichtig, um die Standfestigkeit der Tunnelelemente im Meeresgrund zu gewährleisten.

Die Oberseite der **Haltefüllung** (gleichbedeutend mit der Unterseite der **allgemeinen Verfüllung**) wird als Teil der Ebene E_2 modelliert mit

$$E_2: \quad z = 3.$$

a) Begründen Sie innermathematisch und ohne Rechnung, dass die Ebene E_2 parallel zur x-y-Ebene liegt und

geben Sie die Stärke d der Haltefüllung an.

[1] Quelle: Femern A/S, Französische Straße 55, 10117 Berlin (27.05.2019)

Die **Haltefüllung** sorgt nur für eine ausreichende Stabilität der Tunnelelemente, wenn sie in einer Höhe von zwei Metern eine Mindestbreite von 6,50 m aufweist. Außerdem muss der Punkt R mit R(0|0|8) einen Mindestabstand von neun Metern zur rechten Seitenkante k haben. Die Ingenieure modellieren die Kante k als Teil der Geraden g_1 mit

$$g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8{,}9 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die rechte Seitenkante k durch einen Teil der Geraden g_1 modelliert werden kann und

prüfen Sie rechnerisch, ob die Vorgaben zur Mindestbreite und zum Mindestabstand eingehalten werden.

Für weitere Berechnungen muss die linke Seitenfläche des trapezförmigen Grabens als Teil einer Ebene modelliert werden.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform, in der die linke Seitenfläche des trapezförmigen Grabens liegt.

Beim Bau der Hinterlandanbindung werden erhebliche Mengen an Bausand benötigt. Im Folgenden soll der in der Abbildung 2.2 vereinfacht dargestellte Sandhaufen modelliert werden.

Die Abmessungen des Sandhaufens werden durch die Punkte $A_S(0|0|20)$, $B_S(15|0|0)$, $C_S(15|30|0)$, $D_S(0|45|0)$, $F_S(-15|0|0)$ und $G_S(0|-15|0)$ beschrieben (siehe Abbildung 2.2). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

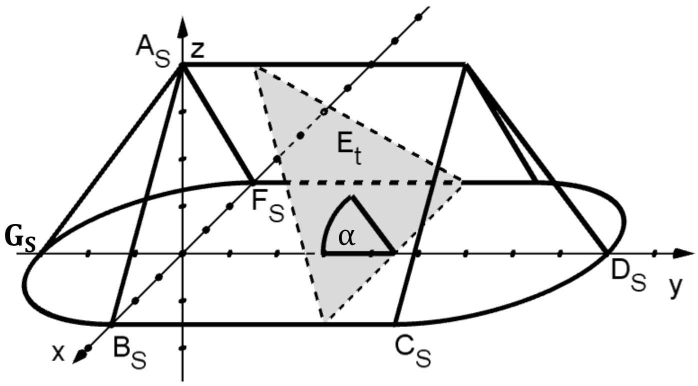

Abbildung 2.2

Ein Ingenieur berechnet das Volumen des Sandhaufens mit folgender Gleichung:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b + \frac{c \cdot d}{2} \cdot e$$

d) Leiten Sie die Werte der Parameter a bis e her und

geben Sie näherungsweise das Volumen mit Einheit an.

Ein Bagger trägt den Sandhaufen schichtweise ab. Nach dem Abtragen einer vollständigen Schicht liegt der neu entstandene Teil der Oberfläche in einer Ebene der Ebenenschar E_t mit der Gleichung

$$E_t: \quad 2y + \frac{3}{2}z = 90 - 3t \quad \text{mit } 0 \le t \le 20.$$

Der Parameter t gibt dabei die Zeit t in Arbeitsstunden an und $t = 0$ entspricht dem Beginn des Abtragens vom Punkt D_S aus.

Neuer Sand muss bestellt werden, wenn eine Ebene der Ebenenschar E_t die Strecke $\overline{B_S C_S}$ im Verhältnis 3: 1 teilt. Einer der Ingenieure vermutet, dass dies nach ca. 15 Arbeitsstunden der Fall ist.

e) Prüfen Sie, ob die Vermutung des Ingenieurs richtig ist.

f) Bestimmen Sie für $t = 15$ den Winkel α zwischen der Ebene E_{15} und der x-y-Ebene und begründen Sie innermathematisch, warum sich dieser Winkel für keine der Ebenen der Ebenenschar E_t ändert.

Einige Gegner der festen Fehmarnbeltquerung stellen als Zeichen des Protestes an diversen Orten in Norddeutschland 90 Zentimeter hohe blaue Kreuze auf.

In Abbildung 2.3 ist ein Balken eines der Kreuze dargestellt. Der zweite Balken (bestehend aus zwei Teilstücken) wird so montiert, dass das Kreuz symmetrisch zur Ebene $y = 40$ ist. Die Teilstücke des zweiten Balkens werden mit dem in Abbildung 2.3 dargestellten Balken verschraubt und durch Metallwinkel, unter anderem im Punkt W, stabilisiert. Die Koordinaten der in Abbildung 2.3 dargestellten Eckpunkte lauten:

$A_K(0\|0\|0)$	$B_K(0\|20\|0)$	$C_K(20\|-20\|0)$	$D_K(-20\|0\|0)$
$E_K(0\|60\|80)$	$F_K(0\|80\|80)$	$G_K(-20\|80\|80)$	$H_K(-20\|60\|80)$

Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

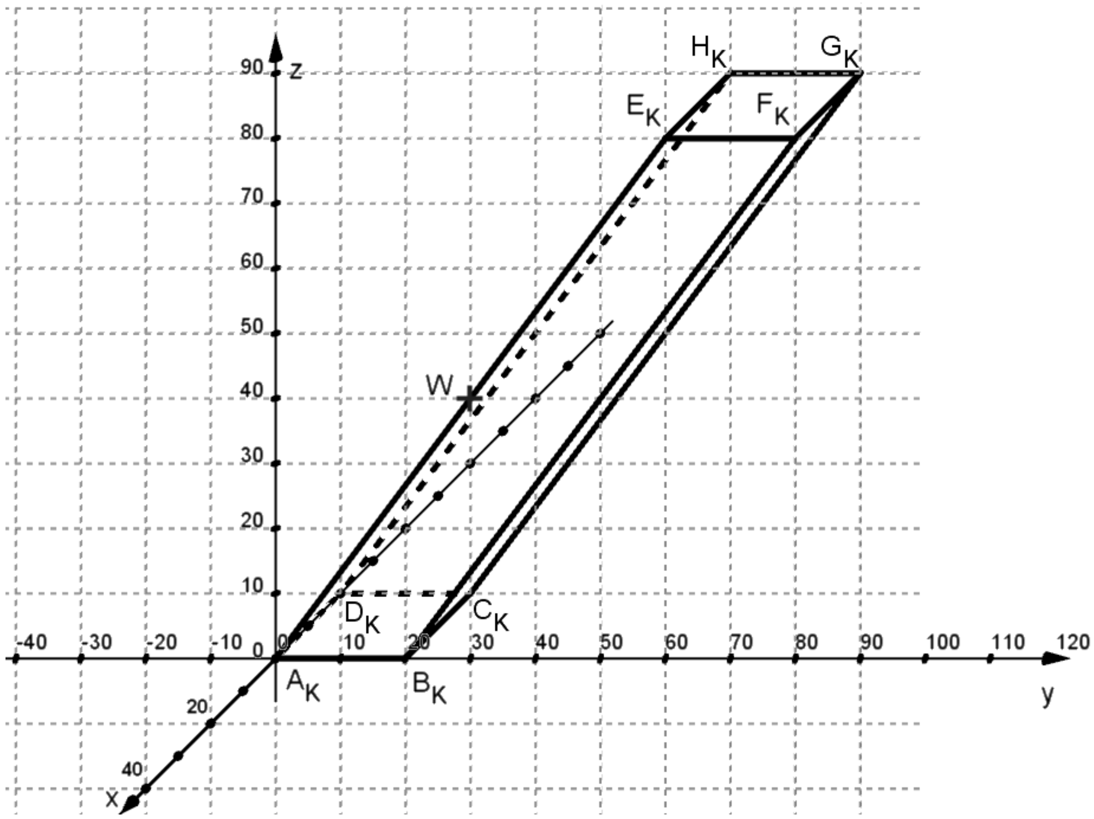

Abbildung 2.3

g) Ergänzen Sie in Abbildung 2.3 die beiden Teilstücke des zweiten Balkens und berechnen Sie den Innenwinkel des Metallwinkels, der im Punkt W zur Stabilisierung angelegt werden muss.

In der Abbildung 2.4 sind die Vektoren $\overrightarrow{A_K E_K}$ und $\overrightarrow{E_K F_K}$ zwischen den Punkten A_K, E_K und F_K des Balkens aus Abbildung 2.3 in der y-z-Ebene dargestellt.

h) Skizzieren Sie den Vektor $\vec{n}$, der den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{A_K E_K}$ und $\overrightarrow{E_K F_K}$ halbiert,

geben Sie den Vektor $\vec{n}$ näherungsweise an und

bestimmen Sie näherungsweise eine Gleichung der Ebene $E_{Spiegel}$ so, dass der Vektor $\overrightarrow{A_K E_K}$ an der Ebene $E_{Spiegel}$ reflektiert wird und der Vektor $\overrightarrow{E_K F_K}$ entsteht.

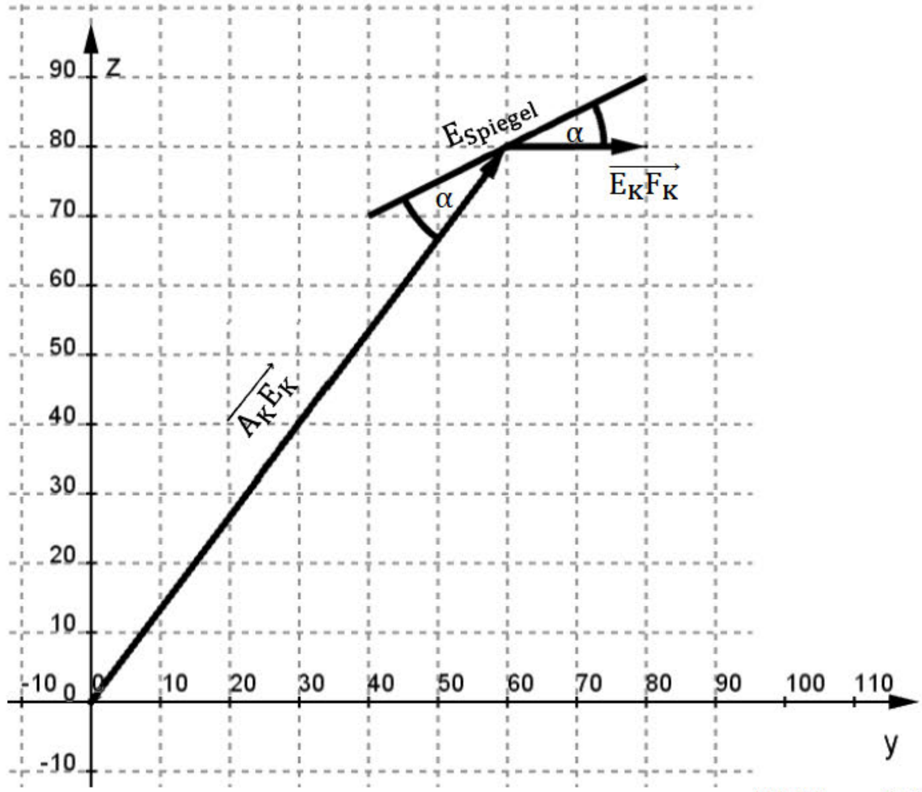

Abbildung 2.4

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra):

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In Abbildung 1.1 sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt.

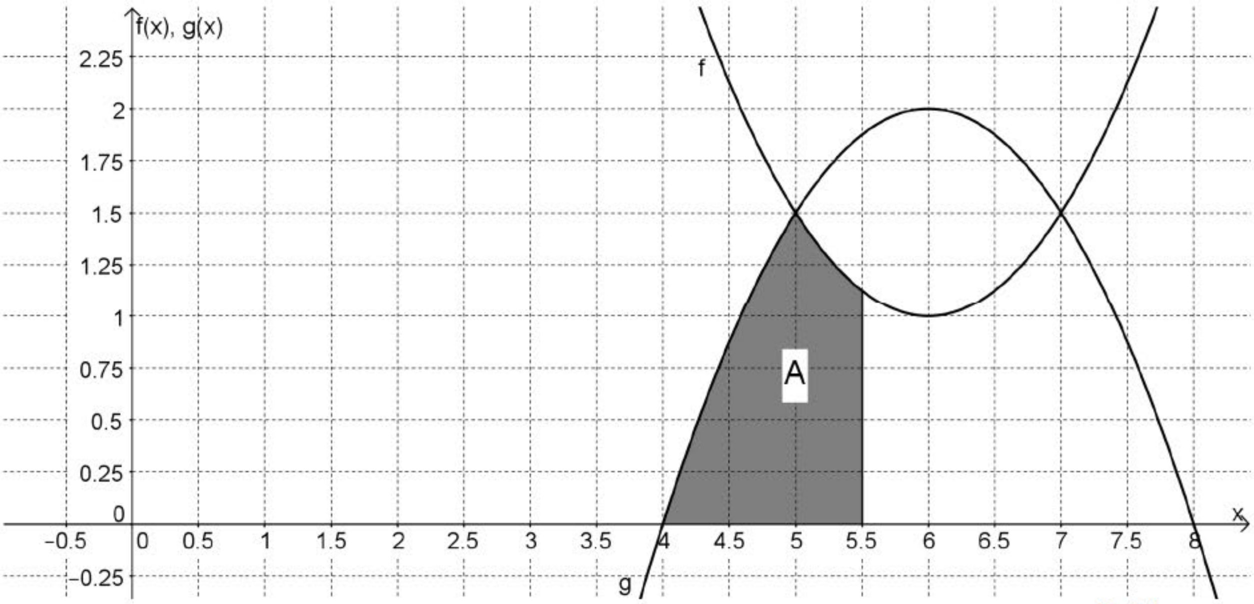

Abbildung 1.1

a1) Geben Sie die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann.

a2) Markieren Sie in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral

$$\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\, dx$$

bestimmt werden kann und

ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.

b) In Abbildung 1.2 ist der Graph einer abschnittweise definierten Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{mit} \quad x \leq 0 \\ f_2(x) & \text{mit} \quad x > 0 \end{cases}$$

dargestellt.

b1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

b2) Erläutern Sie, welche Besonderheiten beim Ableiten an der Stelle $x = 0$ zu berücksichtigen sind.

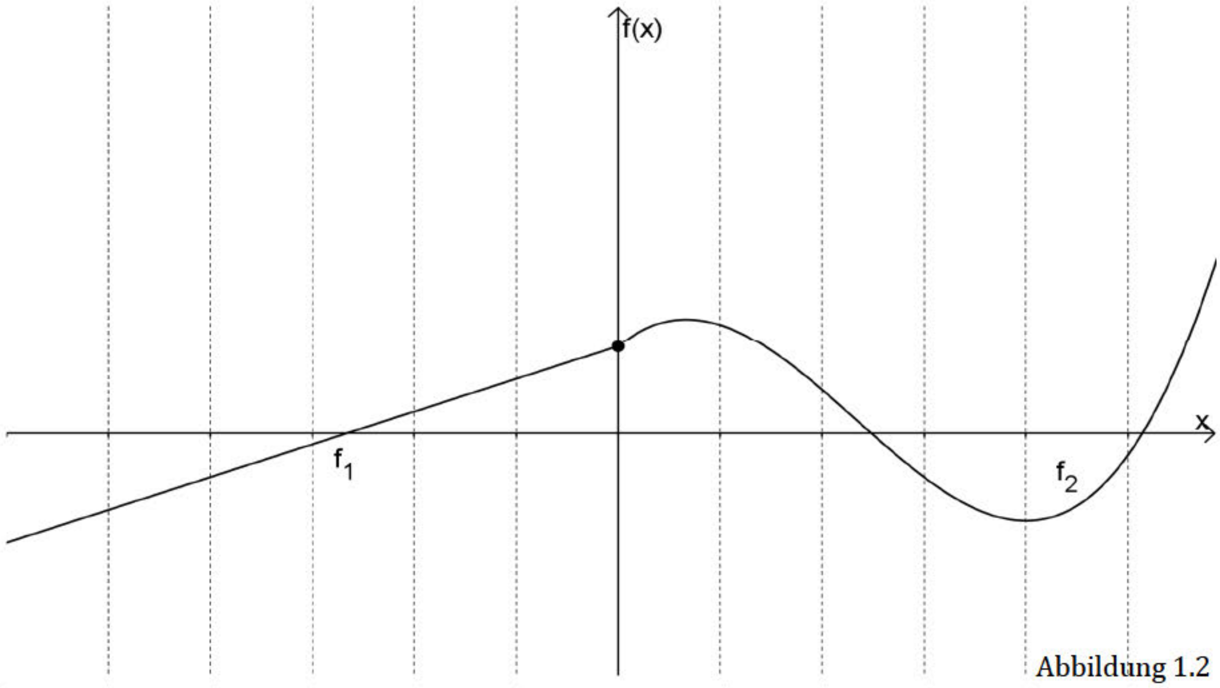

Abbildung 1.2

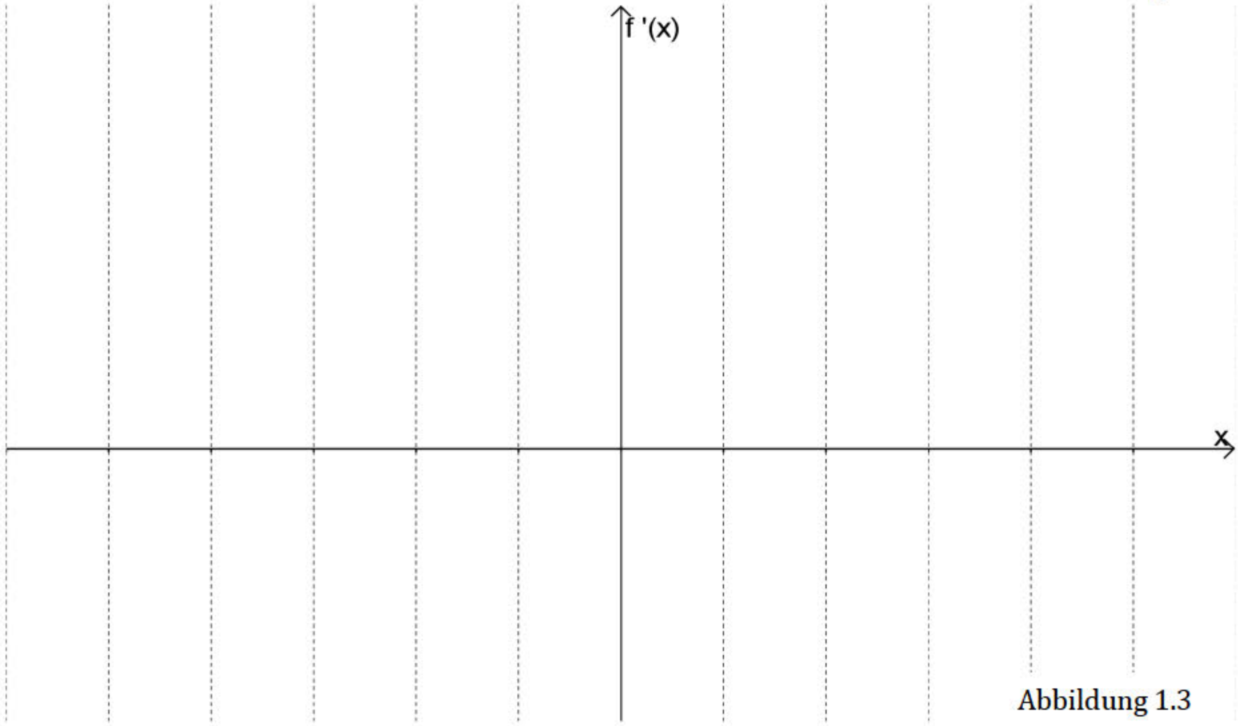

Abbildung 1.3

c)

c1) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

c2) Gegeben ist die modifizierte trigonometrische Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0$$

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f besitzt keine Berührpunkte mit der Abszissenachse.	
Wenn $c = d = 0$ ist, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung.	

d) Gegeben ist die Funktionschar f_a und ihre Ableitungsfunktionen f_a' mit

$$f_a(x) = ax^2e^{-a\cdot x} \text{ und } f_a'(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a\cdot x}$$

mit $a > 0$ und der Eulerschen Zahl e.

d1) Berechnen Sie die Stellen der Graphen von f_a mit waagrechten Tangenten.

d2) Leiten Sie die Gleichung der 2. Ableitung f_a'' her und vereinfachen Sie den Funktionsterm soweit wie möglich.

e) Gegeben sind die folgenden Matrizen A, B und C mit

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}5 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Matrix M mit $M = (A \cdot B)^2$ ist eine stochastische Matrix.		
Wenn A und B stochastische Matrizen sind, folgt daraus $A \cdot B = B \cdot A$.		
Die Matrix Q mit $Q = C^T \cdot A$ ist eine Matrix vom Typ (2x3).		
Der Vektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ ist ein Fixvektor der Übergangsmatrix B.		
Da $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ die Inverse von C.		

f) Gegeben ist die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2k \\ 0 & 2 & 6k^2 - 4k \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, für welche Werte des Parameters k die Matrizengleichung eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat.

g) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0{,}5 & a \end{pmatrix}$ mit $a \neq -1{,}5$.

g1) Berechnen Sie die inverse Matrix M^{-1} der Matrix M.

g2) Begründen Sie, warum für $a = -1{,}5$ keine inverse Matrix M^{-1} existiert.

h)

h1) Erstellen Sie eine 4x4-Matrix A, für deren Elemente a_{ik} gilt:

$$a_{ik} = \begin{cases} k - i & \text{für} \quad i < k \\ i \cdot k & \text{für} \quad i = k \\ i - k & \text{für} \quad i > k \end{cases}$$

h2) Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach X auf.

$$2 \cdot P \cdot X - (X^T \cdot M)^T + 2 \cdot X = X - N$$

Gehen Sie dabei davon aus, dass alle gegebenen und im Verlauf der Rechnung auftretenden Matrizen invertierbar und vom gleichen Typ sind.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** Lineare Algebra (**Parfumherstellung)**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	5	5	4	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

In der Parfum-Manufaktur „Duftig" werden aus pflanzlichen Rohstoffen sowie destilliertem Wasser und Alkohol verschiedene Sorten Parfum hergestellt. Beispielsweise werden aus den drei pflanzlichen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die vier Riechstoffe Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 (Zwischenprodukte) hergestellt und aus diesen Riechstoffen die drei verschiedenen Sorten Parfum (Endprodukte) „Happy Summer" (P_1), „Lovely Spring" (P_2) und „Spicy Ginger" (P_3) gemischt. Das dazugehörige Verflechtungsdiagramm ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

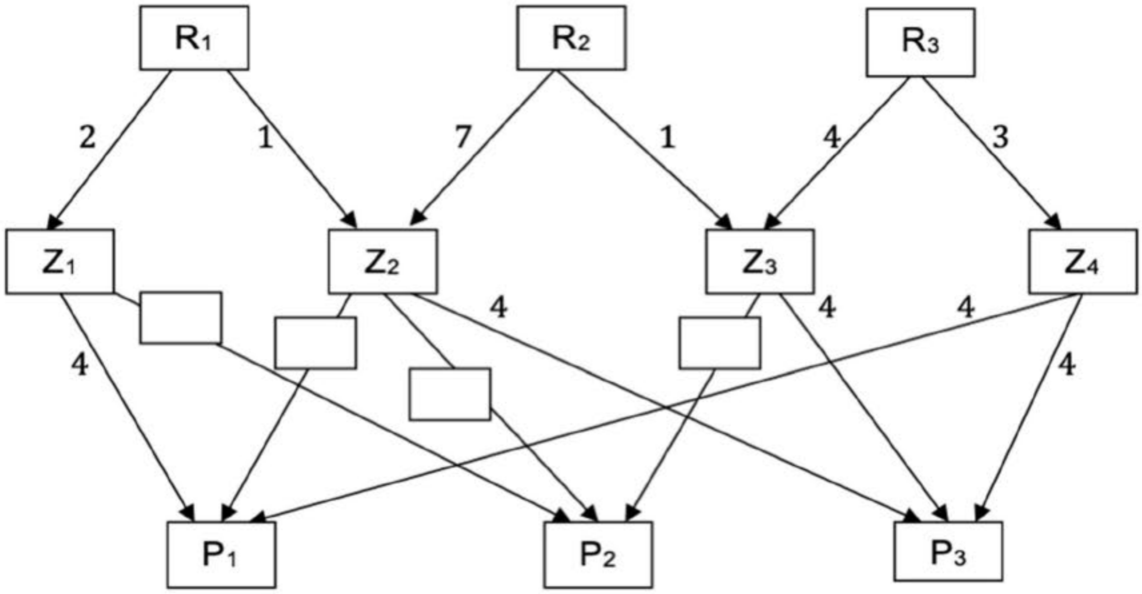

Abbildung 2.1

a) Begründen Sie anhand der zweiten Spalte und mittleren Zeile der Matrix A, dass die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

den gleichen Materialfluss wie das Verflechtungsdiagramm aus Abbildung 2.1 darstellt.

Ergänzen Sie die fehlenden vier Angaben in den Kästchen im Verflechtungsdiagramm in Abbildung 2.1 mithilfe der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B mit

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Parfum-Manufaktur „Duftig“ erhält einen Auftrag von der Parfümerie „Wunderschön“ über die Lieferung ihrer drei Parfumsorten, dabei wird eine Mengeneinheit (ME) Parfum in einem Flakon (Fläschchen) verkauft (siehe Abbildung 2.2).

Bestellung

der Parfümerie „Wunderschön“
bei der Parfum-Manufaktur „Duftig“:

- 23 Flakons des Parfums „Happy Summer“
- 24 Flakons des Parfums „Lovely Spring“
- 17 Flakons des Parfums „Spicy Ginger“

Kiel, den 27.03.2020 gez. *L. Schmidt*

Abbildung 2.2

b) Leiten Sie das Elements c_{32} der Rohstoff-Endprodukt-Matrix C mit

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 4 \\ 21 & 30 & 32 \\ 12 & 8 & 28 \end{pmatrix}$$

her.

Ermitteln Sie die Menge der pflanzlichen Rohstoffe R_1, R_2 und R_3, die für den Auftrag der Pafümerie „Wunderschön“ benötigt werden.

Die vier Riechstoffe (Zwischenprodukte) kosten jeweils in der Herstellung (dies beinhaltet die Kosten für Rohstoffe und Fertigungslöhne) 3,00 Euro für eine ME Z_1, 2,00 EUR für eine ME Z_2, 3,00 EUR für eine ME Z_3 und 4,00 EUR für eine ME Z_4. Die Herstellkosten für je einen Flakon des Parfums „Happy Summer“ betragen 6,00 EUR, für einen Flakon des Parfums „Lovely Spring“ 10,00 EUR und für einen Flakon des Parfums „Spicy Ginger“ 7,00 EUR. Die Fixkosten belaufen sich auf 200,00 EUR.

Die Parfum-Manufaktur „Duftig“ kann die drei Parfumvarianten zu den in der Tabelle 2.1 angegebenen Verkaufspreisen an die Parfümerie „Wunderschön“ absetzen, wobei der Verkaufspreis für das Parfum „Lovely Spring“ noch festgelegt werden muss.

Parfum	P_1	P_2	P_3
Verkaufspreis in EUR pro ME (Flakon)	44,00	z	47,00

Tabelle 2.1

Für die Kalkulation des fehlenden Verkaufspreises gelten die Zusammenhänge aus Abbildung 2.3:

> Erlös = Verkaufspreis · (Anzahl der Flakons)
>
> Kosten = (Herstellkosten der Riechstoffe) · (Menge der Riechstoffe) + (Herstellkosten der Flakons) · (Anzahl der Flakons) + Fixkosten
>
> Gewinn = Erlös − Kosten

Abbildung 2.3

c) Bestimmen Sie den Verkaufspreis z in $\left(\frac{\text{EUR}}{\text{ME}}\right)$ des Parfums „Lovely Spring“ so, dass die Parfum-Manufaktur „Duftig“ für den Auftrag der Parfümerie „Wunderschön“ (Abbildung 2.2) mindestens einen Gewinn in Höhe von 500,00 EUR erwirtschaftet.

Die pflanzlichen Rohstoffe können verderben und müssen somit vor Ablauf des Haltbarkeitsdatums verarbeitet werden. Aus diesem Grund muss ein Teil des Lagerbestandes an pflanzlichen Rohstoffen zunächst verbraucht werden. Davon betroffen sind 38 ME von Rohstoff R_1, 170 ME von Rohstoff R_2 und 136 ME von Rohstoff R_3.

d) Zeigen Sie, dass mithilfe des Ausdrucks

$$C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 170 \\ 136 \end{pmatrix}$$

die Anzahl der Flakons der verschiedenen Parfumsorten berechnet werden kann, so dass nur der Lagerbestand der vom Haltbarkeitsproblem betroffenen pflanzlichen Rohstoffe restlos verbraucht wird und

berechnen Sie diese Anzahl.

Die Parfum-Manufaktur „Blütenduft“ möchte ihre Produktpalette erweitern und nach einer traditionellen Rezeptur Duftwasser herstellen und verkaufen. Die verschiedenen Duftwasser enthalten auch Alkohol und destilliertes Wasser, jedoch eine geringere Menge an Rohstoffen und riechen aus diesem Grund weniger intensiv als Parfum. Es ist geplant, aus den drei bekannten pflanzlichen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 jeweils drei unterschiedliche Duftwasser D_1, D_2 und D_3 herzustellen.

Leider ist die traditionelle Rezeptur nur unvollständig überliefert. Es lässt sich nur noch die Stückliste (Tabelle 2.2) mit den Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ rekonstruieren. Außerdem kann alten Unterlagen entnommen werden, dass sich aus 70 ME R_1, 60 ME R_2 und 70 ME R_3 insgesamt 10 Flakons von jeder Sorte Duftwasser produzieren lassen.

	D_1	D_2	D_3
R_1	2c	3	a
R_2	0	a	b
R_3	b+c	1	d

Tabelle 2.2

Ein Mitarbeiter der Parfum-Manufaktur „Duftig“ behauptet, dass es unmöglich ist, die traditionelle Rezeptur zu rekonstruieren, da es unendlich viele Möglichkeiten der Kombination der Rohstoffe gibt. Ein anderer Mitarbeiter ist der Meinung, dass es nur zwei unterschiedliche Rezepturen geben kann, aus denen dann die besser riechende Rezeptur ausgewählt werden kann.

e) Entscheiden Sie begründet, welcher der beiden Mitarbeiter Recht hat.

Die Parfum-Manufaktur „Blütenduft“ hat nach intensiver Marktforschung festgestellt, dass ihre Kunden dem Unternehmen treu bleiben und nicht zur Konkurrenz wechseln. Es können aber auch keine neuen Kunden dazugewonnen werden. Innerhalb eines Jahres wechselt ein Teil der Kunden zu einer anderen der drei Parfumsorten „Happy Summer“ (P_1), „Lovely Spring“ (P_2) und „Spicy Ginger“ (P_3).

Das Wechselverhalten der Kunden zwischen den einzelnen Parfumsorten innerhalb des Jahres 2019 kann durch Tabelle 2.3 sowie die Übergangsmatrix M beschrieben werden. Da die Kunden einen Flakon ihres Parfums über einen langen Zeitraum benutzen, findet nur höchstens einmal im Jahr ein Sortenwechsel statt.

Wechselverhalten der Kunden innerhalb des Jahres 2019 (absolute Werte)		von		
		P_1	**P_2**	**P_3**
zu	**P_1**	66 000	18 000	22 500
	P_2	18 000	58 500	22 500
	P_3	36 000	13 500	105 000

Tabelle 2.3

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}65 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}70 \end{pmatrix}$$

f) Berechnen Sie anhand der Tabelle 2.3, wie viele Kunden zu Beginn des Jahres 2019 und ein Jahr später die Parfumsorte „Happy Summer“ gekauft haben.

Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle 2.3 das Element m_{31} der Übergangsmatrix M und erläutern Sie die Bedeutung des Elements m_{31} im Sachzusammenhang.

Ein Mitarbeiter aus der Marketingabteilung behauptet, dass mehr als 50 % der Kunden innerhalb eines Jahres ihrer Parfumsorte treu bleiben, aber langfristig die meisten Kunden „Spicy Ginger“ kaufen.

g) Beurteilen Sie die Behauptung des Mitarbeiters.

Die Parfum-Manufaktur „Duftig“ ist unzufrieden darüber, dass sie keine neuen Kunden dazugewinnen kann und startet zu Beginn des Jahres 2020 eine Werbeoffensive, die die Einzigartigkeit ihrer drei Parfumsorten herausstellen soll. Die Marketingabteilung rechnet dabei mit einer jährlichen Steigerung der Verkaufszahlen um 5 % bei jeder der drei Parfumsorten. Das Wechselverhalten der Bestandskunden bleibt von den Werbemaßnahmen unberührt.

h) Bestimmen Sie, unter Berücksichtigung der aufgrund der Werbemaßnahmen jährlichen Steigerung der Absatzzahlen, eine nicht stochastische Matrix D, die das Wechselverhalten sowie den Zuwachs der Absatzzahlen berücksichtigt.

Erläutern Sie, warum die Matrix D nicht stochastisch sein kann.

Berechnen Sie, wie viele Kunden jeweils die Parfumsorten „Happy Summer“ (P_1), „Lovely Spring“ (P_2) und „Spicy Ginger“ (P_3) ein Jahr nach Durchführung der Werbemaßnahme bevorzugen würden, wenn drei Jahre nach Einführung der Werbemaßnahmen der Nachfragevektor $\vec{x} = (114\,843 \quad 123\,721 \quad 178\,181)^T$ lautet.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)**:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In Abbildung 1.1 sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt.

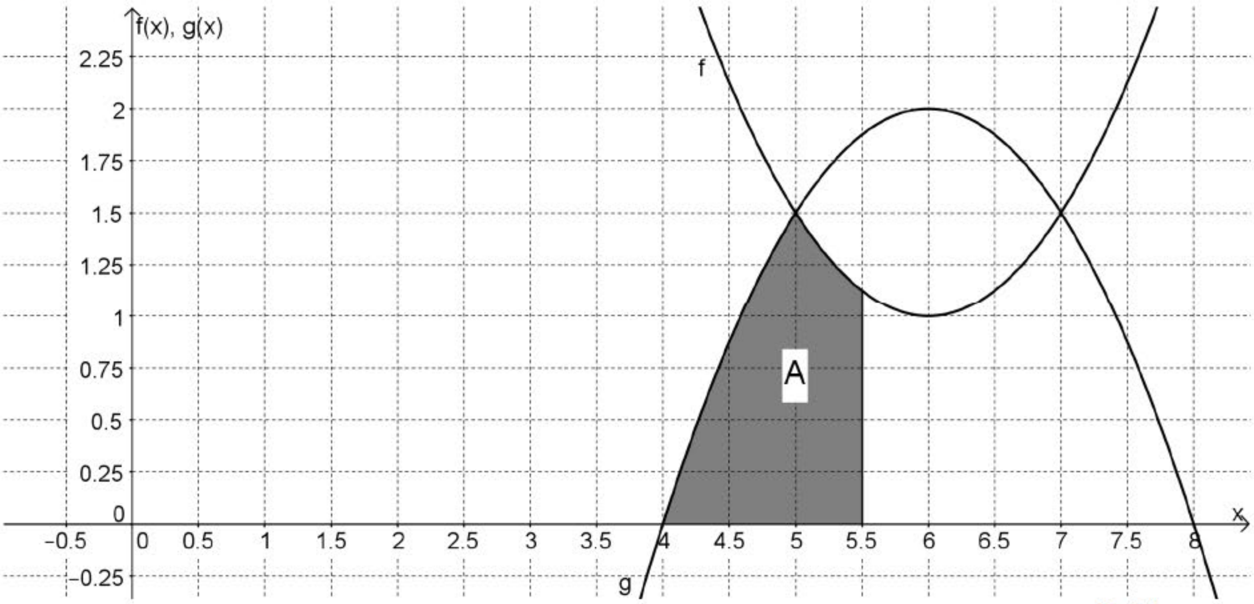

Abbildung 1.1

a1) Geben Sie die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann.

a2) Markieren Sie in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral

$$\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\, dx$$

bestimmt werden kann und

ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.

b) In Abbildung 1.2 ist der Graph einer abschnittweise definierten Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{mit} \quad x \leq 0 \\ f_2(x) & \text{mit} \quad x > 0 \end{cases}$$

dargestellt.

b1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

b2) Erläutern Sie, welche Besonderheiten beim Ableiten an der Stelle $x = 0$ zu berücksichtigen sind.

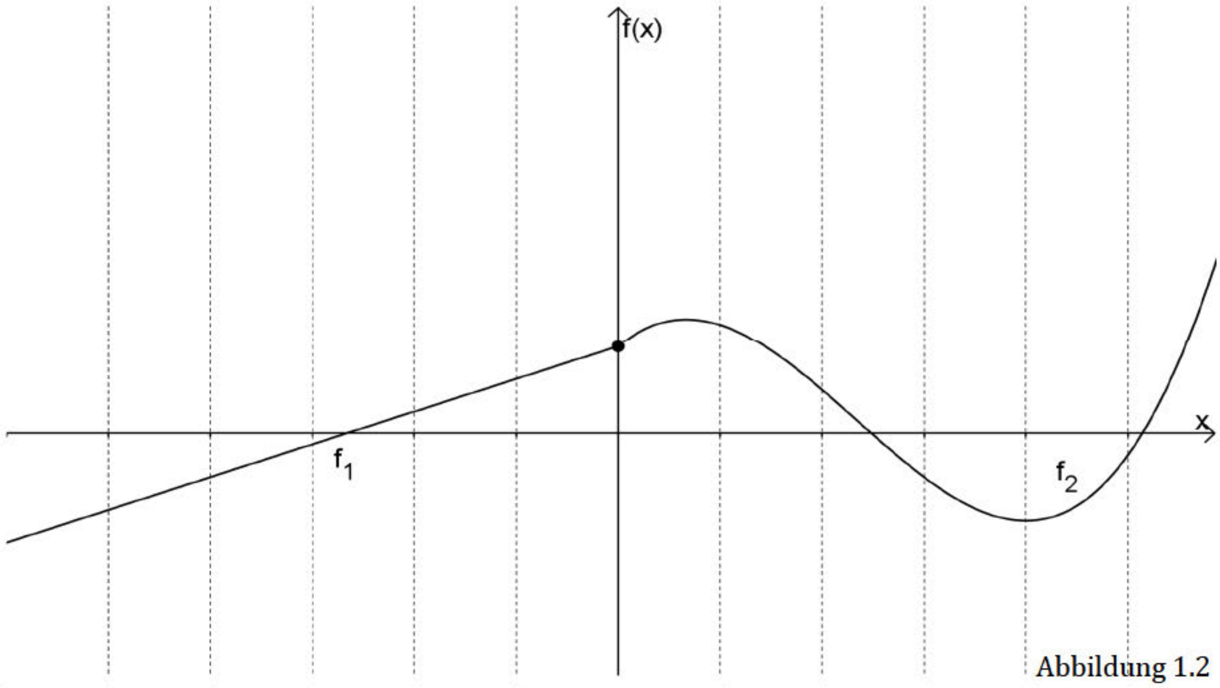

Abbildung 1.2

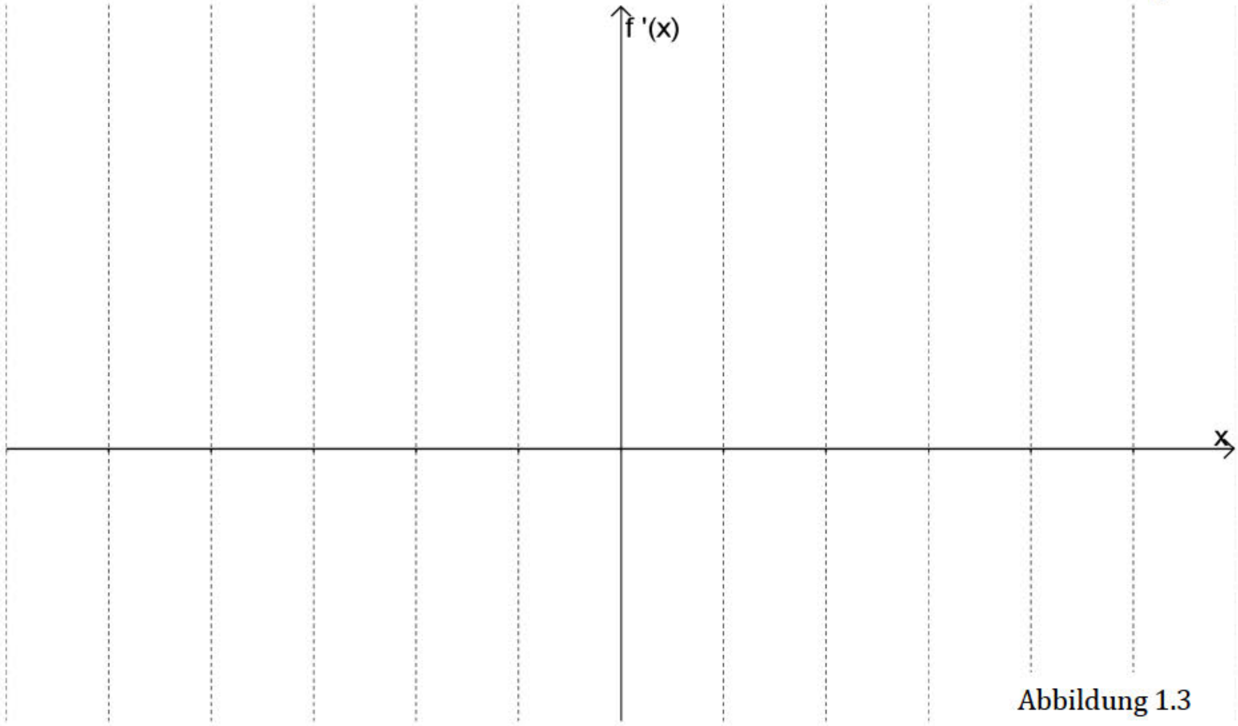

Abbildung 1.3

c)

c1) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

c2) Gegeben ist die modifizierte trigonometrische Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0$$

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f besitzt keine Berührpunkte mit der Abszissenachse.	
Wenn $c = d = 0$ ist, dann verläuft der Graph von f durch den Ursprung.	

d) Gegeben ist die Funktionenschar f_a und ihre Ableitungsfunktionen f_a' mit

$$f_a(x) = ax^2e^{-a \cdot x} \text{ und } f_a'(x) = (2ax - a^2x^2) \cdot e^{-a \cdot x}$$

mit $a > 0$ und der Eulerschen Zahl e.

d1) Berechnen Sie die Stellen der Graphen von f_a mit waagrechten Tangenten.

d2) Leiten Sie die Gleichung der 2. Ableitung f_a'' her und vereinfachen Sie den Funktionsterm soweit wie möglich.

e) Gegeben ist das folgende Baumdiagramm (Abbildung 1.4), das ein zweistufiges Zufallsexperiment darstellt. Es können die Ereignisse A und B sowie deren Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten.

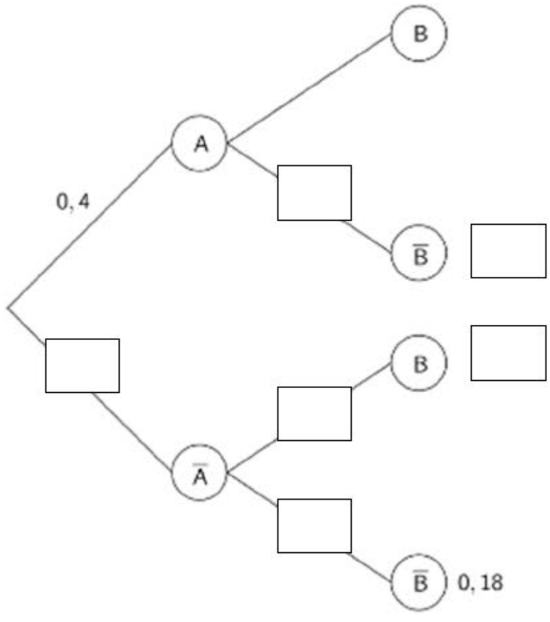

Abbildung 1.4

e1) Ergänzen Sie die in den Kästchen fehlenden Wahrscheinlichkeiten (Abb. 1.4), wenn $P(B) = 0{,}74$ gilt.

e2) Erläutern Sie, welche Schlussfolgerung für die Ereignisse A und B getroffen werden kann, wenn die Ungleichung

$$P_B(\overline{A}) \neq P(\overline{A}) \text{ (alternative Schreibweise: } P(\overline{A}|B) \neq P(\overline{A}))$$

erfüllt ist.

f) Auf Grundlage einer Datenerhebung wurde die in Tabelle 1.1 dargestellte Datenreihe ermittelt. Deren empirische Standardabweichung beträgt $s = 2$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
8	8	6	2	3	3	5	5	5	

Tabelle 1.1

f1) Begründen Sie, dass $x_{10} = 5$ gelten muss, wenn das arithmetische Mittel $\bar{x} = 5$ beträgt.

Für eine zweite Datenreihe gilt: $x_1 + 3;\ x_2 + 3;\ \dots;\ x_{10} + 3$.

f2) Erläutern Sie, wie die empirische Varianz der zweiten Datenreihe direkt aus der empirischen Varianz der ersten Datenreihe hergeleitet werden kann und

geben Sie deren Wert an.

g) In den Tabellen 1.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der binomialverteilten Zufallsvariablen X mit $n = 12$ und $p = \frac{3}{4}$ dargestellt.

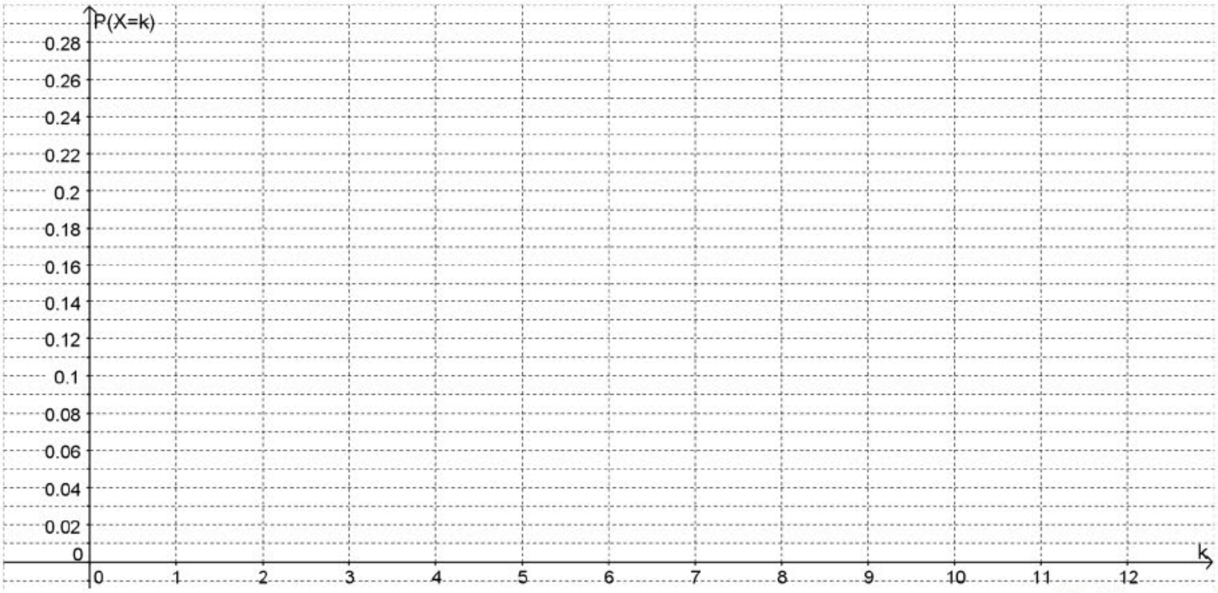

Abbildung 1.5

k	$P(X = k)$
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0004
4	0,0024
5	0,0115
6	0,0401

k	$P(X = k)$
7	0,1032
8	0,1936
9	0,2581
10	0,2323
11	0,1267
12	0,0317

Tabellen 1.2

g1) Zeichnen Sie einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X für $7 \leq k < 9$ in Abbildung 1.5 ein.

g2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

h) Gegeben ist die Dichtefunktion φ der normalverteilten Zufallsvariablen Z mit $\mu = 5$ und $\sigma = 2$.

h1) Begründen Sie, warum

$$P(Z > 6) = P(Z \geq 6)$$

gilt.

h2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
$\varphi''(3) = 0$	
$P(Z \leq 3) < 0{,}5$	

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik)**: Bienensterben**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	4	4	7	4	2	4	4	5	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Deutschlandweit werden jeweils im Sommer knapp 900 000 Völker der sogenannten Westlichen Honigbiene von Imkern gehalten. Nach der Honigernte werden die Bienenvölker versorgt und einige davon eingewintert. Trotz Einwinterung sind im Frühling immer wieder erhebliche Verluste zu verzeichnen.

Um die Anzahl der eingewinterten Bienenvölker, die den Winter unbeschadet überstanden haben, zu ermitteln, befragt das Fachzentrum Bienen und Imkerei, Mayen (FBI) jedes Frühjahr Imkerinnen und Imker aus allen Teilen Deutschlands. Diese Meldungen zu den Überwinterungsergebnissen erfasst das FBI getrennt nach Bundesländern.

Die Meldungen für den Winter 2017/2018 sind in der Tabelle 2.1 zusammengefasst.[1]

	Winterverluste 2017/2018		
Bundesland	eingewinterte Bienenvölker [Anzahl]	Verlustvölker [Anzahl]	gerundete Verlustquote [Prozent]
Baden-Württemberg	[redacted]		
Bayern			
Berlin			
Brandenburg			
Bremen			
Hamburg			
Hessen			
Mecklenburg-Vorpommern			
Niedersachsen			
Nordrhein-Westfalen			
Rheinland-Pfalz			
Saarland			
Sachsen			
Sachsen-Anhalt			
Schleswig-Holstein			
Thüringen			
Deutschland			

Tabelle 2.1: Meldungen für den Winter 2017/2018

[1] Vgl. DLR Westerwald-Osteifel u. a. (Hrsg.): Bienen@Imkerei, Infobrief 2018 09 vom 18.05.18. Online unter: https://www.apis-ev.de/infobrief-bienenimkerei html [abgerufen am 11.01.19]

Boxplots sind hilfreich, um die Verteilungen der Verlustquoten von Jahr zu Jahr anschaulich darstellen zu können. In der Abbildung 2.1 ist die Verteilung der Verlustquoten nach dem Winter 2016/2017 in einem Boxplot dargestellt[2] und in Abbildung 2.2 ein unvollständiges Boxplot des Folgewinters 2017/2018.

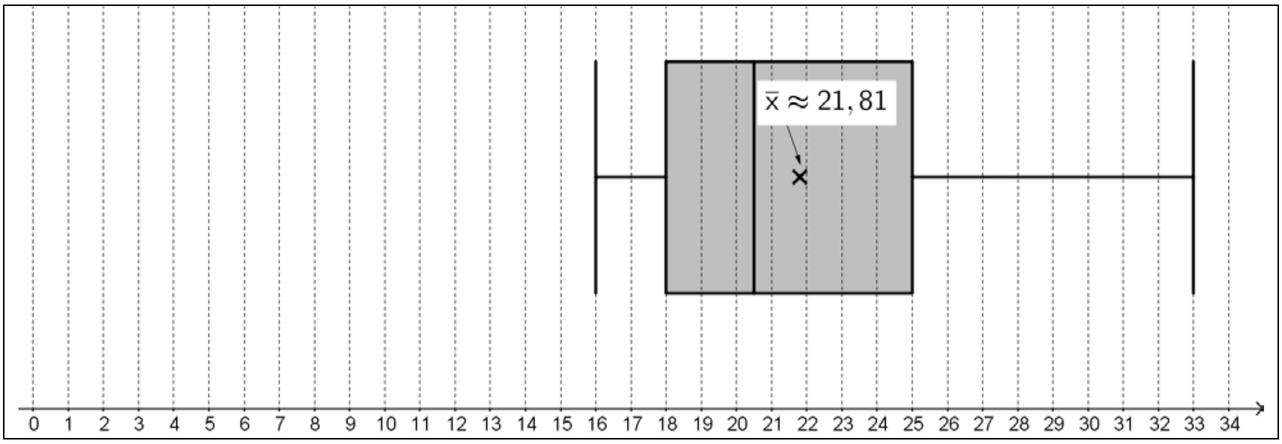

Abbildung 2.1: Verteilung der Verlustquoten nach dem Winter 2016/2017

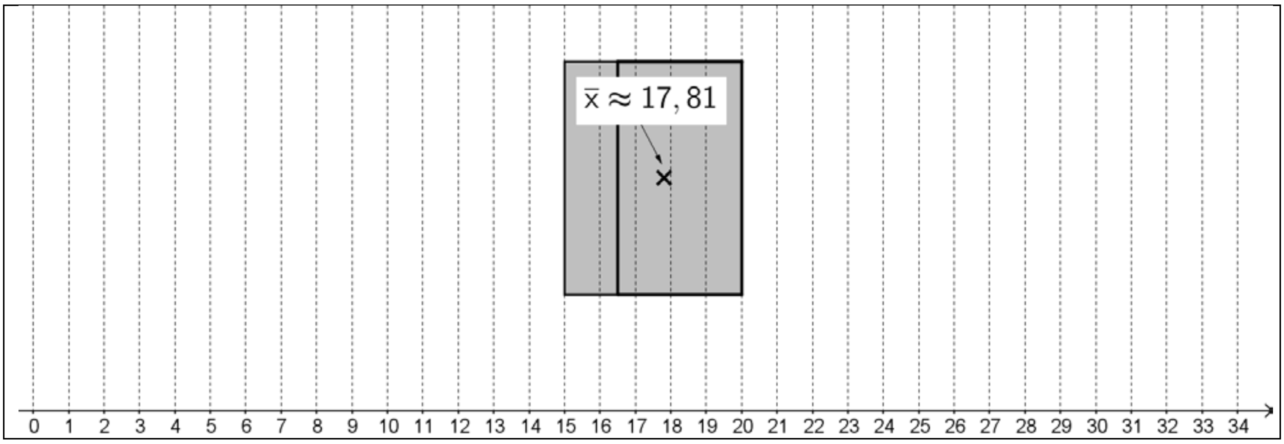

Abbildung 2.2: Verteilung der Verlustquoten nach dem Winter 2017/2018

a) Zeichnen Sie die im zweiten Boxplot (Abbildung 2.2) fehlenden Antennen ein und

vergleichen Sie exemplarisch eine statistische Kennzahl der beiden Verteilungen im Sachzusammenhang miteinander. Lesen Sie hierzu die Werte in den Abbildungen 2.1 und 2.2 ab.

Erläutern Sie, warum das arithmetische Mittel der Verlustquoten der einzelnen Bundesländer im Winter 2017/2018 mit 17,81 % von der Verlustquote in ganz Deutschland im gleichen Winter mit rund 17 % abweicht.

[2] Vgl. DLR Westerwald-Osteifel u. a. (Hrsg.): Bienen@Imkerei, Infobrief 2017 08 vom 05.05.17. Online unter: https://www.apis-ev.de/infobriefe-2017.html [abgerufen am 11.01.19]

Ein Berufsimker aus Schleswig-Holstein wintert im späten Herbst 2018 seine 500 Bienenvölker ein, um seine Verluste möglichst gering zu halten. Die Verlustwahrscheinlichkeit in seinem Landkreis liegt bei 15 %. Da er sich erhebliche Sorgen um seine Bienenvölker macht und ggf. weitere Maßnahmen zum Schutz seiner Bienen ergreifen muss, beschäftigt er sich im Vorfeld mit möglichen Szenarien sowie deren Eintrittswahrscheinlichkeiten.

b) Erläutern Sie, unter welchen Annahmen die Anzahl der Bienenvölker des Imkers, die den Winter nicht überleben, als binomialverteilte Zufallsvariable mit einer Verlustwahrscheinlichkeit von 15 % betrachtet werden kann.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X „Anzahl der Bienenvölker, die den Winter nicht überleben" dieses Imkers binomialverteilt ist.

c) Ergänzen Sie den Ausdruck in der Klammer,

geben Sie das Ergebnis des Ausdrucks näherungsweise an und

interpretieren Sie dieses im Sachzusammenhang:

$$P(\underline{\qquad\qquad}) = \binom{500}{80} \cdot 0{,}15^{80} \cdot 0{,}85^{420}$$

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass von den Bienenvölkern dieses Imkers…

- … mehr als 70 Bienenvölker sterben,
- … mindestens 40, aber weniger als 430 Bienenvölker den Winter überstehen und

vergleichen Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang miteinander.

Um seine Imkerei auch im nächsten Jahr wirtschaftlich betreiben zu können, müssen mindestens 450 der eingewinterten Bienenvölker des Berufsimkers den Winter überstehen. Gegebenenfalls müsste er sich mehr Bienenvölker als bisher anschaffen.

e) Ermitteln Sie die Anzahl der Bienenvölker, die der Berufsimker mindestens einwintern müsste, damit er im nächsten Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % wirtschaftlich arbeiten kann.

Die Hauptursache für Überwinterungsverluste des Imkers ist die sogenannte Varroa-Milbe, die aus Asien eingeschleppt wurde. Die Sterblichkeitsrate befallener Bienenvölker liegt, mit Berücksichtigung aller weiteren Umwelteinflüsse, bei 30 %.

Da alle 500 Bienenvölker des Imkers, die der Imker derzeit besitzt, befallen sind, setzt er ein neues Schädlingsbekämpfungsmittel ein. Der Hersteller dieses Mittels behauptet, dass es bei korrekter Anwendung die Sterblichkeitsrate befallener Bienenvölker senkt. Ein Mitbewerber des Herstellers hingegen sagt aus, dass die Verlustrate sogar noch steigt, da das Mittel starke Nebenwirkungen hat.

f) Geben Sie die Nullhypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 aus Sicht des Mitbewerbers an.

Eine Studie konnte die Behauptung des Mitbewerbers, dass das Mittel starke Nebenwirkungen verursacht, widerlegen. Der Imker hat mittlerweile vor dem Überwintern seine 500 befallenen Völker mit dem neuen Mittel behandelt. Auf Grundlage der Behauptung des Herstellers wurde ein Signifikanztest erstellt und ein Annahmebereich von $A = \{0; \ldots; 367\}$ ermittelt.

Die Zufallsvariable K „Anzahl der befallenen Bienenvölker, die überleben" ist $B_{500;\,0{,}7}$-verteilt.

g) Entscheiden Sie begründet, welche Art von Signifikanztest vorliegt und

ermitteln Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit (α − Fehler).

Während der Überwinterungsphase starben 134 Bienenvölker.

h) Entscheiden Sie begründet, welche Entscheidung der Imker aufgrund des Signifikanztests nach dem Winter treffen sollte und

erläutern Sie, warum auf Grundlage der Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art (β − Fehler) nicht berechnet werden kann.

Die Bienenvölker des Imkers, die den Winter überlebt haben, produzieren im Sommer reichlich Honig. Zum Abfüllen des Honigs in 500 Gramm-Gläser nutzt er eine vollautomatische Abfüllanlage, die mit einem Erwartungswert von $\mu = 500$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 5$ arbeitet. Die Füllmenge in Gramm (g) ist normalverteilt.

Liegt die Füllmenge eines Glases unter 495 Gramm, aber noch bei wenigstens 490 Gramm, so kann der Imker dieses für einen Euro weniger als üblich an seinen Händler als 2. Wahl verkaufen. Ein Glas Honig (1. Wahl) nimmt der Händler dem Imker zu 5,00 Euro ab. Gläser mit Füllmengen von unter 490 Gramm kann der Imker bis zu einer Füllmenge von 485 g in seinem Hofladen für 3,00 Euro verkaufen. Gläser mit geringeren Füllmengen verbraucht er selbst.

i) Ermitteln Sie den langfristig zu erwartenden Erlös pro Glas.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3:** Windkraftanlage

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	6	6	6	6	4	6	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Schülerinnen und Schüler des Technik-Kurses „Erneuerbare Energien“ eines Beruflichen Gymnasiums beschäftigen sich mit der Energiegewinnung durch Windenergieanlagen.

Windenergieanlagen (Abbildung 3.1) wandeln die Energie des Windes in elektrische Energie um. Die generierte elektrische Energie hängt von den Eckdaten der Anlage und den örtlichen Gegebenheiten, insbesondere der aktuellen Windgeschwindigkeit ab.

Abbildung 3.1

Zunächst interessieren sich die Schülerinnen und Schüler für die von der Anlage generierte elektrische Energie. Sie betrachten dafür beispielhaft den Verlauf der momentanen Änderungsrate der generierten Energie (Leistungsverlauf) der Windenergieanlage WRS 24 an einem windreichen Wochentag im Herbst. Sie stellen diesen Verlauf in Abbildung 3.2 für $3 \leq t \leq 24$ graphisch dar.

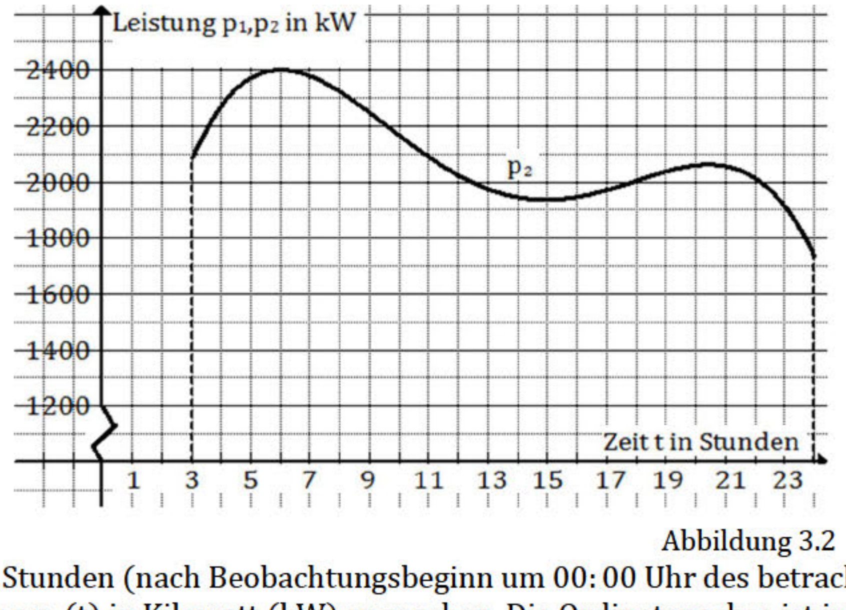

Abbildung 3.2

Die Zeit t ist in Stunden (nach Beobachtungsbeginn um 00: 00 Uhr des betrachteten Tages) und die Leistung $p_2(t)$ in Kilowatt (kW) angegeben. Die Ordinatenachse ist im Bereich bis 1 200 kW gestaucht.

a) Erläutern Sie im Sachzusammenhang zwei Aspekte des in Abbildung 3.2 dargestellten Leistungsverlaufs p_2 und

begründen Sie, warum die Modellierung dieses Abschnittes durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades nicht möglich ist.

Die Schülergruppe modelliert den gesamten Leistungsverlauf dieses Tages durch die folgende, unvollständig abgebildete, abschnittsweise definierte Funktion p mit der Gleichung:

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) & \text{für } 0 \leq t < 3 \\ -\frac{49}{500} \cdot t^4 + \frac{27}{5} \cdot t^3 - 101 \cdot t^2 + 715 \cdot t + 700 & \text{für } 3 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Aus den Aufzeichnungen über die Anlage ergibt sich, dass die Leistung an diesem Tag von 00:00 Uhr bis 03:00 Uhr annähernd linear angestiegen ist und sprung- und knickfrei in den zweiten Abschnitt übergeht.

b) Leiten Sie die fehlende Gleichung des ersten Funktionsabschnittes p_1 her und ergänzen Sie den Graphen von p_1 in Abbildung 3.2.

Die Gruppe möchte exemplarisch die gesamte an diesem Tag generierte elektrische Energie in Kilowattstunden (kWh) berechnen.

Susanne vermutet, dass die über einem Zeitraum $[0; t_1]$ generierte elektrische Energie durch das bestimmte Integral

$$\int_0^{t_1} p(t)dt$$

berechnet werden kann.

Tim hat gelesen, dass die generierte Energie über diesem Zeitraum auch als Produkt aus der Leistung $p(t_1)$ und der Zeit t_1 bestimmt werden kann.

c) Begründen Sie, warum Tims Ansatz in diesem Fall ungeeignet ist.

Ermitteln Sie mit Susannes Ansatz näherungsweise die an diesem Tag insgesamt generierte elektrische Energie. Gehen Sie dabei davon aus, dass im Zeitraum von 00:00 Uhr bis 03:00 Uhr ca. 5 123 kWh elektrische Energie generiert wurde.

Im Verlauf ihrer Analyse untersucht die Schülergruppe bei einer konstanten Windgeschwindigkeit von $10\,\frac{m}{s}$ die Drehbewegung eines der Rotorblätter der Windenergieanlage WRS 24 (Abbildung 3.3). Sie möchten den Höhenverlauf der Rotorspitze A in Metern (m) über dem Fußpunkt der Anlage in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten (min) durch eine modifizierte trigonometrische Funktion h_A der Form

$$h_A(t) = a \cdot \sin\big(b \cdot (t + c)\big) + d$$

modellieren.

Anhand der Zeichnung in Abbildung 3.3 und den in Abbildung 3.4 gegebenen Eckdaten erstellen sie die Gleichung der Funktion h_A mit

$$h_A(t) = 58{,}5 \cdot \sin\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{48}\right)\right) + 141{,}5$$

Zu Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ ist das Rotorblatt mit der Spitze A nach oben gerichtet.

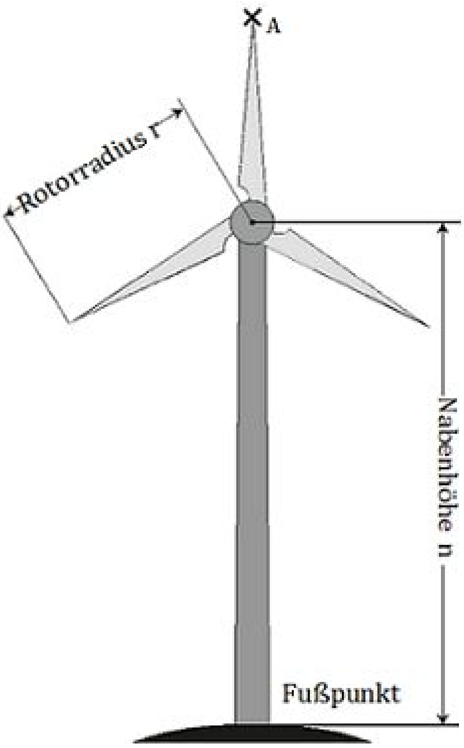

Abbildung 3.3

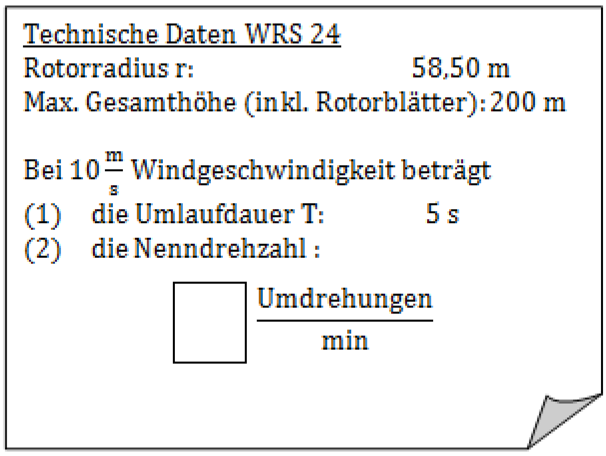

Abbildung 3.4

d) Zeigen Sie, dass der gesuchte Höhenverlauf der Rotorspitze A durch die Funktion h_A modelliert werden kann.

Ergänzen Sie die Nenndrehzahl (die Anzahl der Umdrehungen pro Minute) in Abbildung 3.4.

Die Gruppe diskutiert u. a. über die Bedeutung der Wendestellen des Höhenverlaufs der Rotorspitze.

e) Ermitteln Sie die Wendestelle (in Sekunden) des Höhenverlaufs h_A für $0 \le t \le \frac{1}{20}$ und bestimmen Sie die zugehörige Steigung in $\frac{km}{h}$.

Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung dieser Stelle und der zugehörigen Steigung.

Eine Schülerin vermutet, dass der Höhenverlauf der Spitze A auch durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -58{,}5 \cdot \sin\left(24\pi \cdot \left(t + \frac{1}{16}\right)\right) + 141{,}5$$

modelliert werden kann.

f) Prüfen Sie diese Vermutung, indem Sie beschreiben, durch welche Verschiebungen und Spiegelungen der Graph von g aus dem Graphen von h_A hervorgeht.

Ein Schüler behauptet, dass der betrachtete Höhenverlauf für $0 \leq t \leq \frac{1}{48}$ auch hinreichend genau durch eine quadratische Funktion q mit der Gleichung

$$q(t) = 200 - 16\,848 \cdot \pi^2\, t^2$$

angenähert werden kann und daher auf die Modellierung mit trigonometrischen Funktionen verzichtet werden kann.

g) Zeigen Sie, dass die maximale Abweichung der Ordinatenwerte der beiden Funktionen q und h_A am Rand des Intervalls bei $t = \frac{1}{48}$ erreicht wird und

   bestimmen Sie die rechte Intervallgrenze t_m des Intervalls $[0; t_m]$, in dem die Abweichung vom tatsächlichen Wert bei maximal 5 % liegt.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Gärung**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	Gesamt
Erreichbar	7	6	5	6	4	6	6	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Einer der Höhepunkte der diesjährigen Projektwoche des Biologietechnik-Kurses eines beruflichen Gymnasiums ist der Besuch einer bekannten Brauerei in Flensburg. Zur Vorbereitung beschäftigt sich der Kurs mit einigen Aspekten des Bierbrauens.
Eine Schülergruppe analysiert beispielhaft den Gärungsprozess während eines Brauvorganges. Zu Beginn der Gärung wird der abgekühlten flüssigen Würze eine bestimmte Menge Hefezellen zugesetzt. Die Hefezellen entziehen der Würze Inhaltsstoffe und vermehren sich zunächst. Die Würze wird so vergoren und es entsteht u. a. Alkohol.

Unter optimalen Laborbedingungen kann der Bestand h der Hefezellen pro Milliliter Würze abhängig von der Gärdauer t durch die Funktion h mit

$$h(t) = -140 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t - 0{,}7} - 0{,}3 \cdot t^2 + 94 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 10$$

modelliert werden (e ist die Eulersche Zahl). Die Gärdauer t ist in Tagen nach Zugabe der Hefezellen ($t = 0$) und der Bestand h der Hefezellen in Millionen Zellen pro Milliliter Würze $\left(\text{Millionen } \frac{\text{Zellen}}{\text{ml}}\right)$ angegeben.

Die Gruppe diskutiert über den Verlauf des Graphen der 1. Ableitung h′ und hat zunächst den Graphen von h dargestellt (Abbildung 3.1).

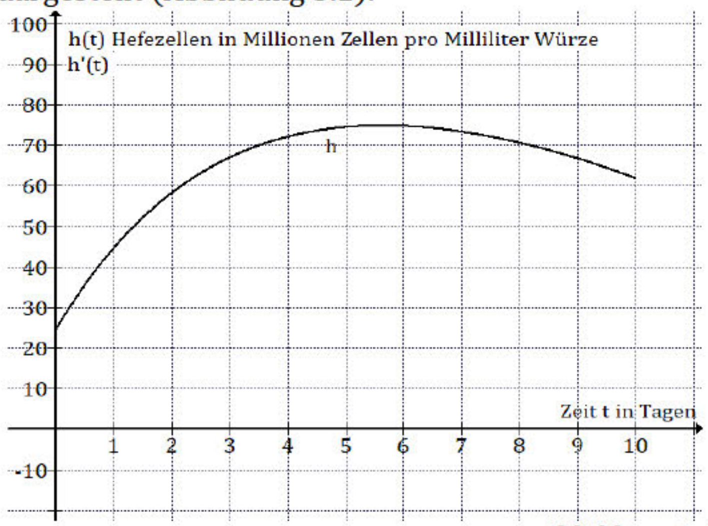

Abbildung 3.1

a) Skizzieren Sie den Graphen der ersten Ableitung h′ in das gegebene Koordinatensystem (Abbildung 3.1) und

geben Sie die Einheit von h′(t) an.

Erläutern Sie im Sachzusammenhang zwei Aspekte des Verlaufs des Graphen der 1. Ableitung h′.

Eine Schülerin möchte den zeitlichen Verlauf des Hefebestandes beschreiben. Sie überlegt, ob der Hefebestand

(1) in den ersten vier Tagen durchschnittlich um etwa 12 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag $\left(\text{Millionen } \frac{\text{Zellen}}{\text{ml}\cdot\text{Tag}}\right)$ ansteigt und

(2) mit höchstens 4 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag abnimmt.

b) Beurteilen Sie diese beiden Aussagen.

Tim, ein besonders interessierter Schüler des Kurses, behauptet, dass bereits aus der Graphik (Abbildung 3.1) abgelesen werden kann, dass die Gleichung

$$h''(t) = 0$$

in dem vorgegebenen Intervall nicht lösbar ist.

c) Begründen Sie anhand der Graphik, warum die Gleichung

$$h''(t) = 0 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 10$$

nicht lösbar ist und

beweisen Sie diese Unlösbarkeit.

Während der Betriebsbesichtigung berichtet der Braumeister, dass sich im Verlauf der Gärung immer mehr Hefezellen am Boden des Gärgefäßes absetzen. Diese Zellen werden nach Erreichen des höchsten Hefebestandes und vor Ende der Gärung abgeschöpft („geerntet“). Der optimale Zeitpunkt dieser „Hefeernte“ ist erreicht, wenn ein Hefebestand von 70 Millionen Zellen pro Milliliter Würze unterschritten wird.

Ein Schüler möchte vom Braumeister wissen, wie viele Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes diese Hefeernte beginnt.

d) Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes die Hefeernte beginnt.

Der Braumeister berichtet, dass der Hefebestand und damit die Qualität des Bieres durch die Sauerstoffzufuhr beeinflusst werden kann. Der Grad der Sauerstoffzufuhr wird im folgenden durch den Parameter a beschrieben.

In Abhängigkeit von diesem Parameter kann der Bestand der Hefezellen in Millionen Zellen pro Milliliter Würze abhängig von der Gärdauer t in Tagen durch die Funktionsschar h_a mit der Gleichung

$$h_a(t) = -140 \cdot e^{-0{,}35 \cdot a \cdot t - 0{,}7} - 0{,}3 \cdot t^2 + 94$$

$$\text{mit } 0 \leq t \leq 10 \text{ und } 0{,}5 \leq a \leq 1\text{ ; (e ist die Eulersche Zahl)}$$

modelliert werden.

Der Braumeister behauptet, dass sich die Vermehrungsgeschwindigkeit $\left(\text{Millionen } \frac{\text{Zellen}}{\text{ml}\cdot\text{Tag}}\right)$ der Hefezellen zu Beginn $(t = 0)$ proportional zu a verändert.

e) Leiten Sie die Gleichung der Vermehrungsgeschwindigkeit v_a her und

weisen Sie nach, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ die Vermehrungsgeschwindigkeit proportional zu a verändert.

Bei der Besichtigung können die Schülerinnen und Schüler auch die Gärkammer besichtigen. In der Gärkammer befinden sich die zylindrokonischen Tanks, in denen der Gärprozess stattfindet. Diese zylinderförmigen Stahltanks laufen unten kegelförmig zu (vgl. Abbidung 3.2).

Abbildung 3.3 zeigt den um 90° im Uhrzeigersinn gedrehten Querschnitt eines solchen Tanks, also den liegenden Tank. Das maximale Füllvolumen beträgt ca. 63 % des gesamten Volumens des Tanks.

Damit der Tank zügig entleert werden kann, muss der Öffnungswinkel des Kegels mindestens 120° betragen.

Ein Schüler modelliert das obere Profil des liegenden Tanks durch die folgende abschnittsweise definierte Funktion p mit der Gleichung

$$p(x) = \begin{cases} 1{,}75 \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1{,}2 \\ 2{,}1 & \text{für} \quad 1{,}2 < x \leq 11{,}15 \end{cases}$$

Dabei gibt x die Höhe des Tanks und p(x) den Radius des Tanks jeweils in Metern (m) an.

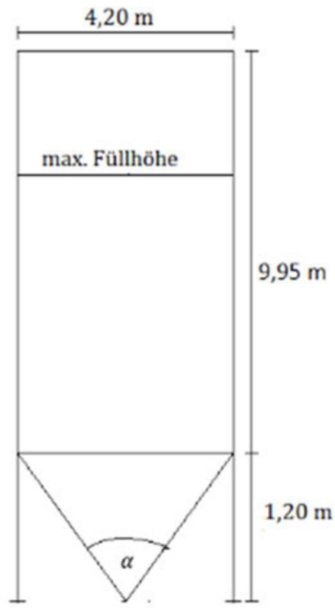

Abbildung 3.2 (nicht maßstabsgetreu)

f) Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und deren Beschriftung in Abbildung 3.3 und

zeigen Sie, dass das obere Profil durch den Graphen von p modelliert werden kann.

Berechnen Sie den Öffnungswinkel α des Kegels.

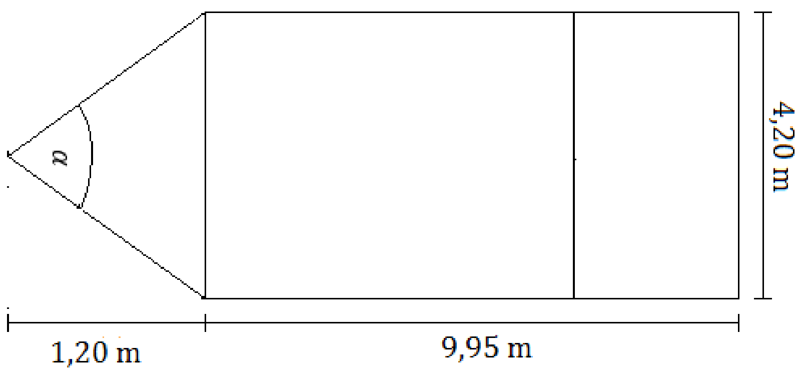

Abbildung 3.3 (nicht maßstabsgetreu)

Zur näherungsweisen Berechnung des Füllvolumens des Tanks in Abhängigkeit von der Füllhöhe x stellen die Schüler die folgende Gleichung auf:

$$V(x) = \pi \cdot (4{,}41 \cdot x - 3{,}528) \quad \text{für} \quad 1{,}2 \leq x \leq 11{,}15$$

Die Höhenangabe x ist in Metern (m) und das Volumen V(x) in Kubikmetern (m^3) angegeben.

g) Begründen Sie, dass das Füllvolumen mit der gegebenen Gleichung ermittelt werden kann und

bestimmen Sie, bis zu welcher Füllgrenze der Tank befüllt werden kann, damit das maximale Füllvolumen von ca. 63 % des gesamten Volumens nicht überschritten wird.