Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1).

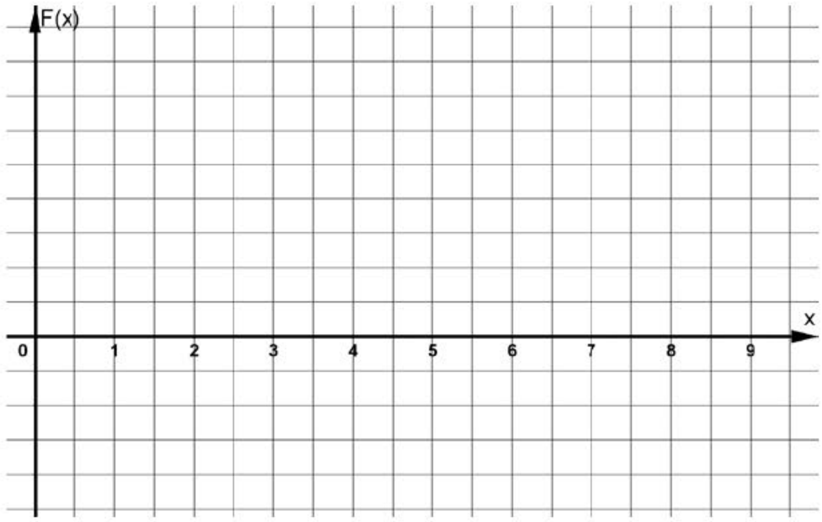


Abbildung 1.1

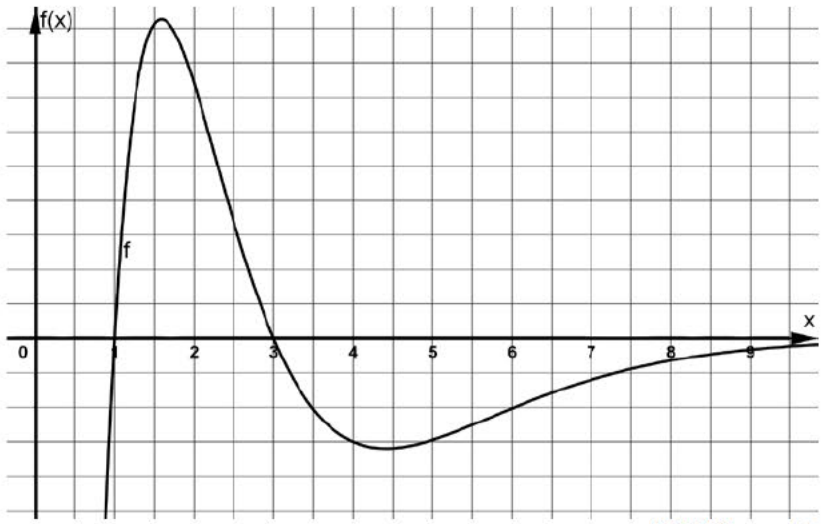


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f_b mit

$$f_b(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

b1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat.

b2) Berechnen Sie den Wert für den Parameter b so, dass der Graph der Funktion f_b mit der Abszissenachse insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Gegeben sind die Funktionen $f_{a;b}$ und $g_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + a \qquad \text{mit } a, b \neq 0$$
$$g_{a;b}(x) = a \cdot \cos(-b \cdot x) + a \qquad \text{mit } a, b \neq 0$$

c1) Bestimmen Sie einen Term für alle Nullstellen von $f_{a;b}$.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Für alle x gilt: Wenn $a < 0$, dann gilt $f_{a;b}(x) < 0$.		
Es gilt: $g_{a;b}(x) = f_{a;b}(x)$ für alle x.		

d) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)^2$$

d1) Erläutern Sie, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden.

d2) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt.

d3) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

e) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

e1) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal zueinander sind.

e2) Berechnen Sie den Betrag von $\vec{c}$ und

geben Sie die geometrische Interpretation sowohl für das Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ als auch für den Betrag von $\vec{c}$ an.

f) Gegeben sind die drei Punkte $A(-2 \mid 1 \mid 4)$, $B(3 \mid b \mid -1)$ und $C(8 \mid 7 \mid -6)$ sowie die Ebene E: $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = 5$

f1) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Für $b = 4$ liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B.	
Die Gerade durch A und C ist orthogonal zur Ebene E.	

f2) Bestimmen Sie den Parameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.

g) Gegeben sind die beiden Ebenen E_1 und E_2 sowie die Gerade g mit den Gleichungen:

$$E_1\colon 15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 30$$

$$E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ -1 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

g1) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E_1.

g2) Beschreiben Sie ein rechnerisches Verfahren, das angewendet werden kann, um zu zeigen, dass die Gerade g in der Ebene E_2 liegt.

h) Gegeben ist ein Pyramidenstumpf quadratischer Grundfläche mit der Höhe z mit $z > 0$ und den Punkten $A(7 \mid 3 \mid 0)$, $B(4 \mid -6 \mid 0)$, $D(-2 \mid 6 \mid 0)$, $F(3 \mid -4 \mid z)$ sowie $H(-1 \mid 4 \mid z)$. In Abbildung 1.3 ist ein Pyramidenstumpf zu einem vorgegebenen Wert z abgebildet:

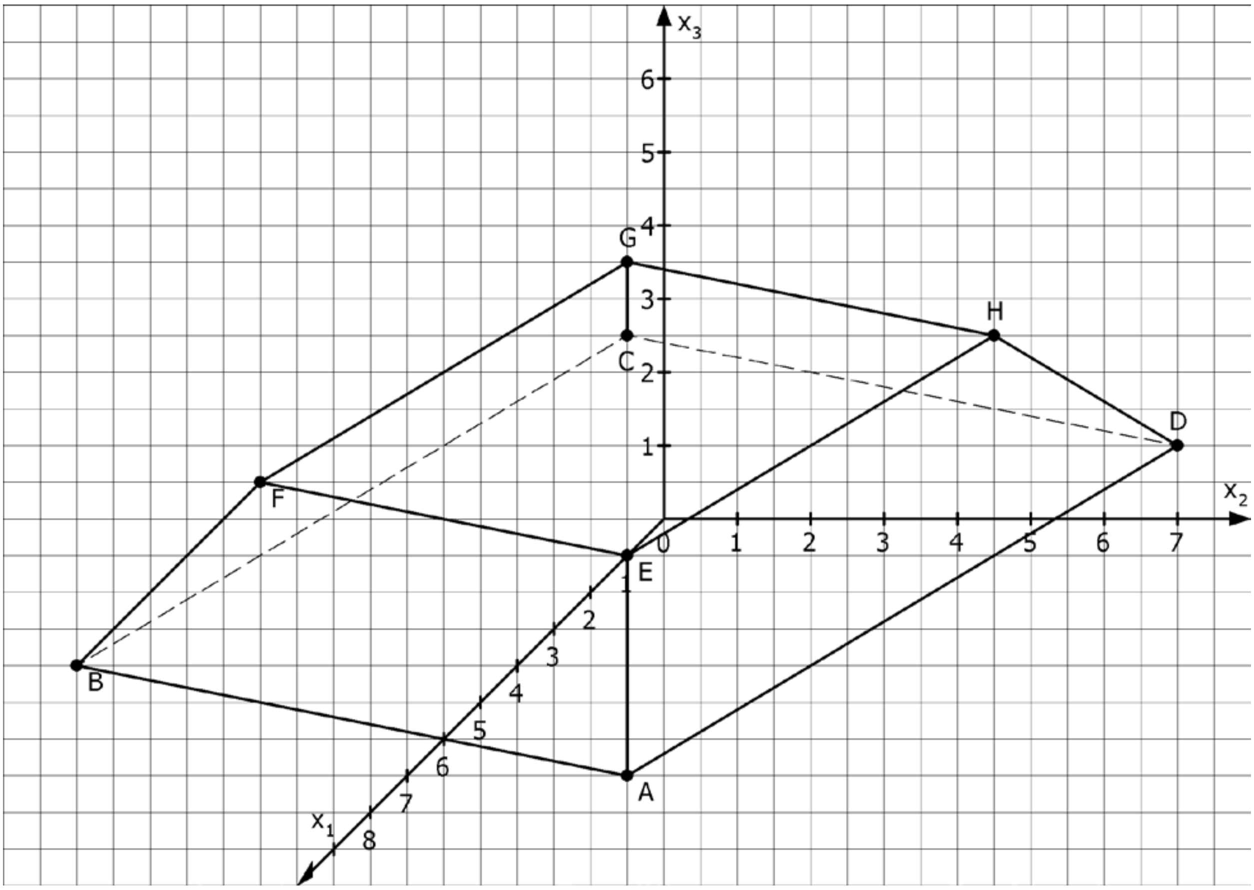


Abbildung 1.3

h1) Zeichnen Sie die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abbildung 1.3 ein.

Weisen Sie nach, dass die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abhängigkeit von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Koordinaten $S(1 \mid 0 \mid 3z)$ hat.

h2) Zeigen Sie, dass unabhängig von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Flächeninhalte der Quadrate ABCD und EFGH im Verhältnis $9 : 4$ stehen.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Analytische Geometrie): **Miniatur-Autorennen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	4	6	4	6*	6*	6*	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Der Veranstalter eines Miniatur-Autorennens feiert 20-jähriges Jubiläum. Seit 20 Jahren wird zum Start der Autos dieselbe Startrampe in Form eines Trapezes genutzt, die als schiefe Ebene auf Stützpfeilern aufgestellt wird. Neu im Team des Veranstalters ist ein ambitionierter Ingenieur, der angeboten hat, sich das Rennen unter mathematischen Aspekten anzusehen und zu prüfen, ob es Verbesserungsmöglichkeiten für die Startanlage gibt. Dazu legt er das Trapez so in ein dreidimensionales Koordinatensystem, dass drei Ecken wie folgt festgelegt werden: $A(-45 \mid 17 \mid 0)$, $B(35 \mid 17 \mid 0)$ und $C(10 \mid 3 \mid 7)$ (vgl. Abbildung 2.1).

Alle Längen sind in Zentimeter angegeben. Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

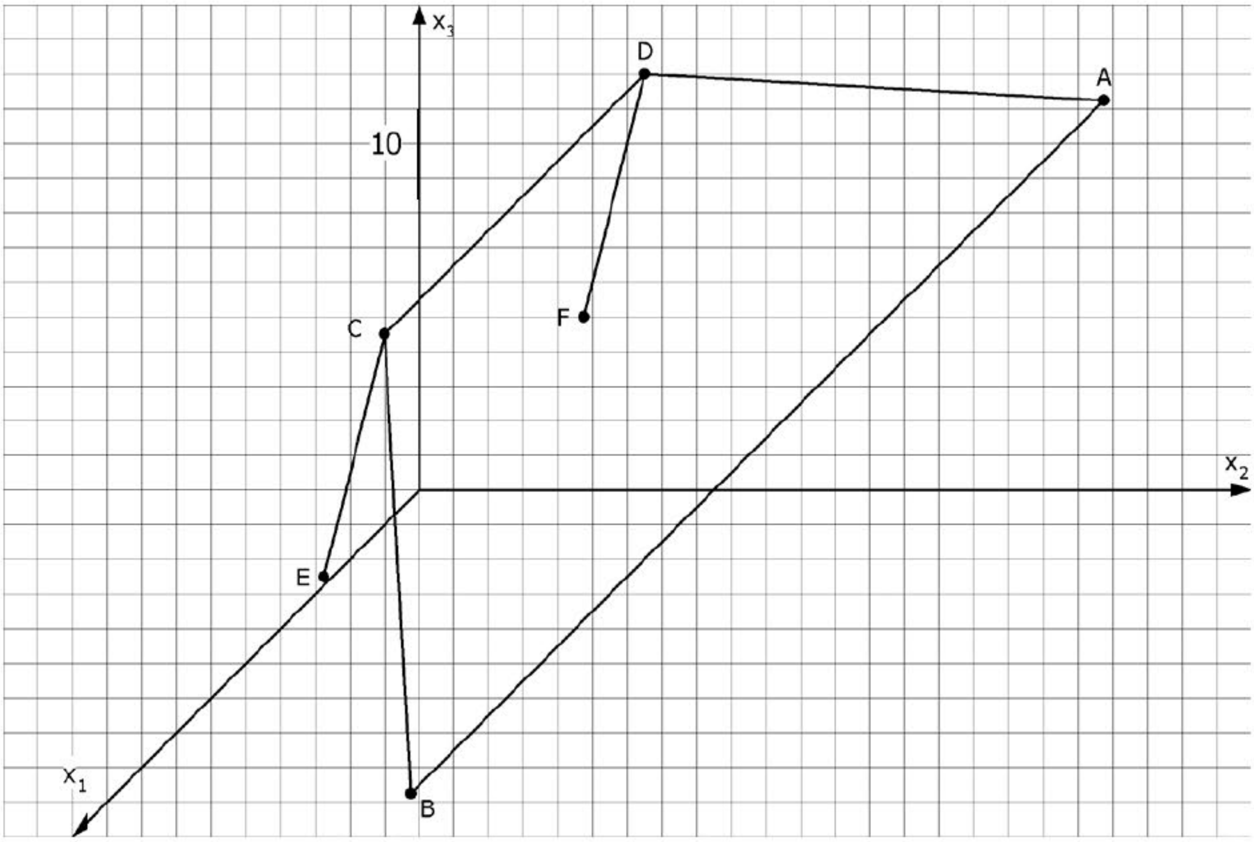


Abbildung 2.1

a) Weisen Sie nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Punkts D, der das Dreieck durch die Punkte A, B und C zu einem gleichschenkligen Trapez ABCD ergänzt.

In der Abbildung 2.1 fehlt die Skalierung der x_1-Achse und der x_2-Achse. Von der x_3-Achse ist bekannt, dass dort 1 Kästchen die Einheit 1 hat, also einem Wert von einem Zentimeter in der Realität entspricht.

c) Ergänzen Sie begründet die fehlenden Skalierungen der Achsen in Abbildung 2.1 durch jeweils drei Zahlenwerte auf der x_1-Achse und der x_2-Achse.

Das erste Miniatur-Auto mit dem Namen „Tiger“ startet vom Startpunkt $S(-5|\ 3\ |\ 7)$, dem Mittelpunkt des oberen Randes der Startrampe, fährt geradlinig bis zur Mitte des unteren Randes der Startrampe und verlässt die schiefe Ebene dort. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Bewegung idealisiert als Bewegung des Auto-Mittelpunkts beschrieben werden kann, obwohl ein Miniatur-Auto eine Breite von 4 cm hat.

d) Erstellen Sie für die Fahrbahn des Miniatur-Autos „Tiger“ auf der schiefen Ebene eine Geradengleichung der Form

$$g : \vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{u}\,,$$

geben Sie das Intervall an, in dem der Parameter r liegen muss, und

zeichnen Sie den Verlauf der Geraden g in das Koordinatensystem in Abbildung 2.1 ein.

Beim Verlassen der schiefen Ebene führt ein Ruck zu einer leicht versetzen Fahrt, so dass „Tiger“ den Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält. Die Fahrbahn von „Tiger“ lässt sich dann beschreiben durch die Gerade f mit

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 23{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le t \le 5.$$

Dabei gibt der Parameter t die Zeit in Sekunden an.

e) Berechnen Sie die Länge des Richtungsvektors von f und

interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Nach Verlassen der Rampe sind auf der Fahrbahn zylindrische Pfosten mit einem Durchmesser von 20 mm aufgebaut. Der Mittelpunkt eines Pfostens befindet sich im Punkt P mit P(4,3 | 39 | 0).

Der Ingenieur behauptet, dass für den notwendigen Abstand zwischen einem beliebigen Pfosten im Punkt $R(r_1 \mid r_2 \mid 0)$ und der Fahrbahn f des Miniatur-Autos „Tiger" in Abhängigkeit vom Punkt R und der Zeit t die folgende Ungleichung erfüllt sein muss:

$$3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 3 - 10t)^2 + (r_2 - 23{,}8 - 34t)^2}$$

f) Leiten Sie den Term auf der rechten Seite der angegebenen Ungleichung her und interpretieren Sie den Wert 3,0.

g) Untersuchen Sie, ob „Tiger" an dem Pfosten im Punkt P vorbeifahren kann.

Dem Ingenieur ist der oben genannte Ruck beim Übergang von der schiefen Ebene in die x_1-x_2-Ebene aufgefallen. Dieser Ruck sollte möglichst minimal sein. Durch Experimente mit Miniatur-Autos kommt er zu dem Schluss, dass die Neigung der Startrampe nicht größer als 15° sein sollte.

h) Ermitteln Sie näherungsweise die Höhe h, die die obere Kante der Startrampe haben sollte, damit eine Neigung von 15° erreicht wird.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 B:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, … $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, … $\in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1).

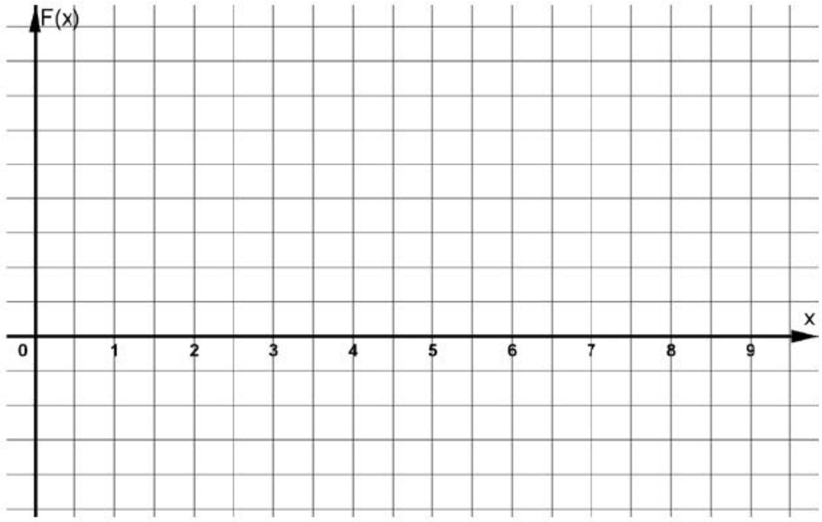


Abbildung 1.1

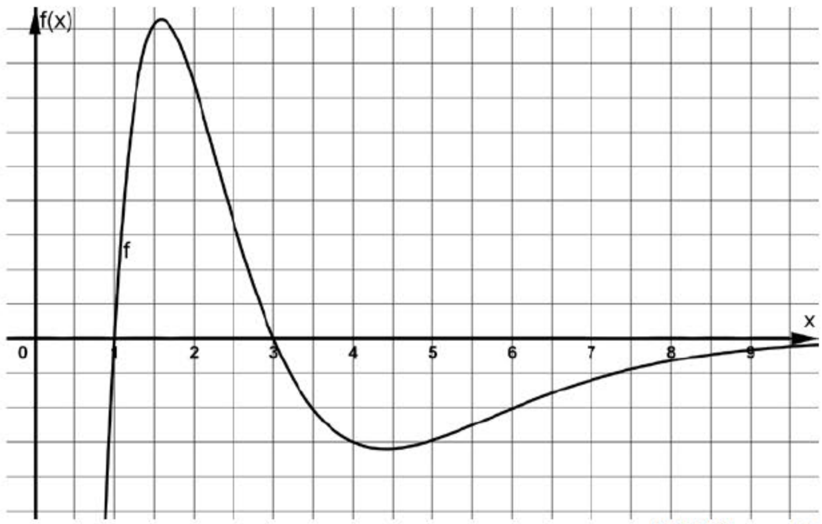


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wende-punkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f_b mit

$$f_b(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

b1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat.

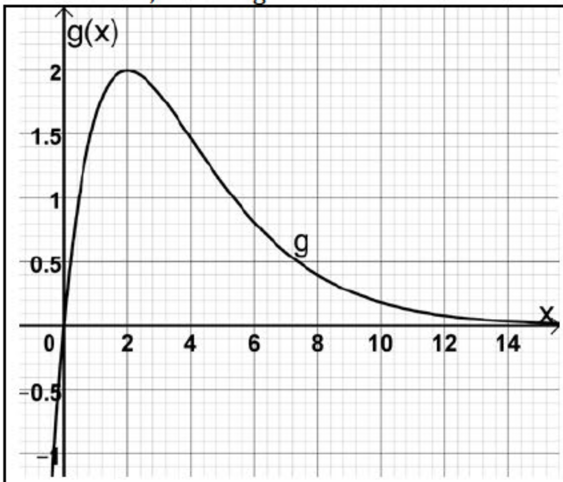
b2) Berechnen Sie den Wert für den Parameter b so, dass der Graph der Funktion f_b mit der Abszissenachse insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f_k mit

$$f_k(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x} \quad \text{mit } k > 0 \text{ und e ist die Eulersche Zahl.}$$

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
 Der nebenstehende Graph g stellt die Funktion f_k mit $k = 0{,}5$ dar.		
Es gilt: $f_k''(x) = e^{-k \cdot x} \cdot 2 \cdot k^2 \cdot \left(x - \frac{2}{k}\right)$ Also gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x > \frac{2}{k}$.		

d) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x-4)^2$$

d1) Erläutern Sie, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden.

d2) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt.

d3) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

e) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

e1) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal zueinander sind.

e2) Berechnen Sie den Betrag von $\vec{c}$ und

geben Sie die geometrische Interpretation sowohl für das Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ als auch für den Betrag von $\vec{c}$ an.

f) Gegeben sind die drei Punkte $A(-2 \mid 1 \mid 4)$, $B(3 \mid b \mid -1)$ und $C(8 \mid 7 \mid -6)$ sowie die Ebene E: $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = 5$

f1) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Für $b = 4$ liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B.	
Die Gerade durch A und C ist orthogonal zur Ebene E.	

f2) Bestimmen Sie den Parameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.

g) Gegeben sind die beiden Ebenen E_1 und E_2 sowie die Gerade g mit den Gleichungen:

$$E_1: 15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 30$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ -1 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

g1) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E_1.

g2) Beschreiben Sie ein rechnerisches Verfahren, das angewendet werden kann, um zu zeigen, dass die Gerade g in der Ebene E_2 liegt.

h) Gegeben ist ein Pyramidenstumpf quadratischer Grundfläche mit der Höhe z mit $z > 0$ und den Punkten $A(7 \mid 3 \mid 0)$, $B(4 \mid -6 \mid 0)$, $D(-2 \mid 6 \mid 0)$, $F(3 \mid -4 \mid z)$ sowie $H(-1 \mid 4 \mid z)$. In Abbildung 1.3 ist ein Pyramidenstumpf zu einem vorgegebenen Wert z abgebildet:

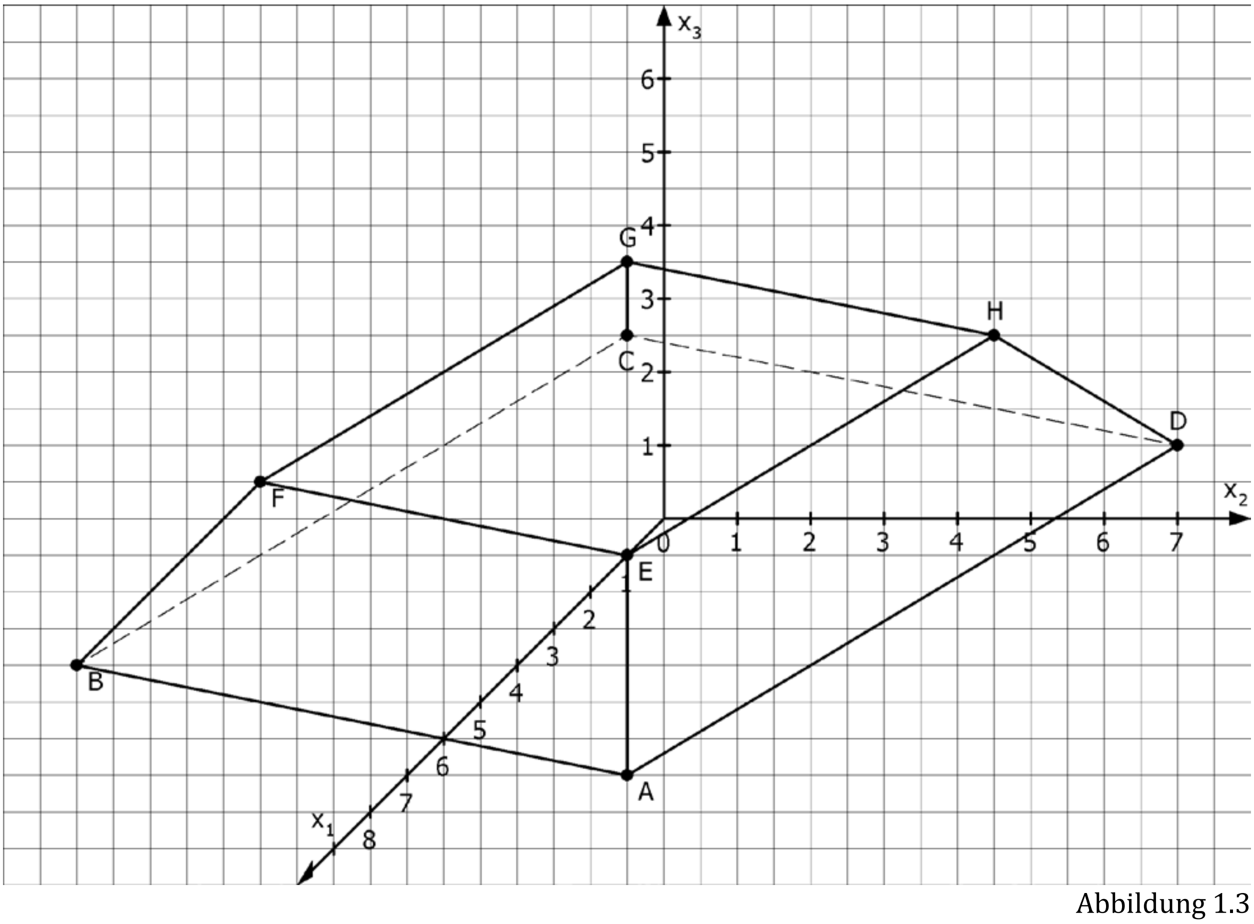


Abbildung 1.3

h1) Zeichnen Sie die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abbildung 1.3 ein.

Weisen Sie nach, dass die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abhängigkeit von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Koordinaten $S(1 \mid 0 \mid 3z)$ hat.

h2) Zeigen Sie, dass unabhängig von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Flächeninhalte der Quadrate ABCD und EFGH im Verhältnis $9 : 4$ stehen.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Analytische Geometrie): **Miniatur-Autorennen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	4	6	4	6*	6*	6*	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Der Veranstalter eines Miniatur-Autorennens feiert 20-jähriges Jubiläum. Seit 20 Jahren wird zum Start der Autos dieselbe Startrampe in Form eines Trapezes genutzt, die als schiefe Ebene auf Stützpfeilern aufgestellt wird. Neu im Team des Veranstalters ist ein ambitionierter Ingenieur, der angeboten hat, sich das Rennen unter mathematischen Aspekten anzusehen und zu prüfen, ob es Verbesserungsmöglichkeiten für die Startanlage gibt. Dazu legt er das Trapez so in ein dreidimensionales Koordinatensystem, dass drei Ecken wie folgt festgelegt werden: $A(-45|\,17\,|\,0)$, $B(35|\,17\,|\,0)$ und $C(10|\,3\,|\,7)$ (vgl. Abbildung 2.1).

Alle Längen sind in Zentimeter angegeben. Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

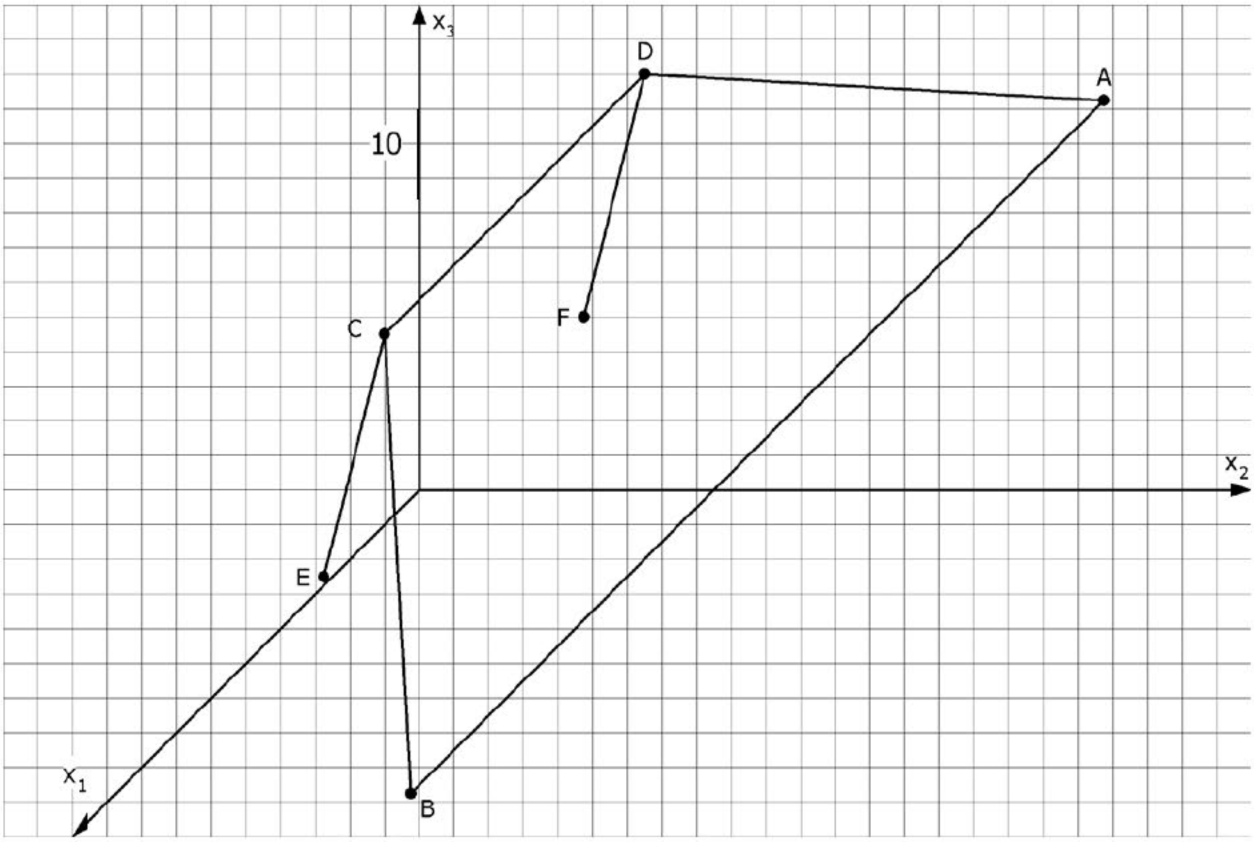


Abbildung 2.1

a) Weisen Sie nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Punkts D, der das Dreieck durch die Punkte A, B und C zu einem gleichschenkligen Trapez ABCD ergänzt.

In der Abbildung 2.1 fehlt die Skalierung der x_1-Achse und der x_2-Achse. Von der x_3-Achse ist bekannt, dass dort 1 Kästchen die Einheit 1 hat, also einem Wert von einem Zentimeter in der Realität entspricht.

c) Ergänzen Sie begründet die fehlenden Skalierungen der Achsen in Abbildung 2.1 durch jeweils drei Zahlenwerte auf der x_1-Achse und der x_2-Achse.

Das erste Miniatur-Auto mit dem Namen „Tiger“ startet vom Startpunkt $S(-5|\,3\,|\,7)$, dem Mittelpunkt des oberen Randes der Startrampe, fährt geradlinig bis zur Mitte des unteren Randes der Startrampe und verlässt die schiefe Ebene dort. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Bewegung idealisiert als Bewegung des Auto-Mittelpunkts beschrieben werden kann, obwohl ein Miniatur-Auto eine Breite von 4 cm hat.

d) Erstellen Sie für die Fahrbahn des Miniatur-Autos „Tiger“ auf der schiefen Ebene eine Geradengleichung der Form

$$g : \vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{u}\,,$$

geben Sie das Intervall an, in dem der Parameter r liegen muss, und

zeichnen Sie den Verlauf der Geraden g in das Koordinatensystem in Abbildung 2.1 ein.

Beim Verlassen der schiefen Ebene führt ein Ruck zu einer leicht versetzen Fahrt, so dass „Tiger“ den Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält. Die Fahrbahn von „Tiger“ lässt sich dann beschreiben durch die Gerade f mit

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 23{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 5.$$

Dabei gibt der Parameter t die Zeit in Sekunden an.

e) Berechnen Sie die Länge des Richtungsvektors von f und

interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Nach Verlassen der Rampe sind auf der Fahrbahn zylindrische Pfosten mit einem Durchmesser von 20 mm aufgebaut. Der Mittelpunkt eines Pfostens befindet sich im Punkt P mit $P(4{,}3 \mid 39 \mid 0)$.

Der Ingenieur behauptet, dass für den notwendigen Abstand zwischen einem beliebigen Pfosten im Punkt $R(r_1 \mid r_2 \mid 0)$ und der Fahrbahn f des Miniatur-Autos „Tiger“ in Abhängigkeit vom Punkt R und der Zeit t die folgende Ungleichung erfüllt sein muss:

$$3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 3 - 10t)^2 + (r_2 - 23{,}8 - 34t)^2}$$

f) Leiten Sie den Term auf der rechten Seite der angegebenen Ungleichung her und interpretieren Sie den Wert 3,0.

g) Untersuchen Sie, ob „Tiger“ an dem Pfosten im Punkt P vorbeifahren kann.

Dem Ingenieur ist der oben genannte Ruck beim Übergang von der schiefen Ebene in die x_1-x_2-Ebene aufgefallen. Dieser Ruck sollte möglichst minimal sein. Durch Experimente mit Miniatur-Autos kommt er zu dem Schluss, dass die Neigung der Startrampe nicht größer als 15° sein sollte.

h) Ermitteln Sie näherungsweise die Höhe h, die die obere Kante der Startrampe haben sollte, damit eine Neigung von 15° erreicht wird.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra)**:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1).

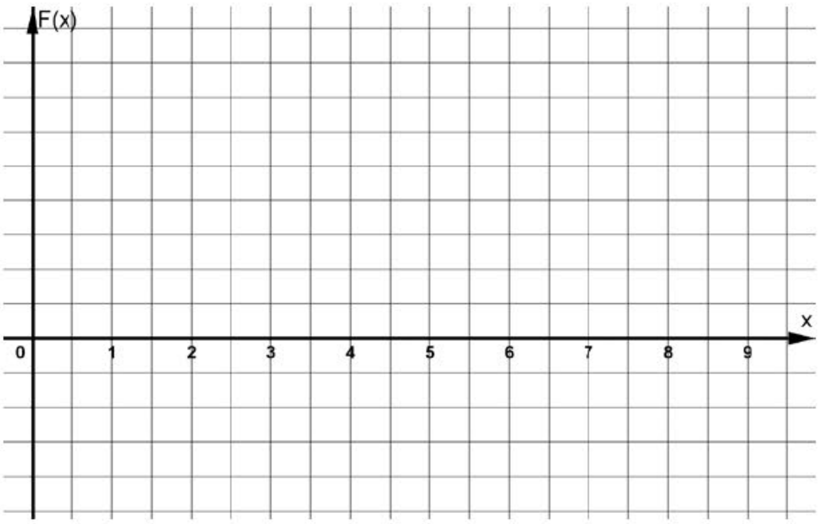


Abbildung 1.1

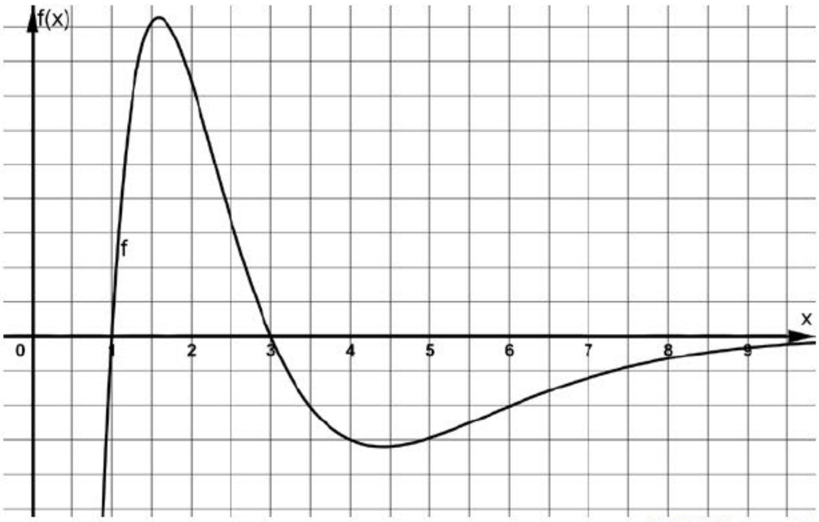


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f_b mit

$$f_b(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

b1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat.

b2) Berechnen Sie den Wert für den Parameter b so, dass der Graph der Funktion f_b mit der Abszissenachse insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Gegeben sind die Funktionen $f_{a;b}$ und $g_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + a \qquad \text{mit } a, b \neq 0$$
$$g_{a;b}(x) = a \cdot \cos(-b \cdot x) + a \qquad \text{mit } a, b \neq 0$$

c1) Bestimmen Sie einen Term für alle Nullstellen von $f_{a;b}$.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Für alle x gilt: Wenn $a < 0$, dann gilt $f_{a;b}(x) < 0$.		
Es gilt: $g_{a;b}(x) = f_{a;b}(x)$ für alle x.		

d) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)^2$$

d1) Erläutern Sie, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden.

d2) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt.

d3) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

e) In einem Übergangsprozess wechseln 100 Objekte entsprechend des Übergangsgraph in Abbildung 1.3 zwischen den Zuständen A, B und C.

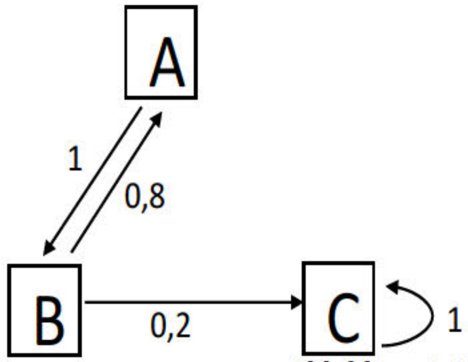


Abbildung 1.3

Zu Beginn befinden sich alle 100 Objekte im Zustand A.

In der Abbildung 1.4 sind drei Diagramme gegeben, die die Anzahl der Objekte im Zustand A in Abhängigkeit von der Anzahl der Übergänge anzeigen.

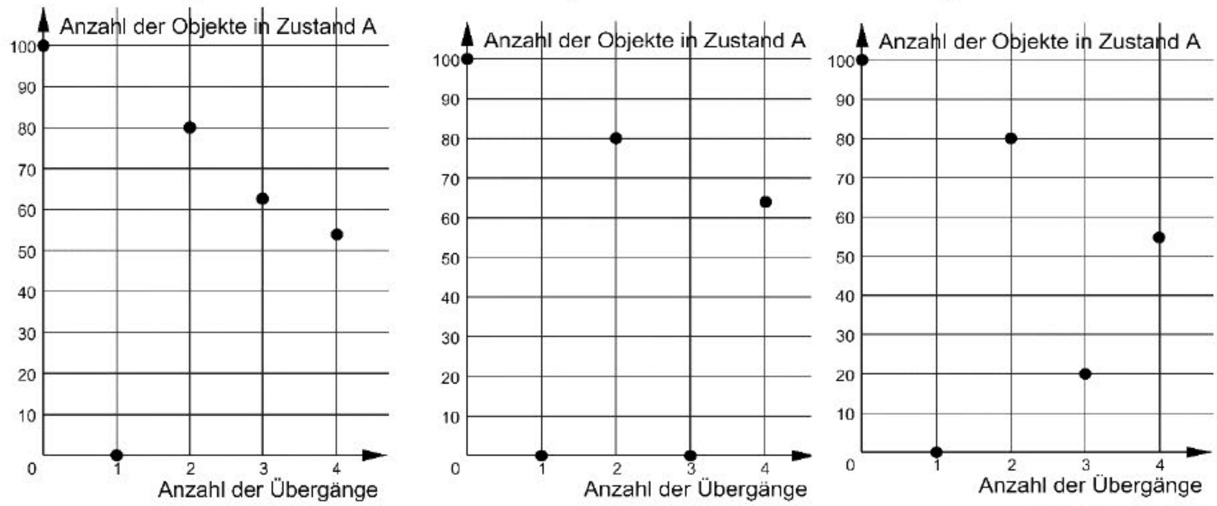


Abbildung 1.4

e1) Entscheiden Sie begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 den Zusammenhang für den gegebenen Übergangsgraphen korrekt widerspiegelt.

e2) Erläutern Sie, warum sich langfristig alle Objekte im Zustand C befinden werden.

f) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Matrix $D = \begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f1) Weisen Sie nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot D^T = (D \cdot A)^T$ gilt.

f2) Bestimmen Sie den Wert des Parameters b und die Intervalle für die Werte der Parameter a und c so, dass die Matrix D stochastisch ist.

g) Gegeben sind die beiden Matrizen $K = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ a & a \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & c \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle Wertetripel (a; b; c) so, dass die Matrizen K und L zueinander invers sind.

h) Gegeben ist die Matrizengleichung $A \cdot B \cdot C + D \cdot A = M$ und M ist eine 2×4-Matrix.

h1) Geben Sie jeweils den Typ der Matrizen A und D an und

erläutern Sie, warum der Typ der Matrizen B und C nicht eindeutig bestimmt werden kann.

Gegeben ist eine Matrizengleichung: $(B + X) \cdot A = X \cdot C + B \cdot C$
Alle gegebenen und im Verlauf der Rechnung auftretenden Matrizen sind invertierbar und vom gleichen Typ.

h2) Lösen Sie die Matrizengleichung nach X auf.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (Lineare Algebra) **Digitale Spiele**

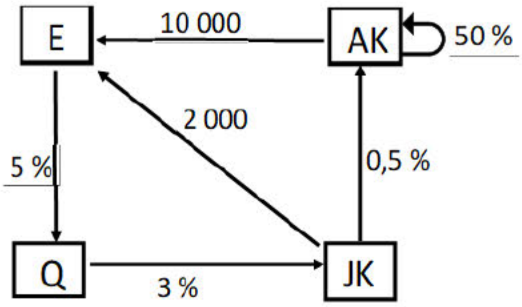
Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	5	4	7*	7	4	7*	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Im Rahmen eines Projektes zu Videospielen betrachten Schülerinnen und Schüler eines beruflichen Gymnasiums zum einen die Marktentwicklung der Plattformen für Videospiele und zum anderen befassen sie sich exemplarisch mit den mathematischen Grundlagen eines Videospiels, das die invasive Besiedlung der Aga-Kröte in Australien simuliert.

Die Recherche zur Aga-Kröte ergab, dass diese mit nur zehn ausgewachsenen Exemplaren in Australien zur Schädlingsbekämpfung ausgesetzt wurde. Aufgrund fehlender Fressfeinde und Parasiten vermehrte sie sich explosionsartig und bedroht heute die australische Fauna. Die Abbildung 2.1 beschreibt die Übergänge zwischen den Entwicklungsstadien der Aga-Kröte für den ursprünglichen Lebensraum in Südamerika und für Australien. Eine Periode entspricht einem Zeitraum von sechs Monaten.

Südamerika



Australien

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{cccc} \text{E} & \text{Q} & \text{JK} & \text{AK} \end{array} \\ \text{zu} \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{Q} \\ \text{JK} \\ \text{AK} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,000 & 10\,000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix} \\ & = A \end{array}$$

Legende:
E: Eier/Laich
Q: Kaulquappen
JK: Jungkröten
AK: adulte (ausgewachsene) Kröten

Abbildung 2.1

a) Erläutern Sie die Matrizenelemente a_{13}, a_{43} und a_{44} im Sachzusammenhang und vergleichen Sie diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.

b) Berechnen Sie ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulation $\vec{v}_0$ der zehn adulten Aga-Kröten und der für Australien angegebenen Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem Jahr und nach zehn Jahren.

In der Simulation wird für ein von Aga-Kröten befallenes Gebiet in Australien der Populationsvektor zum März 2021 angegeben mit $\vec{v}_{M21} = (2\,200\,000 \quad 100\,000 \quad 900 \quad 68)^T$. Ein Schüler hat den Bestand zum September 2020 unter der Voraussetzung rekonstruiert, dass in diesem Zeitraum ebenfalls die Matrix A gegolten hat, und behauptet, dass es im September 2020 genau 60 adulte Kröten gegeben hat.

c) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Schülers richtig ist und

geben Sie die Anzahl der Jungkröten im September 2020 an.

In den trockeneren Gebieten Australiens versucht man durch Krötenzäune um Wasserstellen, den Kröten die Grundlage für die Eiablage zu entziehen. Diese Maßnahme reduziert die Anzahl der durchschnittlich gelegten Eier pro Kröte, bei den Jungkröten sogar um 95 %.

Gleichzeitig werden an den Zäunen die Kröten eingesammelt und dem Ökosystem entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, sinkt für die Jungkröten durch diese Maßnahme um 50 % und die Überlebenswahrscheinlichkeit der adulten Kröten bzw. die Wahrscheinlichkeit Teil des Ökosystems zu bleiben, fällt durch diese Maßnahme auf 50 %.

Für die Eier und Kaulquappen ändert sich die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, nicht.

Mit diesen Maßnahmen ergibt sich eine neue Populationsmatrix:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Für die Simulation werden zwei aufeinanderfolgende Populationsvektoren $\vec{p}_0$ und $\vec{p}_1$ festgelegt:

$$\text{Startvektor } \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 50\,000 \\ 1\,000 \\ 360 \end{pmatrix}; \text{ Folgevektor } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 75\,000 \\ 1\,500 \\ y \end{pmatrix}.$$

d) Begründen Sie, warum für die Entwicklung der Aga-Kröten nach dem Aufstellen der Krötenzäune und dem Einsammeln der Kröten die Populationsmatrix A_{neu} gilt und

bestimmen Sie unter den veränderten Bedingungen:

- die durchschnittlich gelegten Eier einer adulten Kröte,
- die Anzahl der adulten Kröten in der Folgeperiode und
- die Anzahl der eingesammelten adulten Kröten.

Die Klasse hat in einem Mathematikbuch gesehen, dass sich alle vier Entwicklungsperioden die gleichen Populationszahlen ergeben, wenn die vierte Potenz der Populationsmatrix die Einheitsmatrix ergibt (zyklische Entwicklung der Population). Daraufhin hat die Klasse für die Entwicklung der Aga-Kröten eine allgemeine, dem obigen Modell entsprechende Populationsmatrix aufgestellt und deren 4. Potenz ermittelt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & e \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & f \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot d \cdot e & b \cdot d \cdot e \cdot f & a \cdot b \cdot c^2 + d \cdot e \cdot f^2 & a \cdot b \cdot c \cdot e + e \cdot f^3 \\ a^2 \cdot b \cdot c & a \cdot b \cdot d \cdot e & a \cdot d \cdot e \cdot f & a \cdot e \cdot f^2 \\ 0 & a \cdot b^2 \cdot c & a \cdot b \cdot d \cdot e & a \cdot b \cdot e \cdot f \\ a \cdot b \cdot d \cdot f & b \cdot d \cdot f^2 & a \cdot b \cdot c \cdot d + d \cdot f^3 & a \cdot b \cdot d \cdot e + f^4 \end{pmatrix}$$

e) Untersuchen Sie, für welche Werte der Parameter a, b, c, d, e und f die vierte Potenz der Populationsmatrix die Einheitsmatrix ergibt und

interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Im zweiten Teil des Projektes wird die Marktentwicklung von Videospiel-Plattformen untersucht. Videospiele werden für PCs (P) und Konsolen (K) sowie für Mobile-Plattformen (M), hierzu gehören Smartphones und Tablets, angeboten.

Im Jahr 2019 gab es weltweit 500 Millionen Spieler, die PC-Plattformen nutzten, 700 Millionen, die Konsolen nutzten, und sogar 1,1 Milliarden, die Mobile-Plattformen nutzten.

Aus Daten zum jährlichen Wechselverhalten der Videospieler bei den drei Plattformen wurde die Übergangsmatrix S aufgestellt.

$$\begin{array}{ccc} & \text{von} & \\ \text{P} & \text{K} & \text{M} \end{array}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}04 \\ 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}92 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{P} \\ \text{K} \\ \text{M} \end{array} \quad \text{zu}$$

f) Erläutern Sie die Zahlenwerte der ersten Spalte der Matrix S im Sachzusammenhang und

berechnen Sie, wie viele Spieler der anderen Plattformen im Jahr 2020 insgesamt zur Konsole gewechselt haben.

Die Klasse überprüft einen alternativen Vorschlag zur Matrix S. Mit anderen Daten zum Wechselverhalten der Spieler wird ein Gleichungssystem aufgestellt und mit einem CAS-Rechner die Lösungsmenge bestimmt. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gibt die Tupel (x; y; z; a; b) an, wobei die Variablen x, y und z in dieser Reihenfolge für die PC-, die Konsolen- und die Mobile-Spieler in Milliarden stehen. Die Variablen a und b stehen für zwei noch nicht festgelegte Übergangswahrscheinlichkeiten.

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{6}{10}; -\frac{1}{2} \cdot t + \frac{7}{10}; \frac{1}{2} \cdot t + 1; -t + \frac{3}{10}; t \right) \middle| \, t \in \left[0; \frac{3}{10} \right] \right\}$$

g) Interpretieren Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ und

geben Sie jeweils das Intervall für

- die Anzahl der Konsolen-Spieler y,
- die Anzahl der Mobile-Spieler z und
- die Übergangswahrscheinlichkeit a an.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra)**:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1).

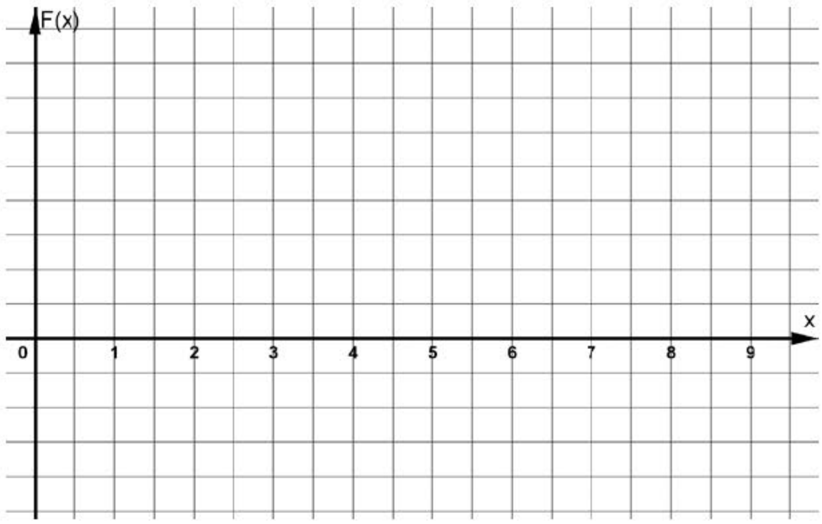


Abbildung 1.1

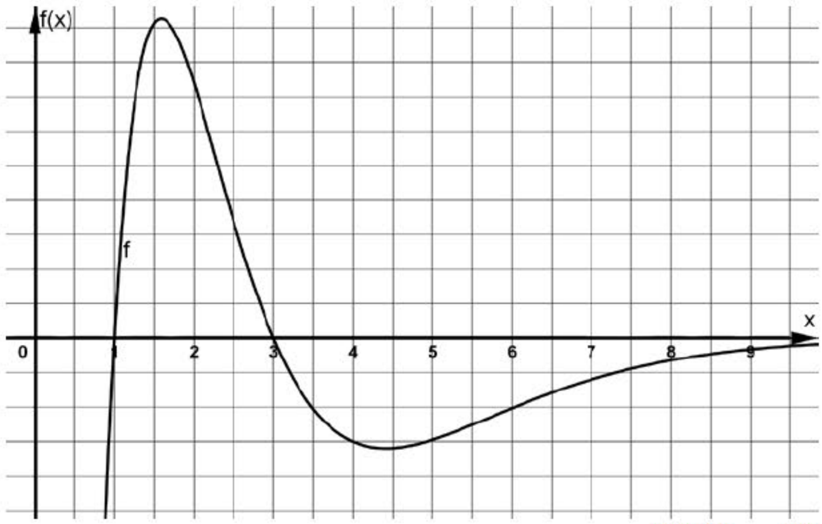


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f_b mit

$$f_b(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

b1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat.

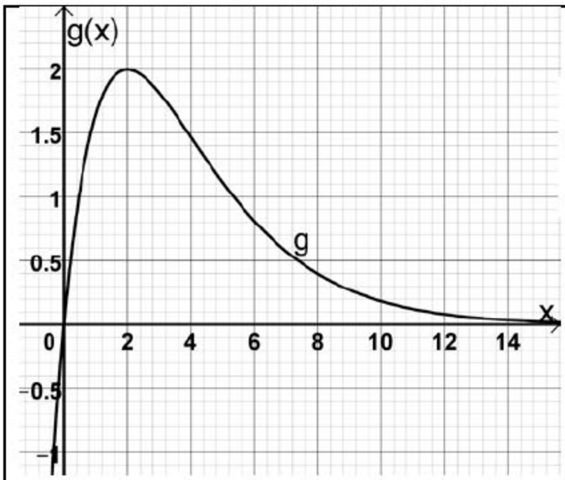
b2) Berechnen Sie den Wert für den Parameter b so, dass der Graph der Funktion f_b mit der Abszissenachse insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f_k mit

$$f_k(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x} \quad \text{mit } k > 0 \text{ und e ist die Eulersche Zahl.}$$

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
 Der nebenstehende Graph g stellt die Funktion f_k mit $k = 0{,}5$ dar.		
Es gilt: $f_k''(x) = e^{-k \cdot x} \cdot 2 \cdot k^2 \cdot \left(x - \frac{2}{k}\right)$ Also gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x > \frac{2}{k}$.		

d) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)^2$$

d1) Erläutern Sie, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden.

d2) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt.

d3) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

e) In einem Übergangsprozess wechseln 100 Objekte entsprechend des Übergangsgraph in Abbildung 1.3 zwischen den Zuständen A, B und C.

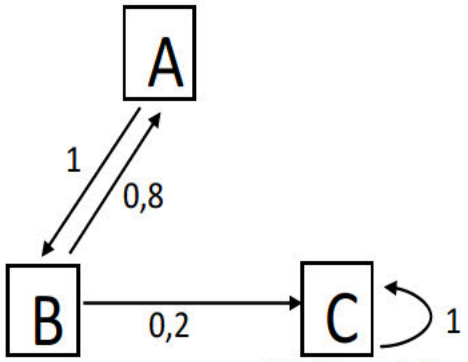


Abbildung 1.3

Zu Beginn befinden sich alle 100 Objekte im Zustand A.

In der Abbildung 1.4 sind drei Diagramme gegeben, die die Anzahl der Objekte im Zustand A in Abhängigkeit von der Anzahl der Übergänge anzeigen.

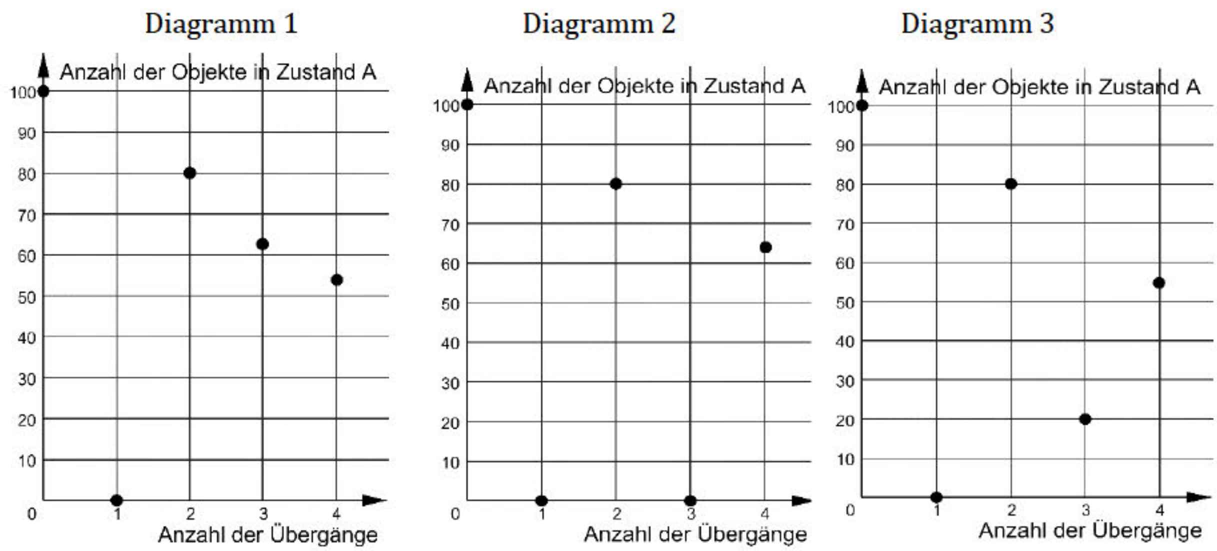


Abbildung 1.4

e1) Entscheiden Sie begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 den Zusammenhang für den gegebenen Übergangsgraphen korrekt widerspiegelt.

e2) Erläutern Sie, warum sich langfristig alle Objekte im Zustand C befinden werden.

f) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Matrix $D = \begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f1) Weisen Sie nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot D^T = (D \cdot A)^T$ gilt.

f2) Bestimmen Sie den Wert des Parameters b und die Intervalle für die Werte der Parameter a und c so, dass die Matrix D stochastisch ist.

g) Gegeben sind die beiden Matrizen $K = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ a & a \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & c \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle Wertetripel (a; b; c) so, dass die Matrizen K und L zueinander invers sind.

h) Gegeben ist die Matrizengleichung $A \cdot B \cdot C + D \cdot A = M$ und M ist eine 2×4-Matrix.

h1) Geben Sie jeweils den Typ der Matrizen A und D an und

erläutern Sie, warum der Typ der Matrizen B und C nicht eindeutig bestimmt werden kann.

Gegeben ist eine Matrizengleichung: $(B + X) \cdot A = X \cdot C + B \cdot C$
Alle gegebenen und im Verlauf der Rechnung auftretenden Matrizen sind invertierbar und vom gleichen Typ.

h2) Lösen Sie die Matrizengleichung nach X auf.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (Lineare Algebra) **Digitale Spiele**

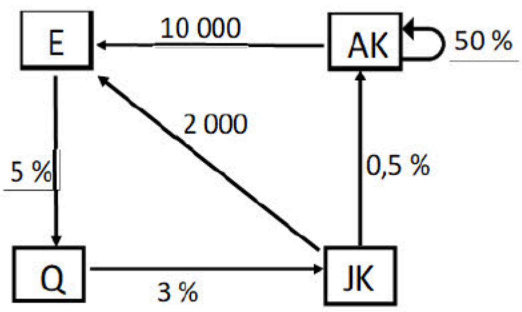
Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	5	4	7*	7	4	7*	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Im Rahmen eines Projektes zu Videospielen betrachten Schülerinnen und Schüler eines beruflichen Gymnasiums zum einen die Marktentwicklung der Plattformen für Videospiele und zum anderen befassen sie sich exemplarisch mit den mathematischen Grundlagen eines Videospiels, das die invasive Besiedlung der Aga-Kröte in Australien simuliert.

Die Recherche zur Aga-Kröte ergab, dass diese mit nur zehn ausgewachsenen Exemplaren in Australien zur Schädlingsbekämpfung ausgesetzt wurde. Aufgrund fehlender Fressfeinde und Parasiten vermehrte sie sich explosionsartig und bedroht heute die australische Fauna. Die Abbildung 2.1 beschreibt die Übergänge zwischen den Entwicklungsstadien der Aga-Kröte für den ursprünglichen Lebensraum in Südamerika und für Australien. Eine Periode entspricht einem Zeitraum von sechs Monaten.

Südamerika



Australien

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{cccc} E & Q & JK & AK \end{array} \\ \text{zu} \begin{array}{c} E \\ Q \\ JK \\ AK \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,000 & 10\,000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix} \\ & = A \end{array}$$

Legende:
E: Eier/Laich
Q: Kaulquappen
JK: Jungkröten
AK: adulte (ausgewachsene) Kröten

Abbildung 2.1

a) Erläutern Sie die Matrizenelemente a_{13}, a_{43} und a_{44} im Sachzusammenhang und vergleichen Sie diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.

b) Berechnen Sie ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulation $\vec{v}_0$ der zehn adulten Aga-Kröten und der für Australien angegebenen Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem Jahr und nach zehn Jahren.

In der Simulation wird für ein von Aga-Kröten befallenes Gebiet in Australien der Populationsvektor zum März 2021 angegeben mit $\vec{v}_{M21} = (2\,200\,000 \quad 100\,000 \quad 900 \quad 68)^T$. Ein Schüler hat den Bestand zum September 2020 unter der Voraussetzung rekonstruiert, dass in diesem Zeitraum ebenfalls die Matrix A gegolten hat, und behauptet, dass es im September 2020 genau 60 adulte Kröten gegeben hat.

c) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Schülers richtig ist und

geben Sie die Anzahl der Jungkröten im September 2020 an.

In den trockeneren Gebieten Australiens versucht man durch Krötenzäune um Wasserstellen, den Kröten die Grundlage für die Eiablage zu entziehen. Diese Maßnahme reduziert die Anzahl der durchschnittlich gelegten Eier pro Kröte, bei den Jungkröten sogar um 95 %.

Gleichzeitig werden an den Zäunen die Kröten eingesammelt und dem Ökosystem entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, sinkt für die Jungkröten durch diese Maßnahme um 50 % und die Überlebenswahrscheinlichkeit der adulten Kröten bzw. die Wahrscheinlichkeit Teil des Ökosystems zu bleiben, fällt durch diese Maßnahme auf 50 %.

Für die Eier und Kaulquappen ändert sich die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, nicht.

Mit diesen Maßnahmen ergibt sich eine neue Populationsmatrix:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Für die Simulation werden zwei aufeinanderfolgende Populationsvektoren $\vec{p}_0$ und $\vec{p}_1$ festgelegt:

$$\text{Startvektor } \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 50\,000 \\ 1\,000 \\ 360 \end{pmatrix}; \text{ Folgevektor } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 75\,000 \\ 1\,500 \\ y \end{pmatrix}.$$

d) Begründen Sie, warum für die Entwicklung der Aga-Kröten nach dem Aufstellen der Krötenzäune und dem Einsammeln der Kröten die Populationsmatrix A_{neu} gilt und

bestimmen Sie unter den veränderten Bedingungen:

- die durchschnittlich gelegten Eier einer adulten Kröte,
- die Anzahl der adulten Kröten in der Folgeperiode und
- die Anzahl der eingesammelten adulten Kröten.

Die Klasse hat in einem Mathematikbuch gesehen, dass sich alle vier Entwicklungsperioden die gleichen Populationszahlen ergeben, wenn die vierte Potenz der Populationsmatrix die Einheitsmatrix ergibt (zyklische Entwicklung der Population). Daraufhin hat die Klasse für die Entwicklung der Aga-Kröten eine allgemeine, dem obigen Modell entsprechende Populationsmatrix aufgestellt und deren 4. Potenz ermittelt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & e \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & f \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} a\cdot b\cdot d\cdot e & b\cdot d\cdot e\cdot f & a\cdot b\cdot c^2 + d\cdot e\cdot f^2 & a\cdot b\cdot c\cdot e + e\cdot f^3 \\ a^2\cdot b\cdot c & a\cdot b\cdot d\cdot e & a\cdot d\cdot e\cdot f & a\cdot e\cdot f^2 \\ 0 & a\cdot b^2\cdot c & a\cdot b\cdot d\cdot e & a\cdot b\cdot e\cdot f \\ a\cdot b\cdot d\cdot f & b\cdot d\cdot f^2 & a\cdot b\cdot c\cdot d + d\cdot f^3 & a\cdot b\cdot d\cdot e + f^4 \end{pmatrix}$$

e) Untersuchen Sie, für welche Werte der Parameter a, b, c, d, e und f die vierte Potenz der Populationsmatrix die Einheitsmatrix ergibt und

interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Im zweiten Teil des Projektes wird die Marktentwicklung von Videospiel-Plattformen untersucht. Videospiele werden für PCs (P) und Konsolen (K) sowie für Mobile-Plattformen (M), hierzu gehören Smartphones und Tablets, angeboten.

Im Jahr 2019 gab es weltweit 500 Millionen Spieler, die PC-Plattformen nutzten, 700 Millionen, die Konsolen nutzten, und sogar 1,1 Milliarden, die Mobile-Plattformen nutzten.

Aus Daten zum jährlichen Wechselverhalten der Videospieler bei den drei Plattformen wurde die Übergangsmatrix S aufgestellt.

$$\begin{array}{cccc} & & \text{von} & & \\ & \text{P} & \text{K} & \text{M} & \\ S = \left(\begin{matrix} 0{,}72 \\ 0{,}20 \\ 0{,}08 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0{,}20 \\ 0{,}70 \\ 0{,}10 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0{,}04 \\ 0{,}04 \\ 0{,}92 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \text{P} \\ \text{K} \\ \text{M} \end{matrix} & \text{zu} \end{array}$$

f) Erläutern Sie die Zahlenwerte der ersten Spalte der Matrix S im Sachzusammenhang und

berechnen Sie, wie viele Spieler der anderen Plattformen im Jahr 2020 insgesamt zur Konsole gewechselt haben.

Die Klasse überprüft einen alternativen Vorschlag zur Matrix S. Mit anderen Daten zum Wechselverhalten der Spieler wird ein Gleichungssystem aufgestellt und mit einem CAS-Rechner die Lösungsmenge bestimmt. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gibt die Tupel (x; y; z; a; b) an, wobei die Variablen x, y und z in dieser Reihenfolge für die PC-, die Konsolen- und die Mobile-Spieler in Milliarden stehen. Die Variablen a und b stehen für zwei noch nicht festgelegte Übergangswahrscheinlichkeiten.

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{6}{10}; -\frac{1}{2} \cdot t + \frac{7}{10}; \frac{1}{2} \cdot t + 1; -t + \frac{3}{10}; t \right) \middle| t \in \left[0; \frac{3}{10}\right] \right\}$$

g) Interpretieren Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ und

geben Sie jeweils das Intervall für

- die Anzahl der Konsolen-Spieler y,
- die Anzahl der Mobile-Spieler z und
- die Übergangswahrscheinlichkeit a an.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1).

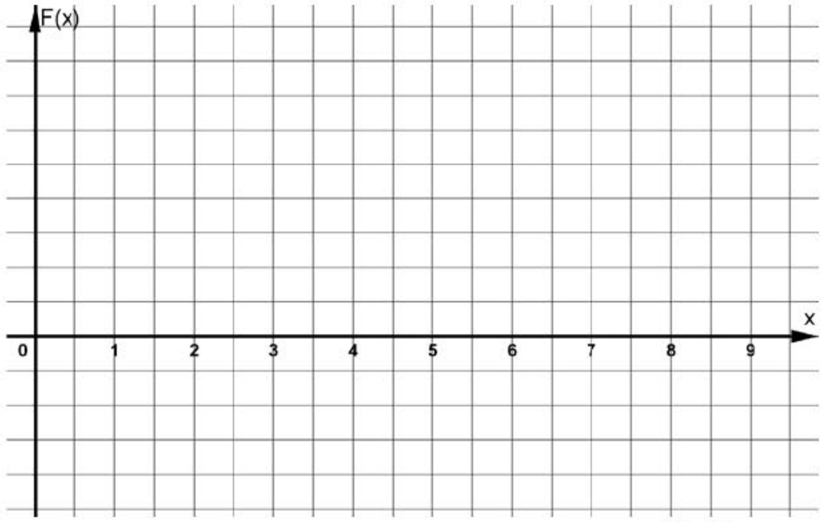


Abbildung 1.1

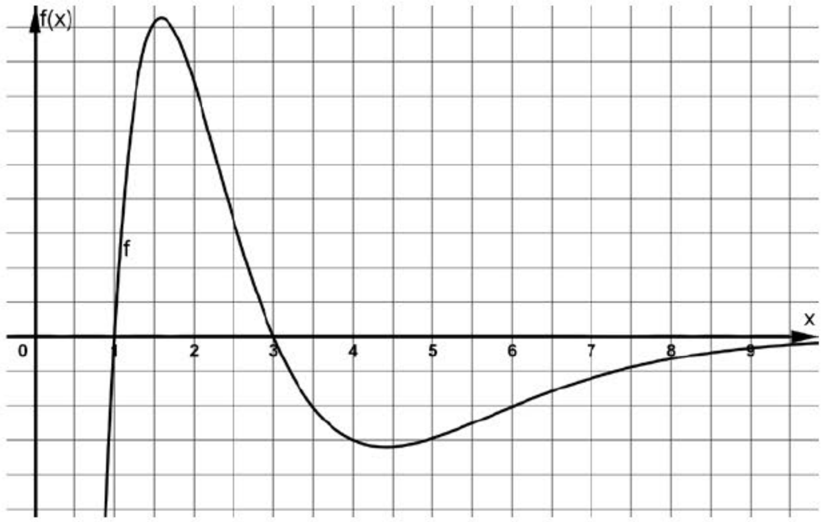


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f_b mit

$$f_b(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

b1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat.

b2) Berechnen Sie den Wert für den Parameter b so, dass der Graph der Funktion f_b mit der Abszissenachse insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Gegeben sind die Funktionen $f_{a;b}$ und $g_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + a \qquad \text{mit } a, b \neq 0$$
$$g_{a;b}(x) = a \cdot \cos(-b \cdot x) + a \qquad \text{mit } a, b \neq 0$$

c1) Bestimmen Sie einen Term für alle Nullstellen von $f_{a;b}$.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Für alle x gilt: Wenn $a < 0$, dann gilt $f_{a;b}(x) < 0$.		
Es gilt: $g_{a;b}(x) = f_{a;b}(x)$ für alle x.		

d) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x-4)^2$$

d1) Erläutern Sie, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden.

d2) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt.

d3) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

e) Auf Grundlage einer Datenerhebung wurde die in Tabelle 1.1 dargestellte Datenreihe ermittelt.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	8	6	4	3	3	5	6

Tabelle 1.1

e1) Zeichnen Sie in Abbildung 1.3 einen Boxplot, dem die Urliste in Tabelle 1.1 zugrunde liegt.

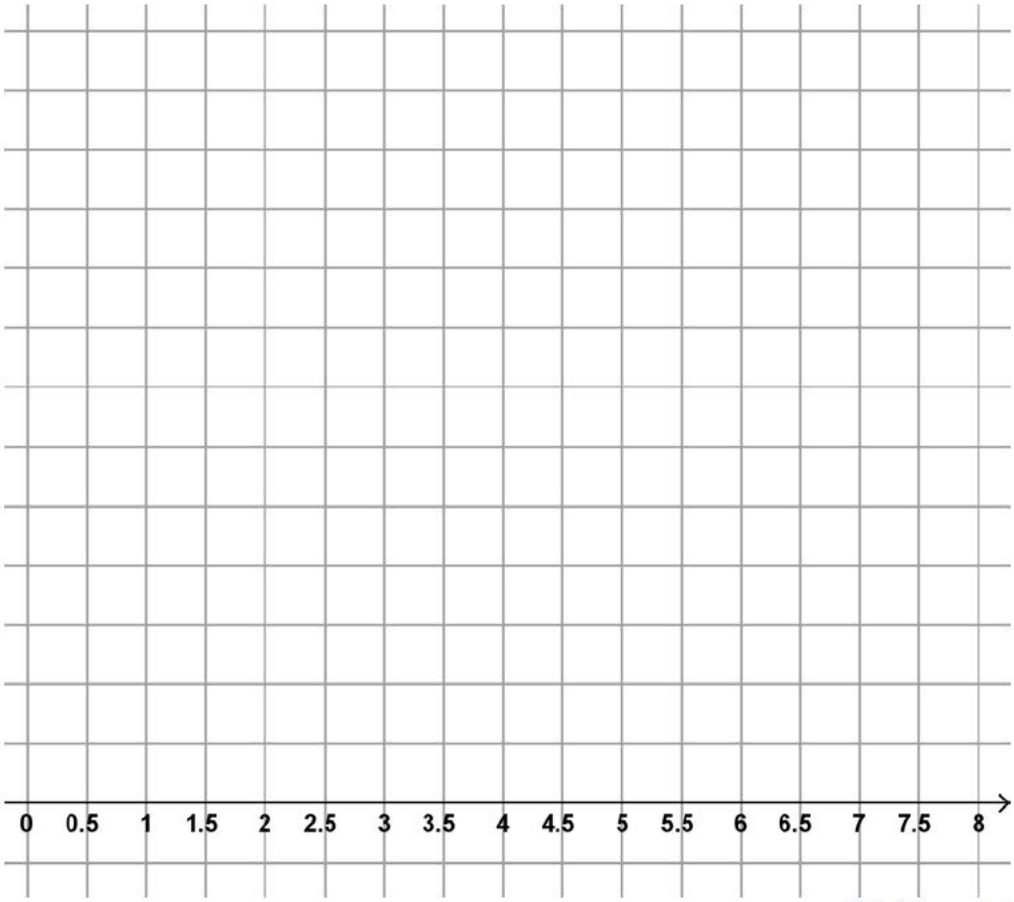


Abbildung 1.3

Für einen beliebigen Wert $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ wird eine zweite Datenreihe $y_1 = k \cdot x_1; y_2 = k \cdot x_2; \ldots; y_8 = k \cdot x_8$ gebildet.

e2) Erläutern Sie, wie sich die zweite Datenreihe in Bezug auf den Median und den (Inter-)Quartilsabstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.

f) Bei einem Glücksspiel zieht ein Spieler aus einer Urne zufällig eine Kugel. Nach dem Zug wird die Kugel in die Urne zurückgelegt. Es befinden sich fünf grüne (G), drei rote (R) und zwei schwarze (S) Kugeln in der Urne, die sich nur durch ihre Farbe voneinander unterscheiden. Zieht der Spieler eine schwarze Kugel, so macht er einen Gewinn in Höhe von 4 €. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer grünen, roten bzw. schwarzen Kugel wird dabei mit P(G), P(R) bzw. P(S) bezeichnet.

f1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(S) an.

f2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Es gilt: $P(R) < \left(P(G)\right)^2$.	
Bei einem Einsatz des Spielers von $y = 1$ € ist das Spiel stochastisch fair.	

g) Gegeben ist die folgende unvollständige Vierfeldertafel, die ein zweistufiges Zufallsexperiment darstellt. Es können dabei die Ereignisse A und B sowie deren Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten. Weiter ist bekannt, dass
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9$ sowie
$P_B(A) = \frac{1}{11}$ (alternative Schreibweise $P(A|B) = \frac{1}{11}$) gilt.

	B	$\overline{B}$	Σ
A			0,1
$\overline{A}$			
Σ			1

Abbildung 1.4

g1) Vervollständigen Sie die in Abbildung 1.4 gegebene Vierfeldertafel.

g2) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.

h) In der Tabelle 1.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$ dargestellt.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1	0,1	0,5	0,3

Tabelle 1.2

Die Abbildung 1.5 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen Y.
Die Zufallsvariable Y ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 2$.
Es gilt $X, Y \in \{0,1,2,3\}$.

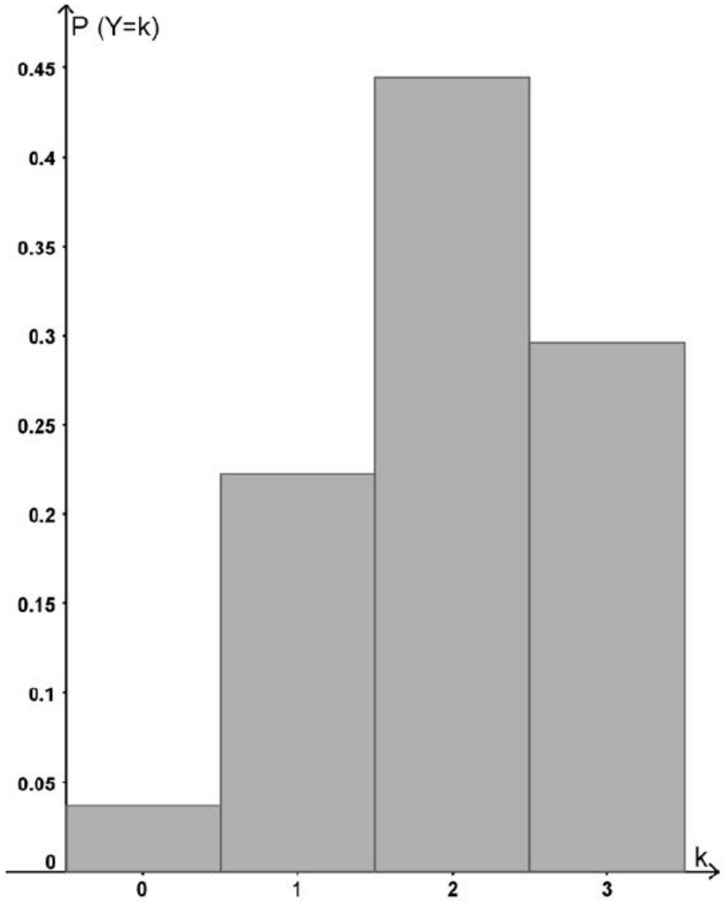


Abbildung 1.5

h1) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y.

h2) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsvariablen X $\mu_X = 2$ gilt.

h3) Vergleichen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen X mit der Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik)**: Tabakkonsum**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	6	6	7	5*	4	6*	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Laut Bundesministerium für Gesundheit sterben in Deutschland jährlich ungefähr 120 000 Personen an den Folgen des Tabakkonsums. Die Verringerung des Tabakkonsums ist daher seit einigen Jahren vordringliches gesundheitspolitisches Ziel der Bundesregierung. Ein Berufliches Gymnasium führt deshalb jährlich ein Projekt zur Sensibilisierung zum Thema Tabakkosum durch.

Den Beginn des Projekts bildet eine Recherchephase, in der die Schülerinnen und Schüler des Kurses im Internet Datenmaterial zum Thema Tabakkonsum in Deutschland sichten. Sie stoßen dabei unter anderem auf die Abbildungen 2.1 und 2.2, die sich in der Anlage zu dieser Aufgabe befinden.

a) Beschreiben Sie die Grafiken in Abbildung 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbstgewählten Aspekten.

Ein Schüler des Kurses betrachtet die beiden Grafiken und behauptet, dass sowohl der Anteil an Raucherinnen als auch der Anteil an Rauchern im Alter von 18 bis 59 Jahren seit 1995 stetig zurückgegangen ist und, dass der Anteil der Raucher im Jahr 2015 um etwa 34 % im Vergleich zu 1995 gesunken ist.

b) Prüfen Sie die beiden Behauptungen des Schülers.

Der Projektkurs geht aufgrund der Ergebnisse des letztjährigen Projektkurses davon aus, dass der Anteil der Raucherinnen und Raucher unter den Schülerinnen und Schülern der Schule 18 % beträgt.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher“ binomialverteilt ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 350 befragten Schülerinnen und Schülern

- mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen,
- genau 287 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen,
- mehr als 62, aber höchstens 70 Schülerinnen und Schüler rauchen.

Ein Schüler des Kurses betrachtet im CAS ein Histogramm zur Verteilung der Zufallsvariablen X und behauptet, dass die Gleichung

$$P(\overline{X} = 94) = 0$$

gilt.

d) Erläutern Sie die Bedeutung der Gleichung im Sachzusammenhang und

prüfen Sie die Behauptung des Schülers.

Weisen Sie nach, dass für die Zufallsvariable X die Ungleichung $P(X < \mu) < P(X > \mu)$ gilt.

Linus, ein besonders interessierter Schüler des Kurses, findet in den Unterlagen seiner Mitschülerin Luisa ohne weitere Dokumentation die folgende Ungleichung:

$$P(X \leq k) \geq 0{,}9$$

e) Erläutern Sie die Bedeutung der Ungleichung im Sachzusammenhang und

ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert k, für den die Ungleichung erfüllt ist.

Schon seit dem Jahr 2015 ergreift die Schulleitung verstärkt Maßnahmen, um den Anteil an Raucherinnen und Rauchern unter den Schülerinnen und Schülern zu senken. Aus diesem Grund ist die Schulleitung davon überzeugt, dass sich der Anteil an Raucherinnen und Rauchern in den letzten Jahren verringert hat und heute tatsächlich geringer als 18 % ist.

f) Begründen Sie, dass $H_0: p_0 = 0{,}18$ die Nullhypothese der Schulleitung ist und

geben Sie die Gegenhypothese H_1 aus Sicht der Schulleitung an.

In einer Stichprobe wurden 500 zufällig ausgewählte Schülerinnen und Schüler nach ihrem Tabakkonsum befragt. Unter diesen befanden sich 74 Raucherinnen und Raucher.

g) Beurteilen Sie die Wirksamkeit der getroffenen Maßnahmen der Schulleitung mithilfe eines geeigneten Signifikanztests bei einem Signifikanzniveau α von fünf Prozent ($\alpha = 5\ \%$).

Anlage:[1]

Abbildung 2.1

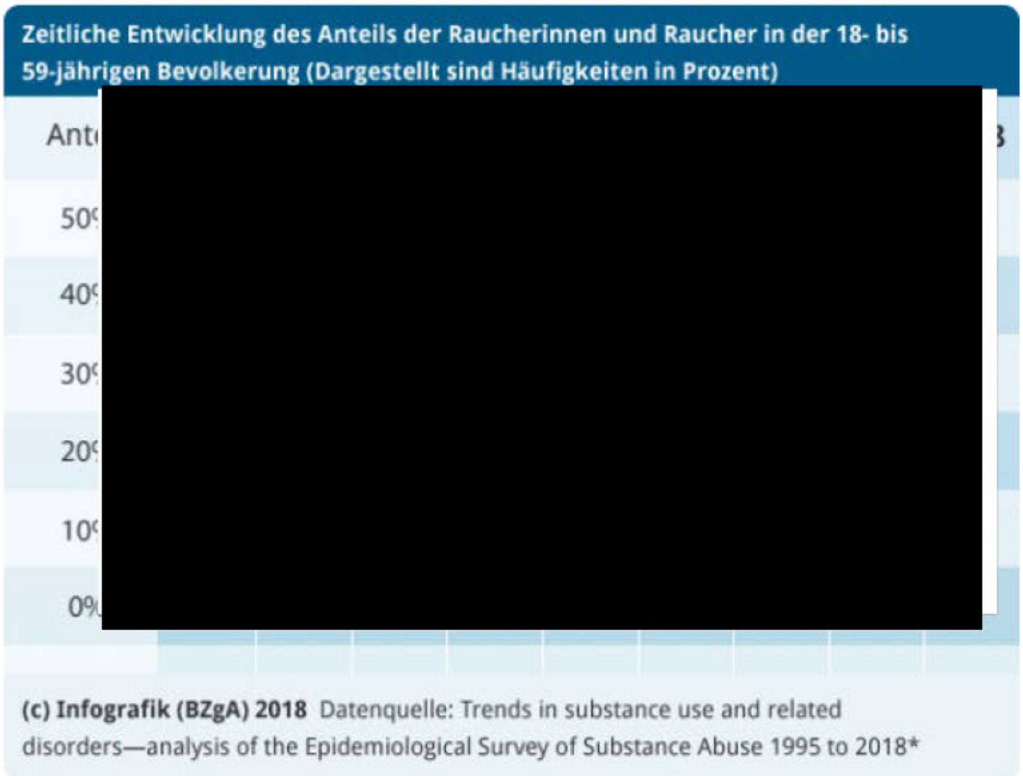


Abbildung 2.2

[1] **Quelle der Grafiken**: Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung. Unter: www.rauchfrei-info.de/informieren/verbreitung-des-rauchens/raucherquote-bei-erwachsenen/ (Stand: 25.07.2020)

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 B:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1).

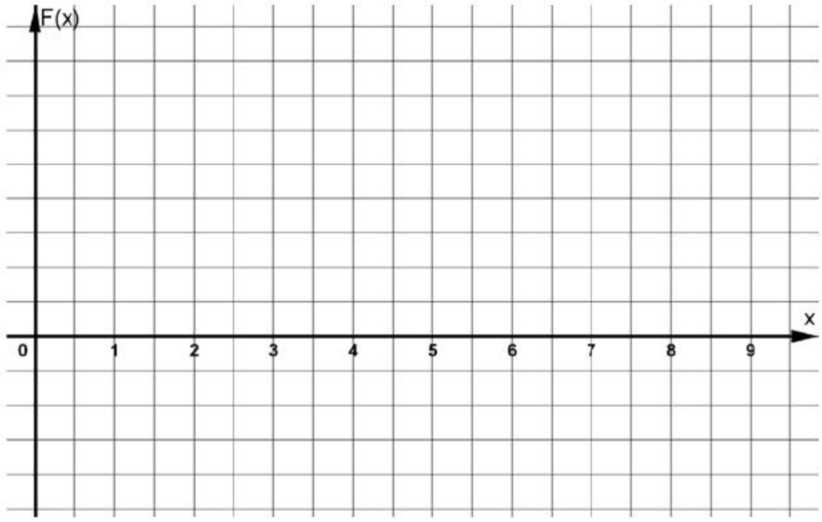


Abbildung 1.1

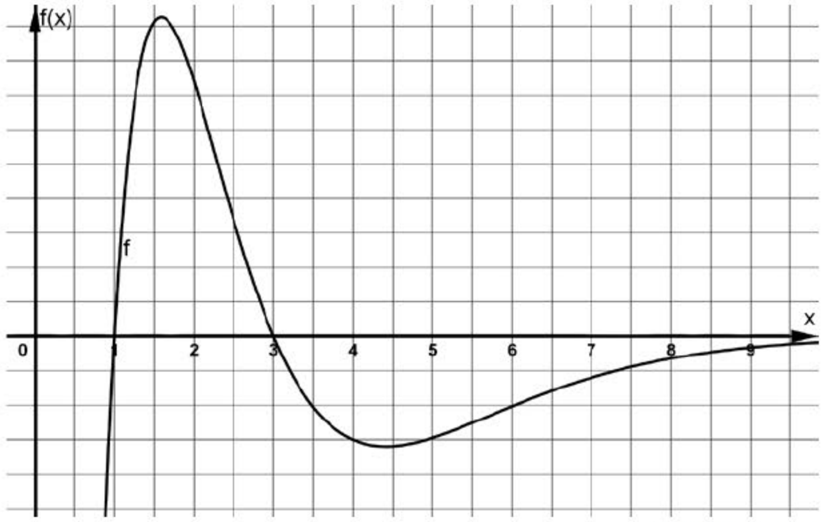


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f_b mit

$$f_b(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

b1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat.

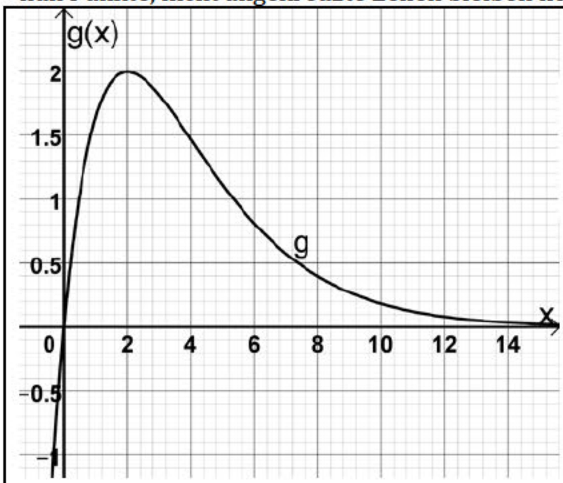
b2) Berechnen Sie den Wert für den Parameter b so, dass der Graph der Funktion f_b mit der Abszissenachse insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f_k mit

$$f_k(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x} \quad \text{mit } k > 0 \text{ und e ist die Eulersche Zahl.}$$

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).		wahr	falsch
	Der nebenstehende Graph g stellt die Funktion f_k mit $k = 0{,}5$ dar.		
Es gilt: $f_k''(x) = e^{-k \cdot x} \cdot 2 \cdot k^2 \cdot \left(x - \frac{2}{k}\right)$ Also gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x > \frac{2}{k}$.			

d) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x-4)^2$$

d1) Erläutern Sie, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden.

d2) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt.

d3) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

e) Auf Grundlage einer Datenerhebung wurde die in Tabelle 1.1 dargestellte Datenreihe ermittelt.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	8	6	4	3	3	5	6

Tabelle 1.1

e1) Zeichnen Sie in Abbildung 1.3 einen Boxplot, dem die Urliste in Tabelle 1.1 zugrunde liegt.

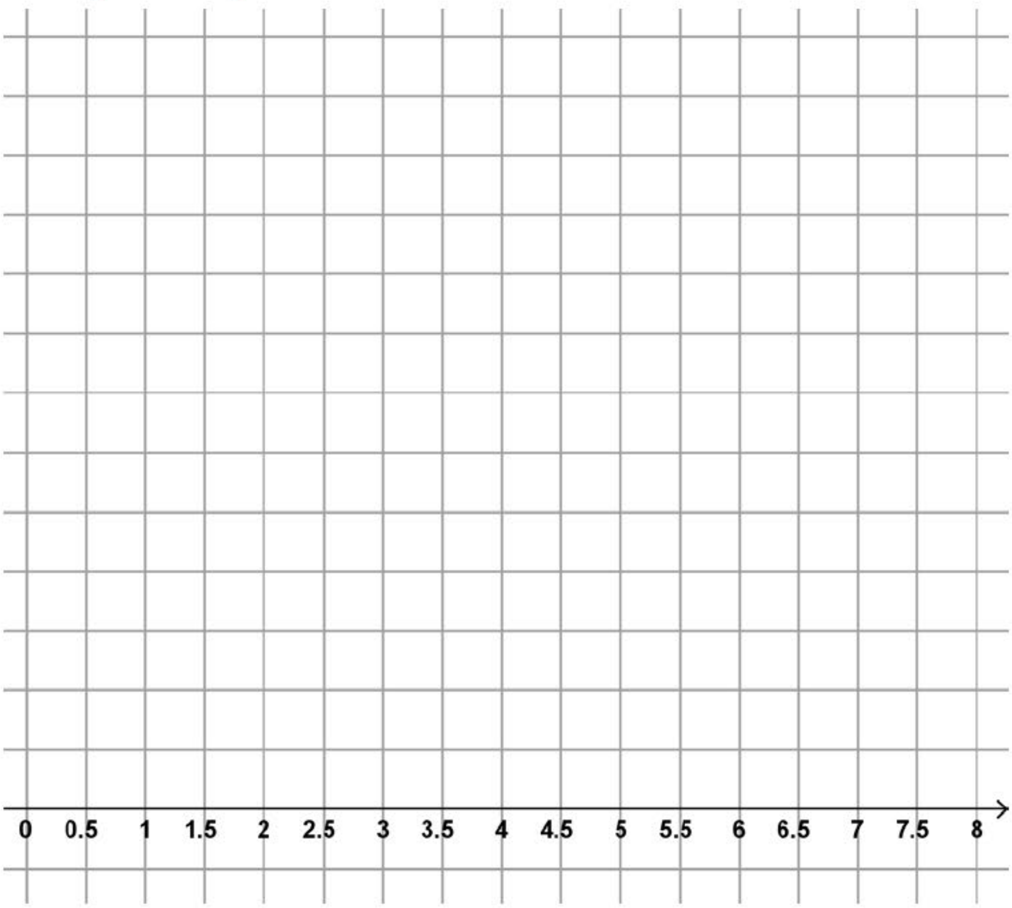


Abbildung 1.3

Für einen beliebigen Wert $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ wird eine zweite Datenreihe $y_1 = k \cdot x_1; y_2 = k \cdot x_2; \ldots; y_8 = k \cdot x_8$ gebildet.

e2) Erläutern Sie, wie sich die zweite Datenreihe in Bezug auf den Median und den (Inter-)Quartilsabstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.

f) Bei einem Glücksspiel zieht ein Spieler aus einer Urne zufällig eine Kugel. Nach dem Zug wird die Kugel in die Urne zurückgelegt. Es befinden sich fünf grüne (G), drei rote (R) und zwei schwarze (S) Kugeln in der Urne, die sich nur durch ihre Farbe voneinander unterscheiden. Zieht der Spieler eine schwarze Kugel, so macht er einen Gewinn in Höhe von 4 €. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer grünen, roten bzw. schwarzen Kugel wird dabei mit P(G), P(R) bzw. P(S) bezeichnet.

f1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(S) an.

f2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Es gilt: $P(R) < \left(P(G)\right)^2$.	
Bei einem Einsatz des Spielers von $y = 1$ € ist das Spiel stochastisch fair.	

g) Gegeben ist die folgende unvollständige Vierfeldertafel, die ein zweistufiges Zufallsexperiment darstellt. Es können dabei die Ereignisse A und B sowie deren Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten. Weiter ist bekannt, dass
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9$ sowie
$P_B(A) = \frac{1}{11}$ (alternative Schreibweise $P(A|B) = \frac{1}{11}$) gilt.

	B	$\overline{B}$	Σ
A			0,1
$\overline{A}$			
Σ			1

Abbildung 1.4

g1) Vervollständigen Sie die in Abbildung 1.2 gegebene Vierfeldertafel.

g2) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.

h) In der Tabelle 1.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$ dargestellt.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1	0,1	0,5	0,3

Tabelle 1.2

Die Abbildung 1.5 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen Y.
Die Zufallsvariable Y ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 2$.
Es gilt $X, Y \in \{0,1,2,3\}$.

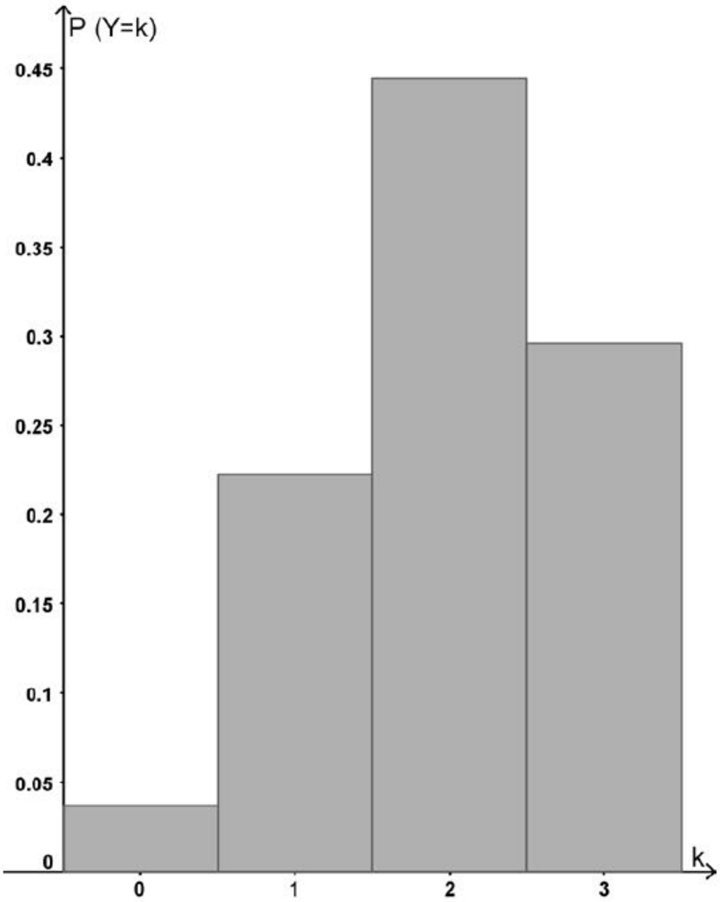


Abbildung 1.5

h1) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y.

h2) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsvariablen X $\mu_X = 2$ gilt.

h3) Vergleichen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen X mit der Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik)**: Tabakkonsum**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	6	6	7	5*	4	6*	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Laut Bundesministerium für Gesundheit sterben in Deutschland jährlich ungefähr 120 000 Personen an den Folgen des Tabakkonsums. Die Verringerung des Tabakkonsums ist daher seit einigen Jahren vordringliches gesundheitspolitisches Ziel der Bundesregierung. Ein Berufliches Gymnasium führt deshalb jährlich ein Projekt zur Sensibilisierung zum Thema Tabakkosum durch.

Den Beginn des Projekts bildet eine Recherchephase, in der die Schülerinnen und Schüler des Kurses im Internet Datenmaterial zum Thema Tabakkonsum in Deutschland sichten. Sie stoßen dabei unter anderem auf die Abbildungen 2.1 und 2.2, die sich in der Anlage zu dieser Aufgabe befinden.

a) Beschreiben Sie die Abbildungen 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbstgewählten Aspekten.

Ein Schüler des Kurses betrachtet die beiden Grafiken und behauptet, dass sowohl der Anteil an Raucherinnen als auch der Anteil an Rauchern im Alter von 18 bis 59 Jahren seit 1995 stetig zurückgegangen ist und, dass der Anteil der Raucher im Jahr 2015 um etwa 34 % im Vergleich zu 1995 gesunken ist.

b) Prüfen Sie die beiden Behauptungen des Schülers.

Der Projektkurs geht aufgrund der Ergebnisse des letztjährigen Projektkurses davon aus, dass der Anteil der Raucherinnen und Raucher unter den Schülerinnen und Schülern der Schule 18 % beträgt.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher“ binomialverteilt ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 350 befragten Schülerinnen und Schülern

- mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen,
- genau 287 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen,
- mehr als 62, aber höchstens 70 Schülerinnen und Schüler rauchen.

Ein Schüler des Kurses betrachtet im CAS ein Histogramm zur Verteilung der Zufallsvariablen X und behauptet, dass die Gleichung

$$P(\overline{X} = 94) = 0$$

gilt.

d) Erläutern Sie die Bedeutung der Gleichung im Sachzusammenhang und

prüfen Sie die Behauptung des Schülers.

Weisen Sie nach, dass für die Zufallsvariable X die Ungleichung $P(X < \mu) < P(X > \mu)$ gilt.

Linus, ein besonders interessierter Schüler des Kurses, findet in den Unterlagen seiner Mitschülerin Luisa ohne weitere Dokumentation die folgende Ungleichung:

$$P(X \leq k) \geq 0{,}9$$

e) Erläutern Sie die Bedeutung der Ungleichung im Sachzusammenhang und

ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert k, für den die Ungleichung erfüllt ist.

Schon seit dem Jahr 2015 ergreift die Schulleitung verstärkt Maßnahmen, um den Anteil an Raucherinnen und Rauchern unter den Schülerinnen und Schülern zu senken. Aus diesem Grund ist die Schulleitung davon überzeugt, dass sich der Anteil an Raucherinnen und Rauchern in den letzten Jahren verringert hat und heute tatsächlich geringer als 18 % ist.

f) Begründen Sie, dass $H_0\colon p_0 = 0{,}18$ die Nullhypothese der Schulleitung ist und

geben Sie die Gegenhypothese H_1 aus Sicht der Schulleitung an.

In einer Stichprobe wurden 500 zufällig ausgewählte Schülerinnen und Schüler nach ihrem Tabakkonsum befragt. Unter diesen befanden sich 74 Raucherinnen und Raucher.

g) Beurteilen Sie die Wirksamkeit der getroffenen Maßnahmen der Schulleitung mithilfe eines geeigneten Signifikanztests bei einem Signifikanzniveau α von fünf Prozent ($\alpha = 5\ \%$).

Anlage:[1]

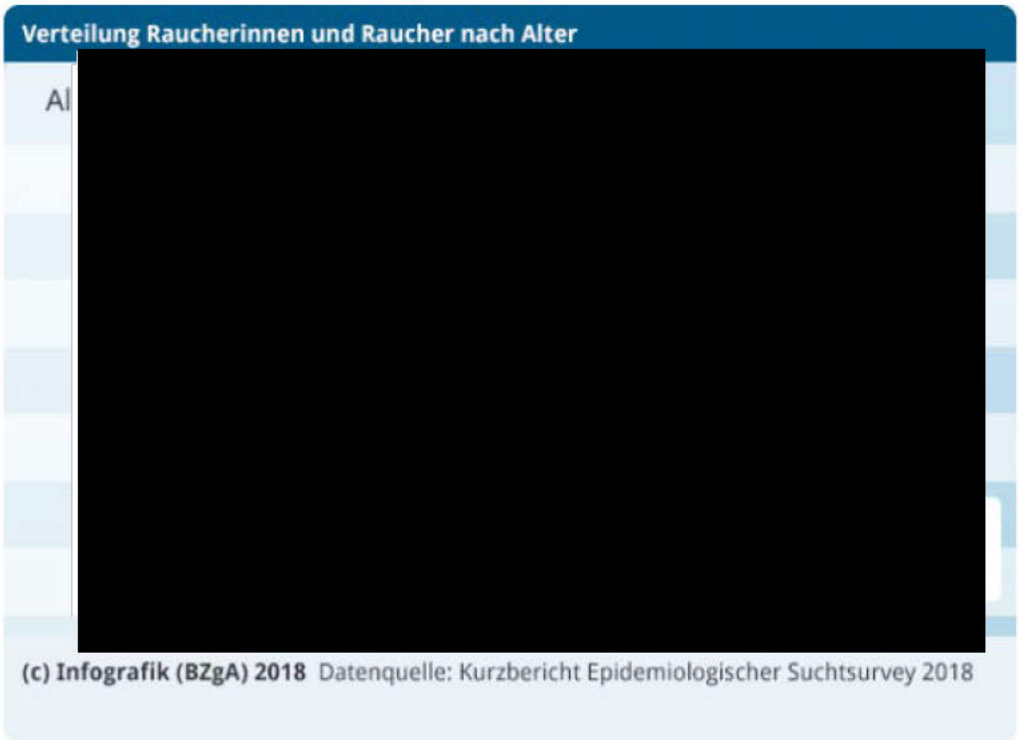


Abbildung 2.1

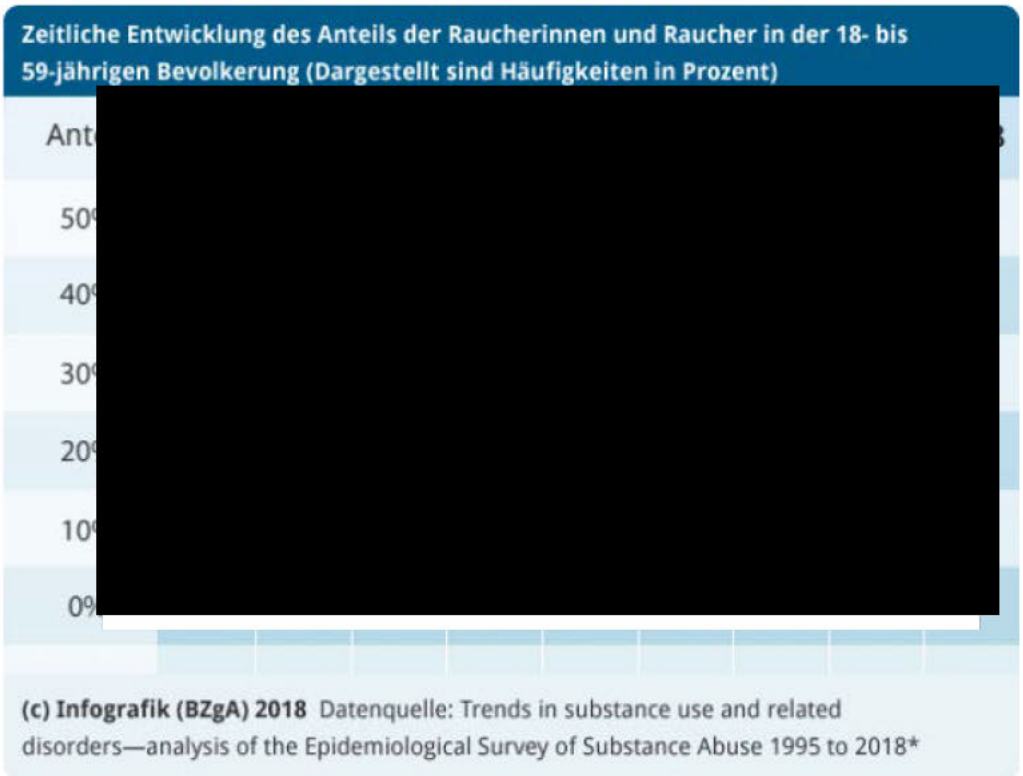


Abbildung 2.2

[1] **Quelle der Grafiken**: Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung. Unter: www.rauchfrei-info.de/informieren/verbreitung-des-rauchens/raucherquote-bei-erwachsenen/ (Stand: 25.07.2020)

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3:** (Analysis) **Lungenfunktionsdiagnostik**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	7	2	3	5	6	6	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Durch die Corona-Pandemie gelangten unter anderem auch chronische Atemwegserkrankungen ins Zentrum der Medienberichterstattung, da Menschen mit diesen Erkrankungen zur Risikogruppe gehören. Bei Untersuchungen der Angehörigen der Risikogruppe wird häufig eine Lungenfunktionsanalyse zur Findung der Diagnose durchgeführt.

Bei der Lungenfunktionsanalyse wird das Atemvolumen des Patienten während eines normalen und eines besonders tiefen Atemzuges untersucht (vgl. Abbildung 3.1). Bei der tiefen Atmung werden die Reservevolumina in der Lunge mobilisiert.

Ein Facharzt, der einen Patienten der Risikogruppe untersucht, erhält als Ergebnis einer 13-sekündigen Lungenfunktionsanalyse den in Abbildung 3.1 dargestellten Verlauf des Atemvorgangs.

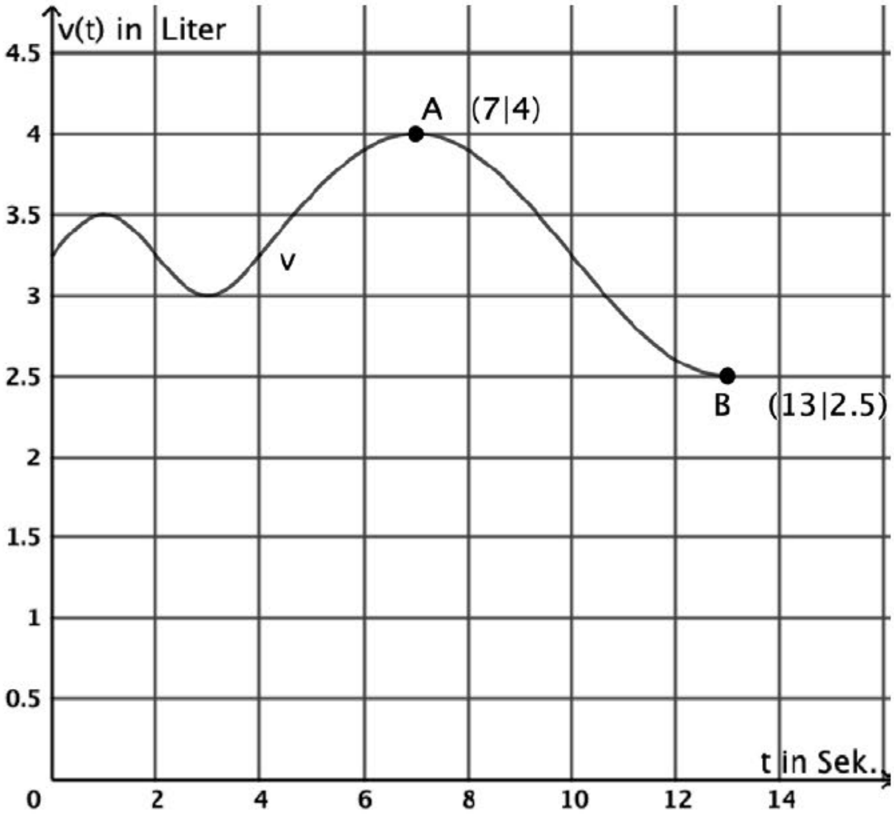


Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.

Der dargestellte Atemvorgang kann durch die Funktion v mit der Gleichung

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t), & 0 \leq t \leq 3 \\ v_2(t), & 3 < t \leq 13 \end{cases}$$

beschrieben werden. Hierbei gibt t die Zeit in Sekunden und v(t) das momentane Lungenvolumen in Litern an. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn der Analyse.

Bei der Funktion v_1 handelt es sich um die trigonometrische Funktion

$$v_1(t) = 0{,}25 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 3{,}25$$

b) Leiten Sie die Zahlenwerte der Funktion v_1 her.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das lokale Maximum von v_1 bei $M(1|3{,}5)$ liegt und

begründen Sie, warum M nicht das globale Maximum von v ist.

Ein mathematisch interessierter Praktikant des Facharztes bemerkt, dass die Funktion v_1 alternativ auch kürzer in der Form $v_1(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$ dargestellt werden kann.

c) Geben Sie eine alternative Gleichung für v_1 in der Form $v_1(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$ an.

Er vermutet weiter, dass für alle trigonometrischen Funktionen f, g und deren Ableitungen f', g' für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Aussage gilt:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$$

d) Widerlegen Sie die Vermutung des Praktikanten.

Der Facharzt entdeckt in den Notizen seines Praktikanten die folgende Ungleichung:

$$\int_0^3 v_1{}'(t)\,dt < 0$$

e) Bestimmen Sie den Wert des Integrals und

erläutern Sie die Ungleichung im Sachzusammenhang.

Der Praktikant des Facharztes betrachtet den Graphen der Funktion v und behauptet, dass der Abschnitt v_2 durch eine ganzrationale Funktion modelliert werden kann.

f) Erläutern Sie, dass ein ganzrationaler Ansatz für v_2 mindestens vom Grad 5 sein muss und

geben Sie die Bedingungsgleichungen für die Funktion v_2 an.

In einem Fachmagazin findet der Arzt einen Artikel zum Thema Lungenfunktionsanalyse. Diesem entnimmt er, dass sich die tiefe Ausatmung der erwachsenen Patienten in der Regel am besten mit einer Funktion aus der Funktionenschar a_k der Form

$$a_k(t) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot (k \cdot t + 7) - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{13}{4} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq \frac{6}{k} \quad \text{und } 1 \leq k \leq 3$$

beschreiben lässt. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden seit Beginn des Ausatmungsvorgangs und a_k das momentane Lungenvolumen in Litern an.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt t der maximalen Ausatmungsgeschwindigkeit und geben Sie die maximale Ausatmungsgeschwindigkeit in der Einheit Liter pro Sekunde $\left[\frac{l}{s}\right]$ in Abhängigkeit von k an.

Laut dem Artikel im Fachmagazin beträgt die Ausatmungsgeschwindigkeit eines gesunden Patienten für mindestens 60 % der Ausatmungszeit mindestens 0,3 Liter pro Sekunde. Wird dieser Wert unterschritten, ist davon auszugehen, dass der Patient an einer Lungenkrankheit leidet.

h) Ermitteln Sie näherungsweise den größtmöglichen Wert k so, dass die Ausatmungsfunktion a_k auf einen mutmaßlich erkrankten Patienten hindeutet.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Wasserkraft**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	6	7	7	5	6	3	40
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Wasserkraft ist eine der ältesten erneuerbaren Energien. Die Nutzung der Wasserkraft in Form von Wasserrädern geht bis in die Antike zurück. Heute gilt die Wasserkraft weltweit als die Nummer eins bei der Erzeugung von elektrischer Energie aus ressourcenschonenden erneuerbaren Energien.

In Deutschland werden vor allem Laufwasserkraftwerke betrieben. Laufwasserkraftwerke wandeln die kinetische Energie von Flüssen in elektrische Energie um. Die meisten Wasserkraftwerke sind in den abfluss- und gefällereichen Regionen der Mittelgebirge, Voralpen und Alpen zu finden.

Die nachfolgende Grafik (Abbildung 3.1) zeigt den Wasserfluss $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t in Monaten in der Einheit Kubikmeter pro Sekunde $\left[\frac{m^3}{s}\right]$ eines Laufwasserkraftwerkes am Rhein im Jahr 2019. Dabei entspricht $t = 0$ dem 01. Januar 2019.

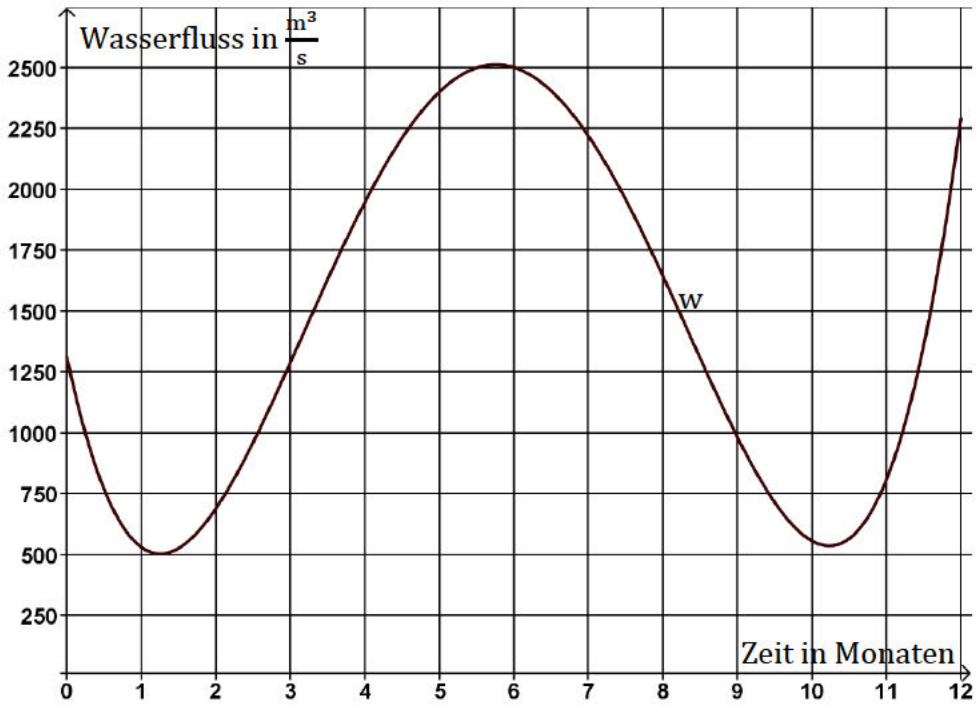


Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.

Nach der Meinung des leitenden Ingenieurs lässt sich der in Abbildung 3.1 dargestellte Graph näherungsweise beschreiben durch die ganzrationale Funktion w mit der Gleichung

$$w(t) = 4{,}9t^4 - 112{,}68t^3 + 774t^2 - 1\,447{,}5t + 1\,310 \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 12.$$

Dabei entspricht $t = 0$ dem 01. Januar 2019.

b) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t der Wasserfluss nach diesem Modell am größten war und

geben Sie das zugehörige Datum und die Höhe des Wasserflusses in $\frac{m^3}{s}$ an.

Die Turbinen können einen Wasserfluss von bis zu 750 $\frac{m^3}{s}$ aufnehmen. Dann sind sie voll ausgelastet. Die darüber hinaus gehende Wassermenge kann für die Energiegewinnung nicht mehr genutzt werden. Ein Laufwasserkraftwerk gilt als effizient, wenn die Turbinen für mindestens 70 % des Jahres voll ausgelastet sind.
Die in Abbildung 3.1 dargestellte jahreszeitlich bedingte Schwankung des Wasserflusses kommentiert ein Auszubildender mit folgenden Behauptungen:

- Anfang April kam es zur stärksten Zunahme des Wasserflusses.
- Das Laufwasserkraftwerk war 2019 ineffizient, weil die Turbinen im Jahr 2019 nicht für die geforderte Zeit voll ausgelastet waren.

c) Prüfen Sie die beiden Behauptungen.

Der leitende Ingenieur sortiert die vorliegenden Daten zum Wasserfluss in $\frac{m^3}{s}$ im Jahr 2019 der Größe nach und erstellt daraus die folgende Grafik (Abbildung 3.2).

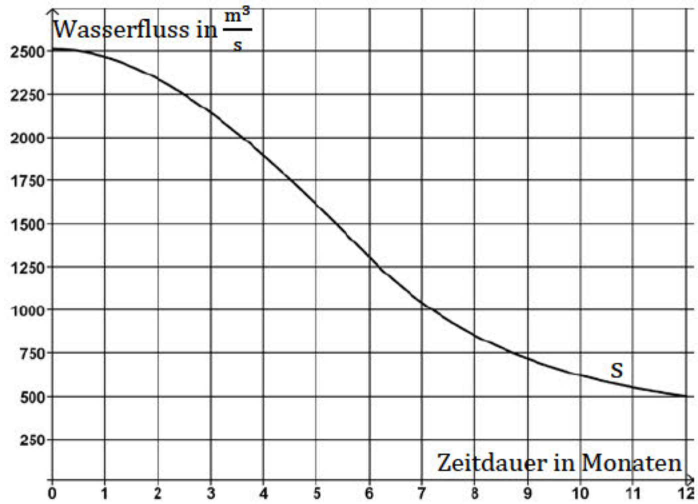


Abbildung 3.2

Seinem Auszubildenden erklärt er, dass diese Grafik die Zeitdauer in Monaten wiedergibt, in der der Wasserfluss in $\frac{m^3}{s}$ im Jahr 2019 mindestens einen bestimmten Wert betragen hat.

Beispielsweise beschreibt der Punkt P(5|1 612), dass für die Zeitdauer von 5 Monaten der Wasserfluss mindestens 1 612 $\frac{m^3}{s}$ betrug.

Der leitende Ingenieur modelliert den Verlauf des Graphen in Abbildung 3.2 durch die folgende abschnittsweise definierte Funktion s mit der Gleichung:

$$s(t) = \begin{cases} 2{,}5298t^3 - 48{,}6667t^2 + 2\,512 & \text{für } 0 \leq t \leq 6 \\ f_a(t) & \text{für } 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

Der zweite Abschnitt soll näherungsweise durch eine Funktion aus der Funktionenschar f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = 6\,890 \cdot \left(e^{-1{,}575 \cdot \frac{1}{a} \cdot t} - e^{-10{,}036 \cdot \frac{1}{a} \cdot t}\right) + 374$$

mit $a > 0$ und der Eulerschen Zahl e beschrieben werden.

d) Begründen Sie im Sachzusammenhang, warum die beiden Abschnitte sprung- und knickfrei ineinander übergehen müssen und

bestimmen Sie den Parameter a so, dass dies näherungsweise erfüllt ist.

Der leitende Ingenieur ermittelt mithilfe der Abbildung 3.2 für das Jahr 2019 näherungsweise einen durchschnittlichen Wasserfluss von 1 420,87 $\frac{m^3}{s}$ pro Monat.

Der Auszubildende hat bei der Überprüfung mit folgendem Term ein Ergebnis von 1 420,52 $\frac{m^3}{s}$ ermittelt:

$$\frac{\square}{\square} \cdot \int_0^{\square} w(t)\,dt$$

e) Vervollständigen Sie den Term zur Berechnung des durchschnittlichen Wasserflusses für das Jahr 2019.

Erläutern Sie, warum der Wert des Auszubildenden vom Wert des Ingenieuers abweicht.

Aus der Berufsschule weiß der Auszubildende, dass die erneuerbaren Energien laut dem „Energiekonzept 2050" weiter ausgebaut werden sollen. Laut einer Studie ist das bestehende Potenzial von Wasserkraft in Deutschland jedoch nahezu ausgeschöpft. Die höchstmögliche installierbare Wasserkraftleistung wird derzeit auf 6 100 Megawatt [MW] geschätzt.

Im Internet findet der Auszubildende Angaben zur installierten Wasserkraftleistung in Megawatt in Deutschland seit 1990. Diese Werte sind in der Tabelle 3.1 dargestellt:

Jahr	1990	2000	2010	2020
Leistung in MW	3 990		5 400	5 697

Tabelle 3.1

Der Auszubildende modelliert die Entwicklung der installierten Wasserkraftleistung in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion p mit der Gleichung

$p(t) = 6\,100 - 2\,110 \cdot e^{-0{,}0552 \cdot t}$ für $t \geq 0$ und e ist die Eulersche Zahl,

wobei p(t) die installierte Wasserkraftleistung in Megawatt angibt und t die Zeit in Jahren. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990.

f) Ergänzen Sie den fehlenden Wert für das Jahr 2000 in der Tabelle 3.1 und

leiten Sie die Gleichung der Funktion p her.

Bis zum Jahr 2050 sollen mindestens 99 % der aktuell angenommenen höchstmöglichen installierbaren Wasserkraftleistung erreicht sein.

g) Beurteilen Sie, ob dieses Ziel nach diesem Modell erreicht werden kann.