Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	3	6	4	3	4	6	4	34
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Im nachfolgenden Koordinatensystem (Abbildung 1.1) ist der Graph einer Funktion f dargestellt.
Skizzieren Sie den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F in das untere Koordinatensystem.

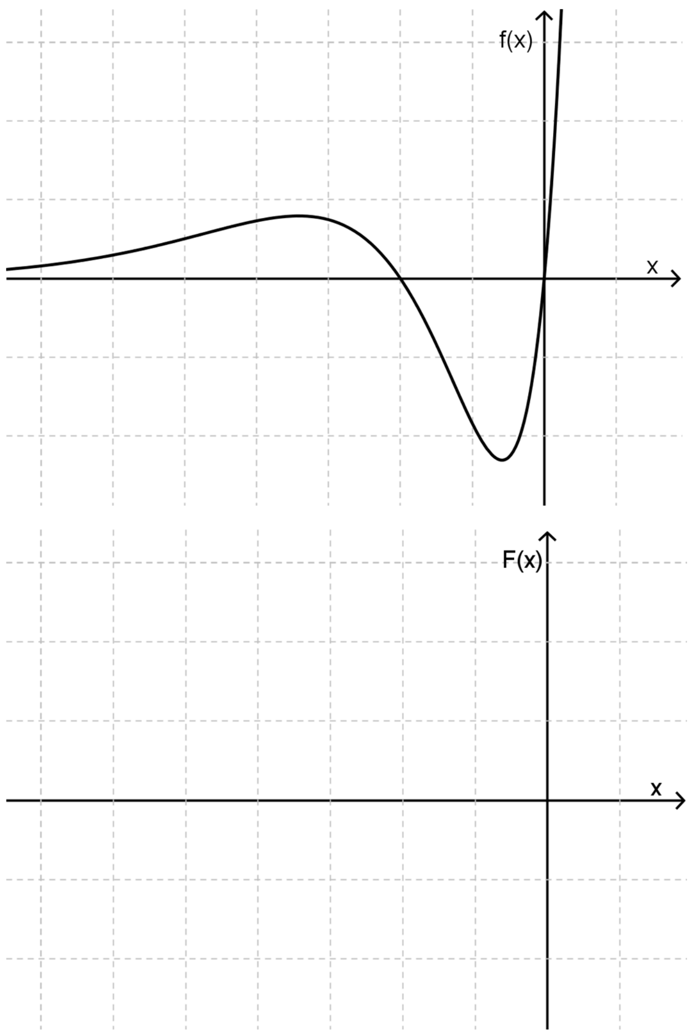


Abbildung 1.1

b) Gegeben ist die Funktion f_{ab} mit der Funktionsgleichung

$$f_{ab}(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x \quad \text{mit } a > 0 \text{ und } b < 0.$$

Bestimmen Sie den Koeffizienten a in Abhängigkeit des Koeffizienten b so, dass der Graph der Funktion f_{ab} mit der x-Achse im IV. Quadranten einen Flächeninhalt von 0,25 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft achsensymmetrisch zur Ordinatenachse, hat im Punkt $A(2|5)$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x = -1$ die Steigung $m = -6$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der zugehörige Funktionsterm kann nicht eindeutig bestimmt werden, da die Anzahl der gegebenen Bedingungen zu gering ist.	
Um die Koeffizienten der Funktion f bestimmen zu können, wird die zweite Ableitungsfunktion benötigt.	
Aus den gegebenen Bedingungen lässt sich unter anderem folgende Gleichung aufstellen: $d = 0$.	

d) Gegeben ist die Funktion f_t mit der Funktionsgleichung

$$f_t(x) = \cos\big(2(x+1)\big) + t.$$

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters t der Graph innerhalb einer Periode die Abszissenachse zweimal oder gar nicht schneidet.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte mit der Abszissenachse.

e) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie der Punkt $C(-2|-2{,}5|1{,}5)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$.

f) Gegeben sind die zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Prüfen Sie, ob auch die Vektoren $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = -\vec{a}$ linear unabhängig sind.

g) Im $\mathbb{R}^3$ ist die Geradenschar $g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix}$ gegeben.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Keine Gerade der Schar verläuft durch den Ursprung.	
Für $a = -1$ verläuft die Gerade parallel zur x_1-x_2-Ebene.	
Es gibt nur eine Gerade der Schar, die die x_1-Achse schneidet.	

h) Gegeben ist die Ebene E_1 mit der Gleichung: $E_1\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$.

- Ermitteln Sie für die Ebene E_1 eine Ebenengleichung in Koordinatenform.
- Begründen Sie, dass die Ebene $E_2\colon x_2 + x_3 = 0$ parallel zur Ebene E_1 ist.
  Der Nachweis, dass die Ebenen nicht identisch sind, ist nicht gefordert.

Punkteverteilung Aufgabe 2: Fun- und Kletterpark

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	3	3	3	7	6	4	7	33
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Der Tourismusverband in einem kleinen österreichischen Skigebiet plant für die Sommergäste in Höhe der Mittelstation einen Fun- und Kletterpark zu errichten. Zunächst soll eine Seilrutsche aufgebaut werden, die im Zick-Zack-Kurs von einer Talseite zur anderen führt.

Der Chef des Tourismusverbandes hat bereits eine nicht maßstabsgetreue Skizze (Abb. 2.1) erstellt, sowie einige Eckdaten ermitteln lassen. Alle Zahlenwerte sind in Metern angegeben.

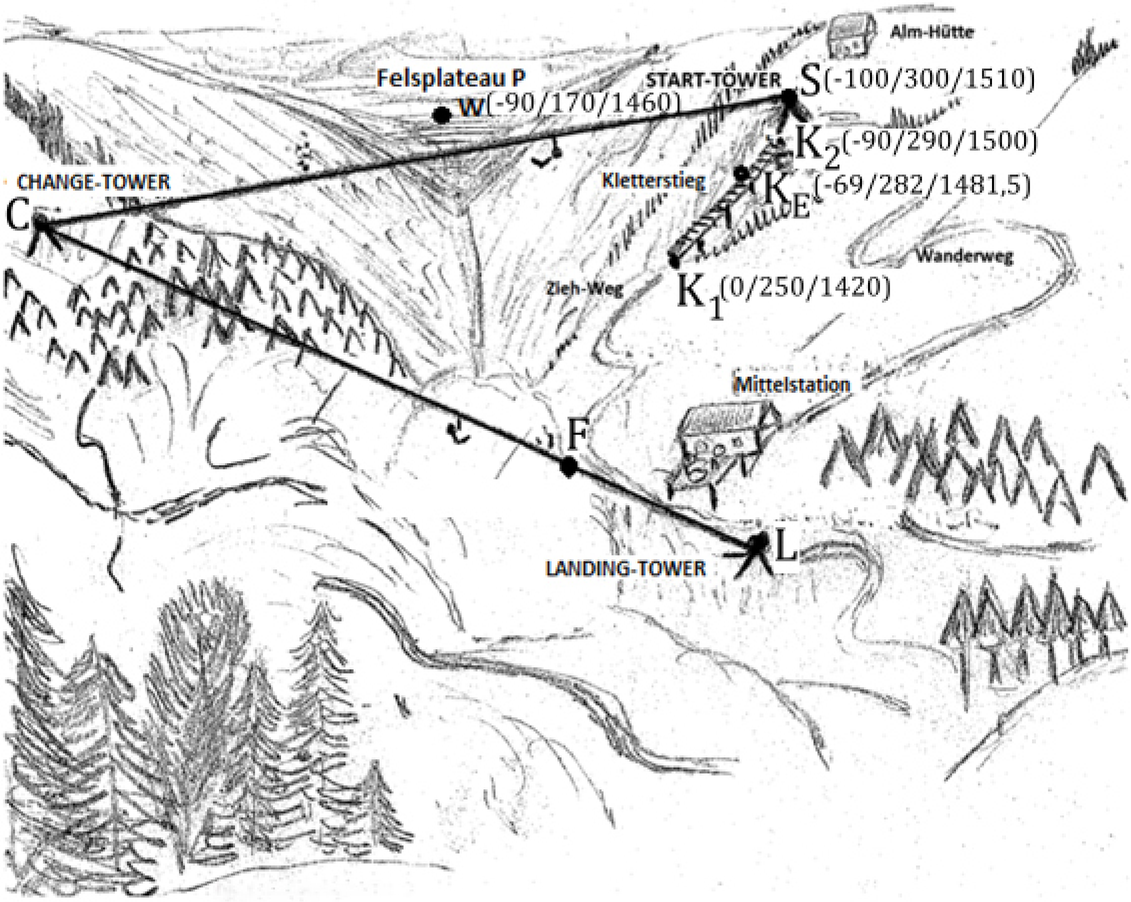


Abbildung 2.1: Entwurf einer Übersichtsskizze des Fun- und Kletterparks (nicht maßstäblich)

Der Start-Tower soll in der Nähe der Alm-Hütte auf einem bereits vorhandenen Betonfundament aufgebaut werden. Dorthin gelangt man nur über einen langen Wanderweg. Der Chef des Tourismusverbandes schlägt daher vor, einen Klettersteig vom Punkt $K_1(0|250|1420)$ als durchgehende, geradlinige Treppenkonstruktion (ohne Podeste) bis zum Punkt $K_2(-90|290|1500)$ unterhalb des Start-Towers zu errichten (Abb. 2.2).

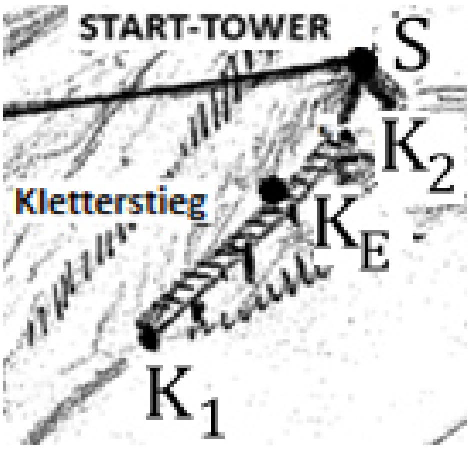


Abb. 2.2: Detailskizze des Klettersteigs

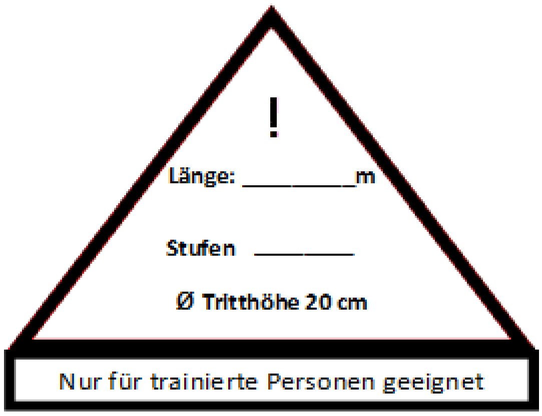


Abb. 2.3: Geplantes Hinweisschild am Klettersteig

a) Ermitteln Sie die fehlenden Angaben auf dem Hinweisschild (Abb. 2.3).

In einem Umkreis von ca. 1,5 m um den Punkt $K_E(-69|282|1481{,}5)$ lässt sich ein besonders schönes Echo erzeugen.

b) Prüfen Sie, ob Gäste des Fun- und Kletterparks auf dem Klettersteig die Möglichkeit haben dieses Echo zu erzeugen.

Die Seilrutsche soll von der Spitze des Start-Towers $S(-100|300|1510)$ in Richtung $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ über den Change-Tower C im Zickzack-Kurs zum Landing-Tower L unterhalb der Mittelstation führen. Für die Seilrutsche gilt aus Sicherheitsgründen, dass das Gefälle nicht mehr als 35 % gegenüber der Horizontalen betragen sollte.

c) Berechnen Sie die x_3-Koordinate des Vektors $\overrightarrow{SC}$ so, dass das größtmögliche Gefälle erreicht wird, aber die Sicherheitsbestimmung für die Strecke vom Start-Tower S zum Change-Tower C eingehalten wird.

Der Start der Seilrutsche erfolgt von einer Rampe, die zwei Meter unterhalb der Spitze S am Start-Tower im Punkt A befestigt ist. Die Gäste nehmen in Richtung des Punktes R Anlauf. Damit beträgt die maximale Anlauflänge ca. 2,5 Meter.
Die gestrichelt dargestellte Linie zwischen den Punkten A und R stellt die lotrechte Projektion des Seiles auf die Rampe dar. Gleichzeitig ist sie die Symmetrielinie der Rampe.
Als weitere Eckpunkte sind $E_1(-101{,}75|297{,}35|1506{,}45)$ und $E_2(-97{,}01|298{,}93|1506{,}45)$ vorgesehen.

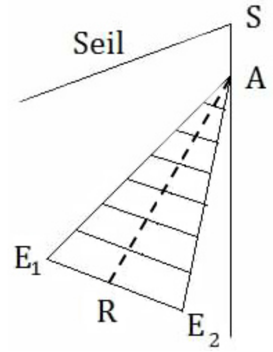


Abb. 2.4: Start-Tower mit Rampe

Der TÜV hat jedoch die maximale Anlauflänge von nur ca. 2,5 Metern beanstandet und fordert stattdessen eine Verdoppelung der Anlauflänge.

d) Zeigen Sie, dass die maximale Anlauflänge ca. 2,5 Meter beträgt.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte E_1' und E_2' (in Verlängerung der Vektoren $\overrightarrow{AE_1}$ bzw. $\overrightarrow{AE_2}$), so dass die Forderung des TÜV auf Verdoppelung der Anlauflänge erfüllt wird.

Ursprünglichen Planungen zufolge sollte im Punkt $F(300|525|1185)$ der Endpunkt des Seiles liegen. Der Chef des Tourismusverbandes möchte für den Fun- und Kletterpark aber unbedingt mit der längsten Seilrutsche Europas (mindestens 1,2 km) werben. Daher fordert er, dass die Seilrutsche zwischen dem Change-Tower C und dem Landing-Tower L über den Punkt F hinaus um ein Drittel länger wird, als sie zwischen dem Change-Tower C und dem Landing-Tower in F geworden wäre. Aufgrund der landschaftlichen Verhältnisse wird der Verlauf der Seilrutsche zwischen dem Change-Tower C und dem Landing-Tower L mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{CL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Für den Abschnitt zwischen Start- und Change-Tower wurde die Richtung des Seiles entlang des Vektors $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ festgelegt.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten der Spitze des Change-Towers C und die Koordinaten der Spitze des Landing-Towers L.

Prüfen Sie, ob der Chef des Tourismusverbandes mit der längsten Seilrutsche Europas werben kann.

Im mittleren Drittel des Abschnittes vom Start- zum Change-Tower verläuft die Seilrutsche nahe eines ansteigenden ebenen Felsplateaus (Abb. 2.5). Dieses Felsplateau P verläuft durch die Punkte $P_1(-50|180|1360)$, $P_2(-80|205|1420)$ und $P_3(-100|200|1470)$.

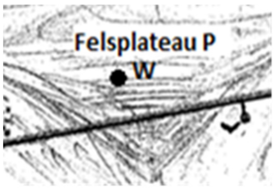


Abb. 2.5: Detailskizze des Felsplateaus

f) Stellen Sie die Normalenform der Ebenengleichung auf, die das Felsplateau beschreibt.

Erläutern Sie, wie durch Rechnung geprüft werden kann, dass eine beliebige Gerade echt parallel zu einer Ebene verläuft.

Auf diesem Felsplateau soll im Punkt $W(-90|170|1460)$ ein lotrechter Mast errichtet werden, an dem eine Hochleistungswebcam befestigt werden soll. Mit dieser Kamera sollen die Besucher fotographiert werden, wenn diese auf der Seilrutsche den kürzesten Abstand zur Kamera haben. Der Fokus der Kamera ist so eingestellt, dass die Kamera bei einer Entfernung des zu fotographierenden Objekts von 32 Metern die besten Aufnahmen macht. Allerdings hängt die Qualität der Kameraaufnahmen auch wesentlich von der Geschwindigkeit der Seilrutschenbenutzer ab. Ab einer Geschwindigkeit von 8 $\frac{m}{s}$ werden die Bilder unscharf.
Die nachfolgende Graphik zeigt die Geschwindigkeit eines Besuchers auf der Seilrutsche in Abhängigkeit der Höhenabnahme, wenn er nicht abgebremst wird. Dabei ist $v(0) = 0$ die Geschwindigkeit am Start und $v(100)$ gibt die Geschwindigkeit im 100 Meter tiefer gelegenem Change-Tower an.

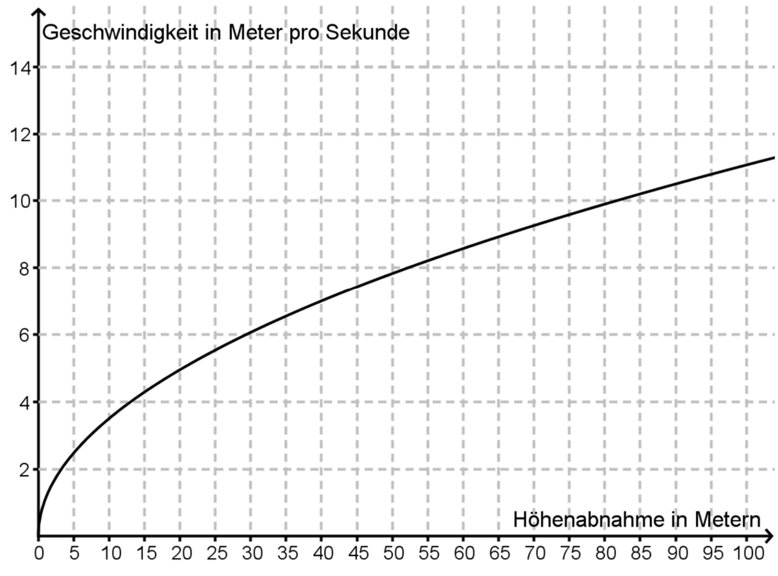


Abb. 2.6: Geschwindigkeit der Seilrutscher in Abhängigkeit der Höhenabnahme

g) Bestimmen Sie die Länge des Mastes, an dem die Kamera befestigt werden soll, damit der Abstand zu den vorbei rutschenden Besuchern genau 32 Meter beträgt.

Beurteilen Sie, ob der Einsatz der Kamera sinnvoll sein wird.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	4	3	6	4	4	3	3	3	4	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Im nachfolgenden Koordinatensystem (Abbildung 1.1) ist der Graph einer Funktion f dargestellt.
Skizzieren Sie den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F in das untere Koordinatensystem.

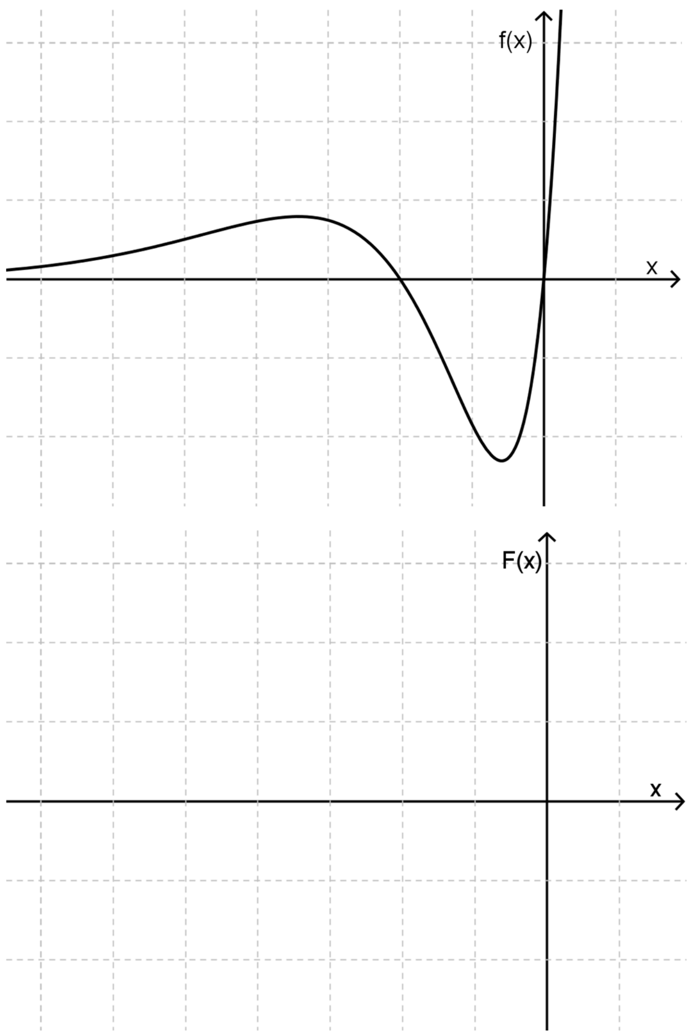


Abbildung 1.1

b) Gegeben ist Funktion f_{ab} mit der Funktionsgleichung

$$f_{ab}(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x \text{ mit } a > 0 \text{ und } b < 0.$$

Bestimmen Sie den Koeffizienten a in Abhängikeit des Koeffizienten b so, dass der Graph der Funktion f_{ab} mit der x-Achse im IV. Quadranten einen Flächeninhalt von 0,25 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft achsensymmetrisch zur Ordinatenachse, hat im Punkt $A(2|5)$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x = -1$ die Steigung $m = -6$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der zugehörige Funktionsterm kann nicht eindeutig bestimmt werden, da die Anzahl der gegebenen Bedingungen zu gering ist.	
Um die Koeffizienten der Funktion f bestimmen zu können, wird die zweite Ableitungsfunktion benötigt.	
Aus den gegebenen Bedingungen lässt sich unter anderem folgende Gleichung aufstellen: $d = 0$.	

d) Gegeben ist die Funktion f_t mit der Funktionsgleichung

$$f_t(x) = \cos\big(2(x+1)\big) + t.$$

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters t der Graph innerhalb einer Periode die Abszissenachse zweimal oder gar nicht schneidet.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte mit der Abszissenachse.

e) Untersuchen Sie, für welche Werte des Koeffizienten a das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcr} 1x - 2y + 1z & = & -5 \\ 1y + 3z & = & 1 \\ (a^2 - 2a) \cdot z & = & a \end{array}$$

e1) eindeutig lösbar,
e2) mehrdeutig lösbar und
e3) nicht lösbar ist.

Geben Sie für $a = -2$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

f) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & 0 \\ -4 & d & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 12 \\ 0 & 6 & 12 \\ -16 & -8 & -22 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Matrixelemente a, b, c und d so, dass $2 \cdot A^2 = B$ gilt.

g) Ermitteln Sie eine mögliche Matrix X, für die die folgende Matrizengleichung gilt:

$$X \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

h) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Jede Matrix hat eine zugehörige inverse Matrix.		
Wenn die quadratischen Matrizen A und B vom gleichen Typ sind, dann gilt: $(A \cdot B^{-1})^T = (B^{-1})^T \cdot A^T$.		
Hat die Matrizengleichung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ einen von Null verschiedenen Lösungsvektor $\vec{x}$, so ist der Vektor $\vec{x}$ Fixvektor zur Matrix M.		

i) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2a & a \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & a \\ \frac{3}{2}a & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

Ermitteln Sie die Matrix X in der Matrizengleichung $A \cdot X + B = A$.

Bestimmen Sie das Matrixelement a so, dass $A^{-2} + B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ gilt.

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Möbelhaus**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	3	5	5	6	5	6	3	33
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Das Möbelhaus „Besondere Einrichtungen für Individualisten" (kurz: „BEfI") plant sein Sortiment mit Regalkombinationen zu erweitern, denn in den letzten Monaten konnte eine zunehmende Abwanderung von Kunden zu den anderen Möbelhäusern „AEKI" und „Borde & Regale" (B&R) festgestellt werden. Beobachtet wurde das monatliche Wechselverhalten exemplarisch an jeweils 300 Kunden der drei Möbelhäuser. Das monatliche Wechselverhalten der Kundschaft (Beobachtungsbeginn: 01. Oktober 2014) wurde in der folgenden Tabelle 2.1 erfasst:

monatliches Wechselverhalten der Kunden		von „BEfI"	von „AEKI"	von „B&R"
zu	„BEfI"	0,70	0	0,10
	„AEKI"	0,30	0,90	0,10
	„B&R"	0	0,10	0,80

Tabelle 2.1

a) Geben Sie an, wie die Kunden drei Monate nach Beobachtungsbeginn verteilt sein werden.

Zeigen Sie, dass sich drei Monate nach Untersuchungsbeginn der Kundenbestand im Möbelhaus „BEfI" um mehr als 40 % reduziert hat.

Der Geschäftsführer des Möbelhauses „AEKI" behauptet, dass die Kundenzahl seines Möbelhauses dank einer Sortimentsumstellung seit dem 01. September 2014 kontinuierlich gewachsen ist und zukünftig immer mehr Kunden des Möbelhauses „BEfI" zu seinem Möbelhaus wechseln werden.
Er ist der Auffassung, dass langfristig das Möbelhaus „AEKI" Marktführer unter den drei genannten Möbelhäusern sein wird.
Auf Grundlage der vorliegenden Daten in Tabelle 2.1 hat der Geschäftsführer deshalb eine Matrix M erstellt, mit deren Hilfe die zukünftige Verteilung der 900 Kunden beschrieben werden soll und dabei Folgendes festgestellt:

$$\mathrm{M}^{48} \approx \mathrm{M}^{60} \approx \lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^{n} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

b) Beurteilen Sie die Aussagen des Geschäftsführers des Möbelhauses „AEKI" unter der Voraussetzung, dass das monatliche Wechselverhalten der Kundschaft auch schon im September 2014 galt und auch zukünftig durch die Tabelle 2.1 beschrieben werden kann.

Um die Kunden nachhaltiger an das Möbelhaus „BEfI“ zu binden, sollen zunächst zwei verschiedene Regalkombinationen (RK1 und RK2) in das Sortiment aufgenommen werden.
Zur Herstellung dieser Regalkombinationen werden aus senkrechten Stützen (S), Regalböden (B) und Stabilisierungskreuzen (K) einzelne Regalelemente (RE1, RE2, RE3) als Zwischenprodukte hergestellt, so dass in einem weiteren Produktionsschritt daraus die Regalkombinationen RK1 und RK2 zusammengestellt werden.
(Der Aufbau eines Regalelementes ist beispielhaft in Abb. 2.1 dargestellt.)

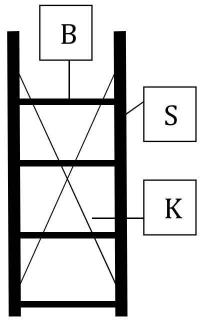


Abbildung 2.1: Regalelement RE1

Die folgenden Tabellen geben die Stückzahlen der benötigen Bauteile (Tab. 2.2) bzw. die Zwischenprodukte im Produktionsprozess (Tab. 2.3) und die Rohstoffkosten (Tab. 2.4) an:

	RE1	RE2	RE3
S	2	2	2
B	4	5	2
K	1	0	0

Tabelle 2.2

	RE1	RE2	RE3
RK1	1	1	0
RK2	1	2	1

Tabelle 2.3

	Rohstoffkosten in €/Stk.
S	27,50 €
B	18,00 €
K	7,90 €

Tabelle 2.4

Es sollen für einen Kunden, der ein Großraumbüro einrichten möchte, 60 Regalkombinationen RK1 und 80 Regalkombinationen RK2 in einer Lieferung zusammengestellt werden. Für diese Lieferung werden die Fixkosten mit 1 700,00 € und die Fertigungskosten mit 6 380,00 € veranschlagt, die Rohstoffkosten können mit Hilfe der Tabelle 2.4 ermittelt werden.

c) Berechnen Sie für diesen Fall den gesamten Bedarf an Stützen, Böden und Kreuzen.

Ermitteln Sie die Kosten für diese komplette Lieferung.

Die Verflechtungen für die Produktion der Regalkombinationen RK1 und RK2 sind in der Tabelle 2.5 dargestellt.
Die Rohstoffkosten (S, B, K), die Fertigungskosten der Stufe 1 (z.B. Lackieren der Böden und Stützen) und der Stufe 2 (z. B. Zusammenstellen der Regalelemente zu Regalkombinationen) sind in der Tabelle 2.6 in Euro je Einheit dargestellt.
Die Herstellungskosten der Regalkombinationen setzen sich aus den Rohstoffkosten und den Kosten der Fertigungsstufen 1 und 2 zusammen.

	RK1	RK2
S	4	8
B	9	16
K	1	1

Tabelle 2.5

Rohstoffkosten			Kosten - Fertigungsstufe 1			Kosten - Fertigungsstufe 2	
S	B	K	RE1	RE2	RE3	RK1	RK2
27,50	18,00	7,90	a	11,00	12,00	0,8a	14,00

Tabelle 2.6

d) Berechnen Sie den Wert a so, dass die Herstellungskosten für zehn Regalkombinationen RK1 und 15 Regalkombinationen RK 2 einen Wert von 11 697,50 € nicht übersteigen.

Geben Sie für diesen Fall die in der Fertigungsstufe 1 anfallenden Kosten für das Regalelement RE1 und die in der Fertigungsstufe 2 anfallenden Kosten für die Regalkombination RK1 an.

Aus den im Lager noch vorhandenen Stützen, Böden und Kreuzen können noch andere Regalelemente (RE4, RE5) zusammengesetzt werden und zu weiteren Regalkombinationen (RK3, RK4) zusammengestellt werden (siehe Abb. 2.2).
Die jeweilige Anzahl der Böden, Stützen und Kreuze, die für die Regalkombinationen RK3 und RK4 benötigt werden, ist in Tabelle 2.7 zusammengestellt.

	RK3	RK4
S	10	14
B	23	32
K	5	7

Tabelle 2.7

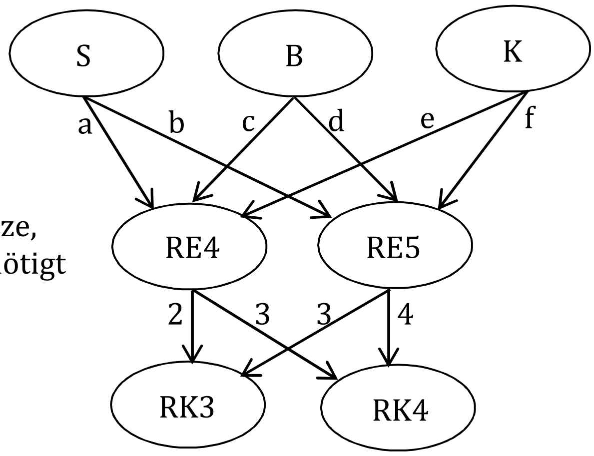


Abbildung 2.2

e) Bestimmen Sie die Anzahl der Stützen, Böden und Kreuze, die insgesamt für zehn Regalelemente RE4 und 20 Regalelemente RE5 benötigt werden.

Der Kunde möchte auch einen Lagerraum mit mindestens 25 Spezial-Regalkombinationen ausstatten. Diese Spezial-Regalkombinationen bestehen jeweils aus drei Stützen, sechs Böden und einem Kreuz (Abb. 2.3).
Im Lager des Möbelhauses „BEfI“ befinden sich noch insgesamt 45 Pakete für die Regalelemente RE1, RE2 und RE3 (siehe auch Tab. 2.2).
Für die Lieferung der Spezial-Regalkombinationen an den Kunden soll dieser Lagerbestand möglichst aufgebraucht werden.

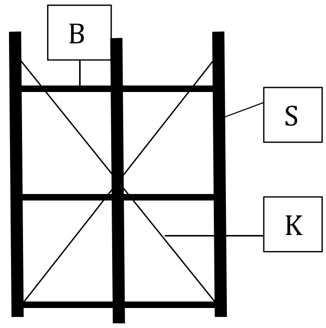


Abbildung 2.3

Ein BWL-Student, der sein Praktikum im Möbelhaus „BEfI“ absolviert, behauptet, dass er mit Hilfe der Tabelle 2.2 eine Matrix A aufstellen kann, um dann mit der zugehörigen inversen Matrix dieses Problem zu lösen.

f) Begründen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und geben Sie die Matrix A^{-1} an.

Erläutern Sie, wie mit Hilfe der Matrix A^{-1} die jeweilige Anzahl der Regalelemente RE1, RE2 und RE3, die für die Herstellung dieser Spezial-Regalkombination (Abb. 2.3) benötigt werden, berechnet werden kann.

g) Prüfen Sie, ob die Anzahl der vorhandenen 45 Pakete (RE1, RE2 und RE3) für die Herstellung dieser Spezial-Regalkombinationen (Abb. 2.3) ausreichend ist, um restlos für diese Lieferung aufgebraucht werden zu können.

Geben Sie an, wie viele Pakete der Regalelemente RE1, RE2 und RE3 jeweils vorhanden sein müssten, um den Lagerbestand für die Regalkombinationen (Abb. 2.3) aufzubrauchen und wie viele Regalkombinationen der Kunde in diesem Fall maximal erhalten kann.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	4	3	6	4	3	2	3	6	3	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Im nachfolgenden Koordinatensystem (Abbildung 1.1) ist der Graph einer Funktion f dargestellt.
Skizzieren Sie den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F in das untere Koordinatensystem.

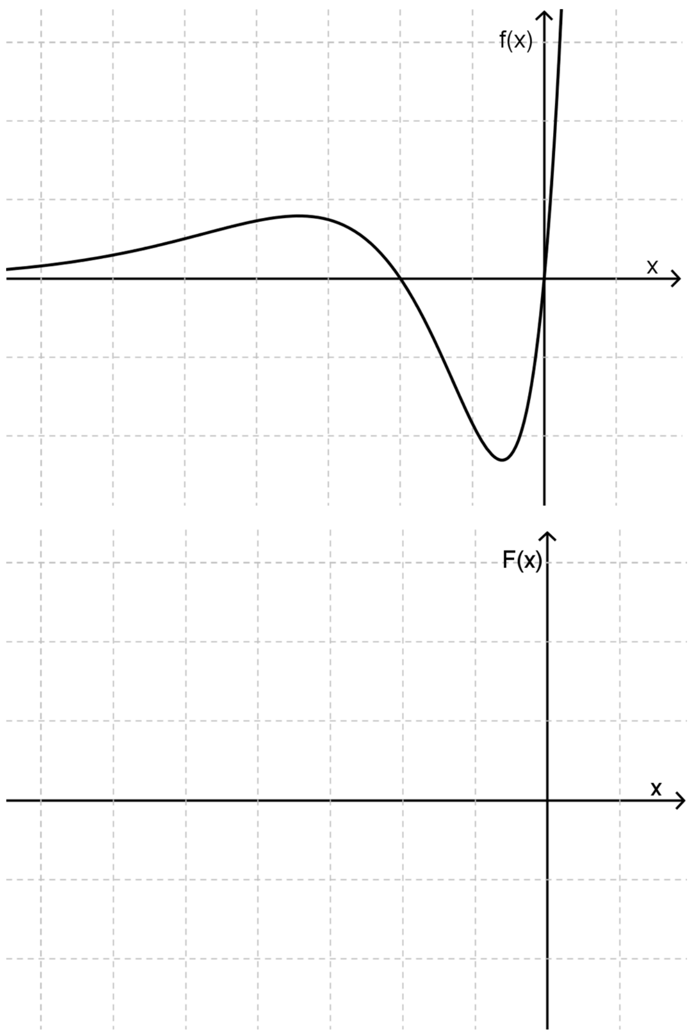


Abbildung 1.1

b) Gegeben ist Funktion f_{ab} mit der Funktionsgleichung

$$f_{ab}(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x \quad \text{mit } a > 0 \text{ und } b < 0.$$

Bestimmen Sie den Koeffizienten a in Abhängigkeit des Koeffizienten b so, dass der Graph der Funktion f_{ab} mit der x-Achse im IV. Quadranten einen Flächeninhalt von 0,25 Flächeneinheiten (FE) einschließt.

c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft achsensymmetrisch zur Ordinatenachse, hat im Punkt $A(2|5)$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x = -1$ die Steigung $m = -6$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der zugehörige Funktionsterm kann nicht eindeutig bestimmt werden, da die Anzahl der gegebenen Bedingungen zu gering ist.	
Um die Koeffizienten der Funktion f bestimmen zu können, wird die zweite Ableitungsfunktion benötigt.	
Aus den gegebenen Bedingungen lässt sich unter anderem folgende Gleichung aufstellen: $d = 0$.	

d) Gegeben ist die Funktion f_t mit der Funktionsgleichung

$$f_t(x) = \cos\big(2(x+1)\big) + t.$$

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters t der Graph innerhalb einer Periode die Abszissenachse zweimal oder gar nicht schneidet.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte mit der Abszissenachse.

e) Es liegt ein Glücksspiel vor, bei dem man entweder einen Hauptgewinn, einen Trostpreis oder Niete ziehen kann. Das Ereignis Hauptgewinn sei H, das Ereignis Trostpreis sei T und das Ereignis Niete sei N.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
$0 < P(T) < 1$		
$P(H) + P(T) + P(N) = 1$		
Aus $P(H \cup T) = P(H) + P(T) - P(H \cap T)$ folgt: $P(H \cap T) > 0$.		

f) Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit der Standardabweichung $\sigma = 2$ und dem Erwartungswert $\mu = -1$. Es gilt:

$$P(X \leq a) = 0{,}67.$$

- Bestimmen Sie den Parameter a.
- Bestimmen Sie $P(X > 0{,}5)$.

g) Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A durch $P(A) = 0{,}6$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass vorher das Ereignis A schon eingetreten ist durch $P_A(B) = P(B|A) = 0{,}3$ und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass vorher schon das Gegenereignis $\overline{A}$ eingetreten ist durch $P_{\overline{A}}(B) = P(B|\overline{A}) = 0{,}8$ gegeben.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass vorher das Ereignis B eingetreten ist ($P_B(A) = P(A|B)$).

h) Die abgebildeten Glücksräder stehen auf einem Jahrmarkt und werden beide gleichzeitig gedreht. Die beiden Ergebnisse werden miteinander addiert. Es wird also die Zufallsvariable X: „Zahlensumme beider Glücksräder“ betrachtet. Das rechts abgebildete Histogramm stellt dabei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X dar.

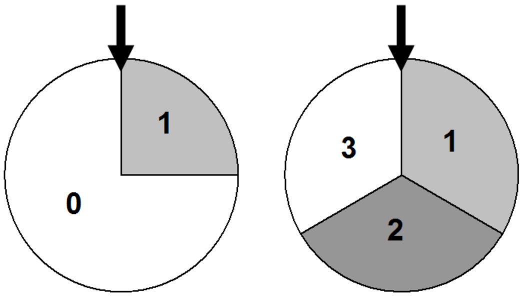


Abbildung 1.2

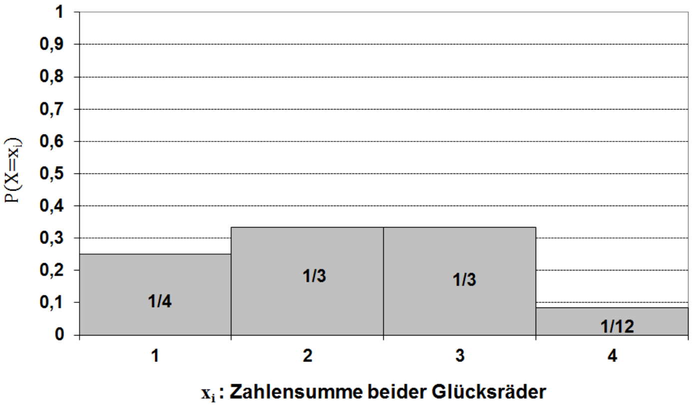


Abbildung 1.3

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Erwartungswert der Zufallsvariablen beträgt 2,5.	
Beim 24-maligen Drehen beider Glücksräder wird zweimal die Zahlensumme vier erwartet.	
Die Wahrscheinlichkeit für eine Zahlensumme größer zwei beträgt genau $\frac{5}{12}$.	

i) Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit $n = 100$ und $p = 0{,}8$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Es gilt: $P(X > 82) = P(\overline{X} \leq 18)$.		
Es gilt: $P(72 \leq X \leq 88) = P(X \leq 88) - P(X < 72)$.		
Es gilt: $P(X \leq 75) = \sum_{i=0}^{75} \binom{100}{i} \cdot 0{,}8^i \cdot 0{,}2^{100-i}$.		

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Discounter**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	3	4	6	4	4	3	4	2	3	33
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Laut einer Umfrage kauften im Jahre 2013 die Bürger Schleswig-Holsteins zu 86,6 % in einer der rund 4 300 Filialen eines großen deutschen Discounters ein.

Im Rahmen eines Projektes am Beruflichen Gymnasium wird die Beliebtheit dieses Discounters in einer Schleswig-Holsteiner Kleinstadt untersucht. In der Fußgängerzone dieser Kleinstadt wird deshalb eine Umfrage durchgeführt. Die Passanten werden gefragt, ob sie im Jahre 2014 bei diesem Discounter eingekauft haben.

In der Projektgruppe wird diskutiert, wie die Antworten auszuwerten sind. Einer der Schüler behauptet, dass es sich bei der Anzahl X der Personen, die 2014 bei diesem Discounter eingekauft haben, um eine binomialverteilte Zufallsvariable handelt.

a) Erläutern Sie, inwieweit dieser Schüler Recht hat und welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit bei der Auswertung der Umfrage die Binomialverteilung verwendet werden kann.

Setzen Sie in den folgenden Aufgaben das Vorliegen einer Binomialverteilung voraus.
Es wurden 250 Passanten zufällig ausgesucht und befragt. Die Schüler nehmen an, dass die Passanten der Fußgängerzone das gleiche Einkaufsverhalten (86,6 % kaufen bei diesem Discounter ein) wie die Bürger in der Schleswig-Holstein-Umfrage aus dem Jahr 2013 haben.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- Unter den Befragten hat niemand im Jahr 2014 bei diesem Discounter eingekauft.
- Unter den Befragten haben höchstens 200 Personen bei diesem Discounter eingekauft.
- Unter den Befragten haben genau 45 Personen im Jahr 2014 nicht bei diesem Discounter eingekauft.

Die Projektgruppe vermutet, dass der Anteil der Kunden, der bei diesem Discounter einkauft, unter den Schülern des 11. Jahrgangs nicht bei 86,6 % liegt. Die Schüler sind sich allerdings nicht einig, ob mehr oder weniger Schüler des 11. Jahrgangs bei diesem Discounter kaufen. Während ein Teil argumentiert, dass Schüler wenig Geld haben und daher mehr beim Discounter einkaufen müssen, meint der andere Teil, dass Schüler bewusster einkaufen und daher die Discounter vermeiden.
Aus diesem Grund werden 122 Schüler des 11. Jahrgangs befragt, ob sie im vergangenen Jahr bei diesem Discounter gekauft haben. Bei der Auswertung zeigt sich, dass 93 der befragten Schüler diese Frage mit „ja“ beantwortet haben.

c) Beurteilen Sie mithilfe eines geeigneten Testverfahrens, inwieweit die Annahme, dass 86,6 % der Schüler beim Discounter einkaufen, beibehalten werden kann. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll 1 % betragen.

Eine Vollerhebung zu einem späteren Zeitpunkt ergab, dass tatsächlich 68,3 % der Schüler des 11. Jahrganges bei diesem Discounter einkaufen. Somit ergeben sich für die bei den 122 Schülern durchgeführte Umfrage ein Fehler 1. Art (α-Fehler) in Höhe von ca. 0,47 % und ein Fehler 2. Art (β-Fehler) in Höhe von ca. 1,29 %.

d) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung der beiden Fehlerarten und begründen Sie die Fehlerhöhen.

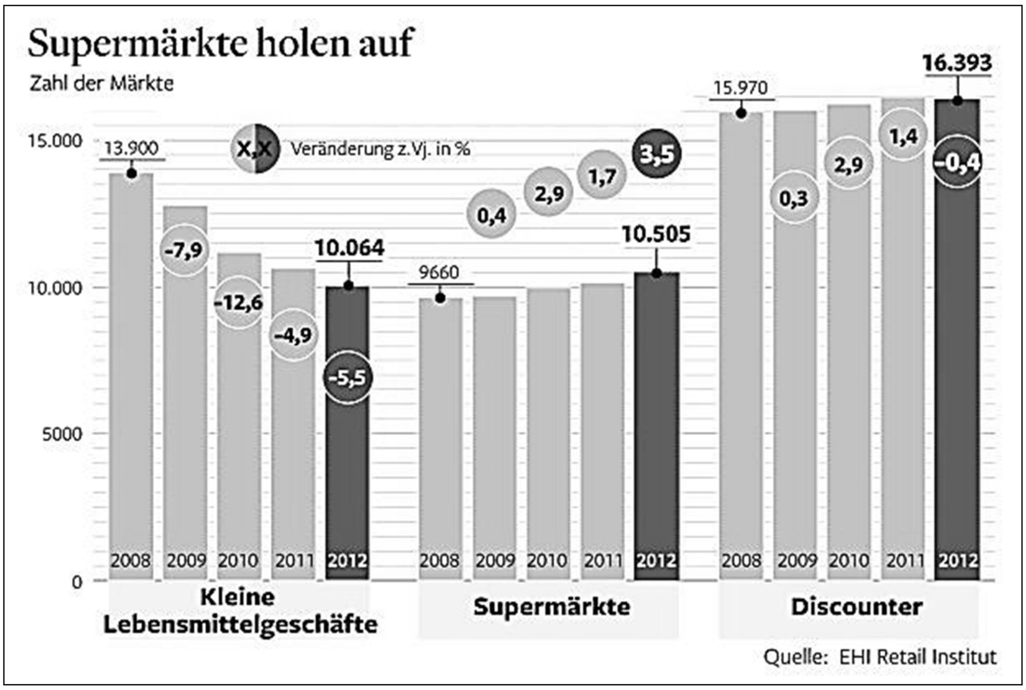
Discounter und Supermärkte bauen häufig in unmittelbarer Nähe und teilen sich einen Parkplatz, da beide davon zu profitieren glauben.
Die Projektgruppe möchte Informationen über die Beliebtheit von Brot aus dem Discounter sammeln und führt deshalb eine Warenkorbuntersuchung auf einem solchen Parkplatz durch. Insgesamt wurden 400 Kunden befragt, die entweder im Discounter oder im Supermarkt eingekauft haben. Mit der Genehmigung der Kunden wird festgestellt und notiert, ob diese Kunden Brot oder kein Brot erworben haben. Außerdem wird notiert, ob dieses beim Discounter oder im Supermarkt gekauft wurde. Die Projektgruppe fand bei insgesamt 150 Kunden Brot. Außerdem kauften 56 Kunden ihr Brot beim Discounter und 26 Personen kauften im Supermarkt ein und erwarben kein Brot.

e) Weisen Sie nach, dass 20 % der Discounterkunden dort auch ihr Brot gekauft haben.

Außerdem interessiert es die Projektgruppe, inwieweit die Gewichtsangaben der Brote tatsächlich der Realität entsprechen. Hierfür nutzen die Schüler Statistiken der Brotfabrik, die den Discounter beliefert. Die Standardabweichung in der Brotproduktion beträgt laut dieser Statistik 7,5 g, wenn erwartet wird, dass ein Brot im Durchschnitt 500 g wiegt.
Brot, dessen Gewicht stärker als 3 % von der Gewichtsvorgabe abweicht, darf laut einer EU-Richtlinie nicht in den Handel kommen.
Nehmen Sie an, dass es sich bei dem Gewicht des Brotes um eine normalverteilte Zufallsgröße handelt.

f) Ermitteln Sie den prozentualen Ausschussanteil.

Laut eines Berichtes erreichen die klassischen Discounter mittlerweile ihre Wachstumsgrenzen.



(Quelle: Der Abdruck erfolgt mit freundlicher Genehmigung der EHI Retail Institute GmbH, Köln)

Abbildung 2.1

g) Erläutern Sie die abgebildete Graphik und
beurteilen Sie, inwieweit der Titel „Supermärkte holen auf" durch die Daten gerechtfertigt ist.

Die Projektgruppe möchte die Entwicklung bei den kleinen Lebensmittelgeschäften mithilfe einer Exponentialfunktion beschreiben, um hieraus Prognosen für die Zukunft zu erstellen. Hierzu wurde näherungsweise die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 13900 \cdot e^{-0{,}0807 \cdot x}$$

ermittelt. Das Jahr 2008 entspricht $x = 0$, wobei x für die Zeit in Jahren und f(x) für die Anzahl der kleinen Lebensmittelgeschäfte steht.

h) Erläutern Sie, wie die Projektgruppe vorgegangen sein könnte, um die Gleichung der Funktion f zu ermitteln.

i) Beurteilen Sie anschließend die Güte dieser Modellierung.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 3 (Alternative 1): Stromtrasse auf dem Hang**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	2	1	4	5	3	4	3	5	6	33
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter a, b, c, … $\in \mathbb{R}$ und die Variablen x, t, … $\in \mathbb{R}$.

Seit der Novellierung des Atomgesetzes im Jahr 2011 ist der Atomausstieg in Deutschland beschlossene Sache. Eine der größten Herausforderungen bei der vermehrten Stromgewinnung durch erneuerbare Energien, beispielsweise durch Windkraftanlagen im Meer, ist der Transport dieser Energie von Nord nach Süd.
Aufgrund der sehr hohen Kosten von Erdkabeln erfolgt dieser Energietransport zumeist über Freiluftleitungen. Hierzu soll u. a. eine Nord-Süd-Trasse (Hochspannungsüberlandleitungen) errichtet werden. Im Verlauf dieser Trasse müssen auch Hänge, wie in der Abbildung 3.1 auszugsweise dargestellt, überquert werden.

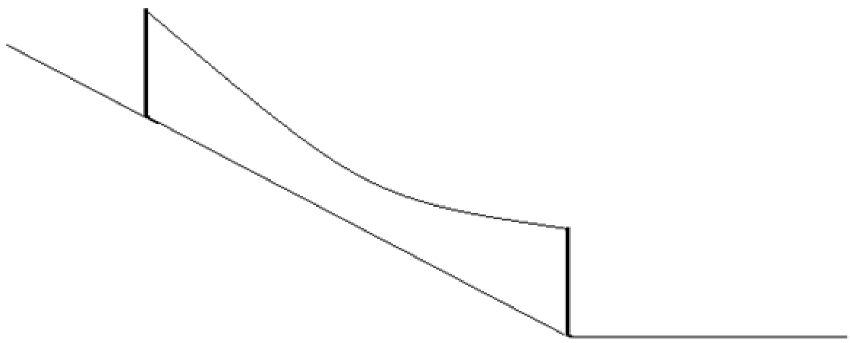


Abbildung 3.1

Die Strommasten am Fuß des Hanges und auf dem Hang selbst sind jeweils 70 Meter hoch und 400 m horizontal voneinander entfernt. Der um 26,6° geneigte Hang, auf dem die Masten errichtet werden sollen, kann in seiner Querschnittdarstellung annähernd als eine Gerade betrachtet werden.

Die Planungsgruppe schlägt daher vor, diesen Querschnitt des Hangs mittels der Funktion p mit der Funktionsgleichung

$$p(x) = -0{,}5 \cdot x$$

zu modellieren, wobei $p(x)$ die Hanghöhe und x die horizontale Entfernung zum Hangfuß jeweils in Metern angeben.

a) Erläutern Sie, warum dieser Modellierungsansatz geeignet ist.

Die durchhängende Stromleitung kann näherungsweise mittels der Funktion l mit der Funktionsgleichung:

$$l(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{2 \cdot x - 5680}{985}} + e^{-\left(\frac{2 \cdot x - 5680}{985}\right)}\right) - 90$$

mit l(x) als Höhe über dem Hangfuß und x als horizontale Entfernung zum Hangfuß jeweils in Metern modelliert werden. Aus Vereinfachungsgründen wird gewünscht, diesen Kurvenverlauf durch eine quadratische Funktionsgleichung anzunähern. Die Parabel soll durch die Spitzen der beiden Masten verlaufen und 100 m vor dem rechten Mast die gleiche Tangentialsteigung wie bei der Modellierung durch l aufweisen.

b) Weisen Sie nach, dass die Tangentialsteigung 100 m vor dem rechten Mast $m_t \approx -0{,}4$ beträgt.

c) Zeigen Sie, dass sich auf der Grundlage der Modellierungsvorgaben ein lineares Gleichungssystem aufstellen lässt, aus dem sich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{2000}x^2 - \frac{3}{10}x + 70$$

ermitteln lässt.

In den Unterlagen der Planungsgruppe befindet sich folgende Notiz:

An den Stellen x_1 und x_2 gilt: $g(x) = l(x)$ mit $x_1, x_2 \in [-400; 0]$

$$\frac{1}{400} \cdot \left(\int_{-400}^{x_1}(g(x) - l(x))dx + \int_{x_1}^{x_2}(l(x) - g(x))dx + \int_{x_2}^{0}(g(x) - l(x))dx\right) = 0{,}68$$

Abbildung 3.2

d) Ermitteln Sie x_1 und x_2.

Interpretieren Sie den formalen Ausdruck im Sachkontext.

Bewerten Sie, wie gut die Alternativmodellierung durch die Funktion g im Vergleich zur ursprünglichen Modellierung durch die Funktion l den Kurvenverlauf der Leitung beschreibt.

Der Hang, auf dem die Strommasten errichtet wurden, ist mit Fichten bewaldet. Der senkrechte Sicherheitsabstand zwischen den Baumspitzen und der Freileitung muss mindestens 5 m betragen, daher wird eine Maximalhöhe von 45 m für den Baumbewuchs festgelegt.

e) Prüfen Sie auf Grundlage der Funktionen g und p, ob die Maximalhöhe mit 45 m richtig festgelegt wurde.

Ab einem bestimmten Alter (dem Ende der sogenannten Jugendphase) lässt sich das Wachstum von Bäumen durch eine Funktion H mit der Gleichung der Art:

$$H(t) = S + (A - S) \cdot e^{-k \cdot t}$$

beschreiben, wobei H(t) die Höhe in Metern und t die Zeit in Jahren nach Ende der Jugendphase angibt.

f) Erläutern Sie, welche Bedeutung die Parameter A und S allgemein auf den Verlauf des Funktionsgraphen haben.

Geben Sie an, wofür A und S im Zusammenhang mit dem Sachkontext stehen.

Die ältesten der vorhandenen Fichten befinden sich am Ende der Jugendphase und haben aktuell eine Höhe von 10 m. Die momentane Höhenänderungsrate beträgt jetzt 0,4 Meter/Jahr und wird sich in 60 Jahren auf 0,2 Meter/Jahr halbiert haben.

g) Entscheiden Sie auf der Grundlage eigener Berechnungen, ob der Sicherheitsabstand von den Fichten langfristig eingehalten wird, wenn diese maximal 45 m hoch werden dürfen.

Regelmäßiger Baumschlag soll sicherstellen, dass die Bäume hinreichend Platz zur Entwicklung haben. Für die Vermarktung des Fichtenholzes sind das Volumen und damit auch der Stammdurchmesser entscheidend. Vereinfachend kann für eine Fichte die momentane Änderungsrate des Stammdurchmessers in cm/Jahr in Abhängigkeit vom Alter in Jahren wie nebenstehend in Abbildung 3.3 graphisch dargestellt werden.

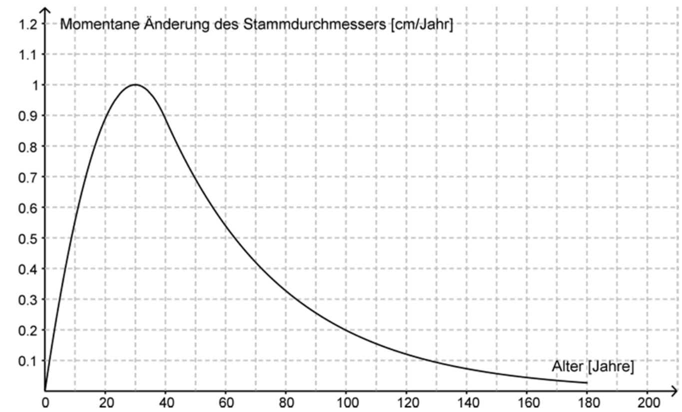


Abbildung 3.3

Laut Aussage eines Forstwirtes kann dieses durch eine Funktion f mit einer Gleichung der Form

$$f(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t} \quad \text{mit } a, b \neq 0$$

beschrieben werden, wobei f(t) die momentane Stammdurchmesseränderung in cm/Jahr und t die Zeit in Jahren angeben soll.

Der Extrempunkt E der Funktion f hat die Koordinaten $E\left(-\frac{1}{b} \middle| -\frac{a}{b \cdot e}\right)$ und es gilt $f''(t) = a \cdot (2b + b^2 \cdot t) \cdot e^{b \cdot t}$.

h) Weisen Sie - ohne Nutzung des CAS - allgemeingültig nach, dass der Extrempunkt die gegebenen Koordinaten hat.

i) Beurteilen Sie, unter Berücksichtigung der Graphik in Abbildung 3.3 und des Hochpunktes, inwieweit die Funktion f mit der angegebenen Gleichung den abgebildeten Zusammenhang angemessen beschreiben kann.

Erläutern Sie hierbei auch, welche Alternative für die grundsätzliche Art der Funktionsgleichung des in Abbildung 3.3 dargestellten Graphen in Frage kommt.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 3 (Alternative 2): Das Riesenrad**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	gesamt
Erreichbar	4	3	3	3	4	2	3	3	5	3	33
Erstkorrektur											
Zweitkorrektur											

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Auf einem Pfingstmarkt soll ein neues mobiles Riesenrad mit einem Durchmesser von 60 m betrieben werden. Der Gondelboden befindet sich hierbei jeweils 3 m unterhalb der Gondelaufhängung am Rad. Nachfolgende Erwähnungen einer „Gondelhöhe" sind gleichbedeutend mit der Höhe der Gondelaufhängung am Rad.
Des Weiteren ist geplant, dass die Drehgeschwindigkeit des Riesenrades 1,885 km/h betragen soll, zudem muss der problemlose Einstieg in die unterste Gondel mit einem Einstiegspodest gewährleistet werden.
Ein Planungsbüro hat folgende Skizze (Abb. 3.1) bereits vorliegen, wobei diese nicht maßstabsgetreu ist.

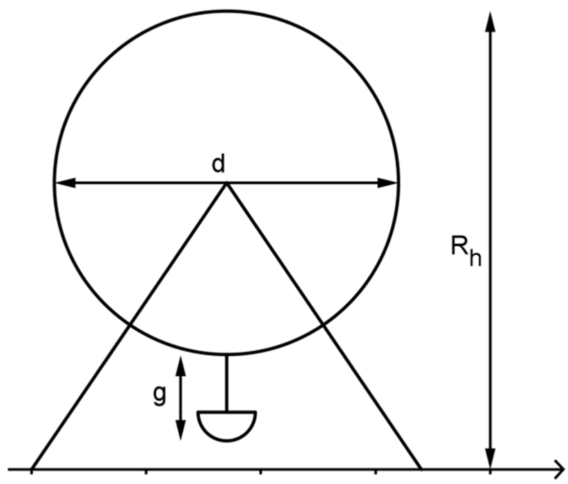


Abbildung 3.1

Für das konkret zu planende Riesenrad wird der Zusammenhang zwischen der Gondelhöhe h(t) in Metern und der Zeit t in Minuten mittels der folgenden Funktionsgleichung beschrieben:

$$h(t) = 30 \cdot \sin\big(b \cdot (t + c)\big) + 34 \text{ mit } t \geq 0.$$

a) Geben Sie die Abmessungen d, g und R_h (Abb. 3.1) des konkret zu planenden Riesenrads und die Höhe des Einstiegpodestes an.

Ein Praktikant betrachtet fasziniert die Planungsunterlagen. Er hat Probleme, die beiden Parameter b und c in der Funktionsgleichung zu deuten.

b) Leiten Sie anhand der eingangs aufgeführten Daten zum Riesenrad den Wert des Parameters b her.

In der Abbildung 3.1 ist die Gondel zu sehen, deren Gondelhöhe mittels der Funktion h beschrieben wird.

c) Beschreiben Sie die innermathematische Bedeutung des Parameters c.

Begründen Sie, welchen möglichen Wert der Parameter c besitzen kann, damit sich die durch die Funktionsgleichung betrachtete Gondel zum Zeitpunkt $t = 0$ tatsächlich am Einstieg befindet.

Das Planungsbüro hat sich zwischenzeitlich auf die folgende Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(t) = 30\sin\left(\frac{1}{3}\pi\ \left(t + \frac{9}{2}\right)\right) + 34$$

festgelegt, wobei $h(t)$ weiterhin die Gondelhöhe in Metern und t die Zeit in Minuten angibt.

Der Riesenradbetreiber hat das Planungsbüro darauf hingewiesen, dass für den optimalen Fahrspaß die momentane Höhenänderung zu keinem Zeitpunkt über 0,55 m/s liegen darf.

d) Prüfen Sie, ob dies von dem geplanten Riesenrad erfüllt wird.

Für den Eröffnungstag des Pfingstfestes wurde als besondere Attraktion ein Kletterkünstler engagiert. Dieser behauptet, dass er schneller 50 m an einem Seil hochklettern kann, als sich eine Gondel des Riesenrads vom Einstieg bis in diese Höhe dreht.

e) Ermitteln Sie, mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit der Kletterkünstler klettern muss, um vor der Gondel auf 50 m Höhe anzukommen.

Der Praktikant ist nach wie vor ein wenig unsicher, ob eine trigonometrische Funktionsgleichung vorliegt und behauptet, man könnte zumindest eine halbe Umdrehung des Riesenrades durch eine ganzrationale Funktion g dritten Grades

$$g(t) = a_3 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0$$

beschreiben.
Er hat bereits vier Bedingungen formuliert und auf deren Basis ein lineares Gleichungssystem erstellt:

I: $g(0) = 4$
II: $g'(0) = 0$
III: $g''(1{,}5) = 0$
IV: $g'(3) = 0$

Sein CAS-Taschenrechner liefert ihm folgende Lösungen für das lineare Gleichungssystem:

$$a_3 = \frac{-2a_2}{9};\ \ a_2 = a_2;\ a_1 = 0;\ a_0 = 4.$$

f) Erläutern Sie, warum das verwendete lineare Gleichungssystem keine eindeutige Lösung liefert.

Nachdem der Praktikant sein lineares Gleichungssystem verändert hat, erhält er für $a_3 = -\frac{40}{9}$.

g) Bestimmen Sie den Parameter a_2 und
beurteilen Sie, wie gut diese Annäherung durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades gelungen ist.

Der erwartete Besucherstrom auf dem Pfingstmarkt wird mittels der Funktion b prognostiziert, wobei b(x) die momentane Besucherzahländerung in Personen pro Stunde und x die Zeit seit Eröffnung (14:00 Uhr) in Stunden angibt. Die Funktionswerte bis 19:15 Uhr basieren auf Erfahrungswerten. Es wird angenommen, dass diese danach knickfrei in eine konstant fallende momentane Besucherzahländerung übergehen.

$$b(x) = \begin{cases} -\frac{400}{21}x^4 + \frac{12800}{63}x^3 - \frac{4000}{7}x^2 + 900 & \text{mit } 0 \leq x < 5{,}25 \\ m \cdot x + s & \text{mit } 5{,}25 \leq x \leq n \end{cases}$$

h) Zeigen Sie, dass für $m = -225$ und $s \approx 1261$ gelten müssen.

Der Betreiber des Riesenrades plant vorab den Mitarbeitereinsatz. Wenn gegen Ende eines Öffnungstages die Besucherzahl höchstens 500 Personen beträgt, wird nur noch ein Mitarbeiter als Einstiegshelfer benötigt.

i) Berechnen Sie, für welchen Zeitraum nur noch ein Mitarbeiter am Einstieg benötigt wird.

Am Riesenrad sollen sich insgesamt 35 Gondeln mit jeweils sechs Plätzen befinden. Um den vermuteten Besucherandrang zu bewältigen, ist geplant, dass am Eröffnungstag das Riesenrad jeweils nur zwei Runden (eine kombinierte Ein-Ausstiegsrunde und eine durchgehende Runde) fährt, so dass alle 15 Minuten das Riesenrad komplett mit neuen Fahrgästen besetzt werden kann.

In den Planungsunterlagen findet sich auch noch die folgende Notiz:

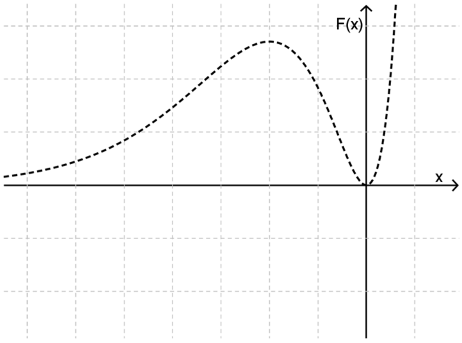
Beim Riesenrad sind keine Engpässe zu erwarten, wenn folgende Gleichung für alle x gilt:

$$\int_x^{x+0,25} b(x)dx \leq 210$$

Abbildung 3.2

j) Beurteilen Sie, inwieweit der gegebene formale Ausdruck mit der Aussage, dass keine Engpässe zu erwarten sind, übereinstimmt.

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>skizziert den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F.</td><td>
</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>bestimmt den Korffizienten a in Abhängigkeit des Koeffizienten b.</td><td>Nullstellen der Funktion f:
$f_{ab}(x)=0 \;\; \Longrightarrow \;\; x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \;\wedge\; x_3 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$
(x_3 nicht relevant, da die Fläche im IV. Quadranten liegt)
Da $a > 0$ und $b < 0$ gelten und die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, gilt:
$-0{,}25 = \int_0^{\sqrt{\frac{-b}{a}}} (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,dx \;\Longrightarrow\; a = b^2.$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der zugehörige Funktionsterm kann nicht eindeutig bestimmt werden, da die Anzahl der gegebenen Bedingungen zu gering ist.</td><td>Die Aussage ist falsch. Da der Graph achsensymmetrisch zur Ordinate verläuft, gilt: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$.
Für die drei zu bestimmenden Parameter sind auch drei Bedingungen gegeben.</td></tr>
<tr><td>Um die Koeffizienten der Funktion f bestimmen zu können, wird die zweite Ableitungsfunktion benötigt.</td><td>Die Aussage ist falsch. Bei den Bedingungen werden Extrema und Steigungswerte genannt und dazu benötigt man nicht die zweite Ableitungsfunktion.</td></tr>
<tr><td>Aus den gegebenen Bedingungen lässt sich unter anderem folgende Gleichung aufstellen: $d = 0$.</td><td>Die Aussage ist wahr. Da die Funktion achsensymmetrisch ist, gilt die Bedingung $f'(0) = 0$ und es ergibt sich $d = 0$.</td></tr>
</table></td><td>6</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>gibt die Werte für den Parameter t an und</td><td>Aus $f_t(x) = 0$ folgt $-1 \leq t \leq 1$ mit $t \in \mathbb{R}$, da $\cos^{-1}(-t)$ nur für diesen Bereich definiert ist. Daraus folgt, dass für $|t| > 1$ der Graph der Funktion f_t die Abszissenachse nicht schneidet. Für $-1 < t < 1$ schneidet der Graph der Funktion f_t inneralb einer Periode die Abszissenachse zweimal.
Fortsetzung nächste Seite</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>ermittelt die Koordinaten der Berührpunkte mit der Abszissenachse.</td><td>Für $|t| = 1$ hat der Graph der Funktion f Berührpunkte mit der Abszissenachse. Aus $f_1(x) = 0$ bzw. $f_{-1}(x) = 0$ folgt:
$x_{t=1} = 0{,}5\pi - 1 + k \cdot \pi$ bzw. $x_{t=-1} = -1 + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Die Koordinaten der Berührpunkte lauten daher:
$S_{xk}(0{,}5\pi - 1 + k \cdot \pi|0)$ für $t = 1$ und $S_{xk}(-1 + k \cdot \pi|0)$ für $t = -1$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>bestimmt die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$.</td><td>Da $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ ist, ist $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$.
Also gilt: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>prüft, ob auch die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig sind.</td><td>Die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind linear unabhängig, wenn:
$r \cdot \vec{c} + s \cdot \vec{d} = \vec{0}$ mit r, s $\mathbb{R}$ und $r = s = 0$ einzige Lösung ist.
Ersetzen der Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ durch deren Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt:
$r \cdot \left(2\vec{a} + \vec{b}\right) + s \cdot (-\vec{a}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow r \cdot 2\vec{a} + r \cdot \vec{b} - s \cdot \vec{a} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot (2r - s) + \vec{b} \cdot r = \vec{0}$
Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ muss $r = 0$ und $(2r - s) = 0$ sein. Wegen $r = 0$ muss auch $s = 0$ sein, womit gezeigt ist, dass die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig sind.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründet die Entscheidung.</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Keine Gerade der Schar verläuft durch den Ursprung.</td><td>Die Aussage ist wahr. Eine Ursprungsgerade erfüllt das folgende LGS:
$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Demnach müsste $r = -1$ sein und damit $a = 5$. Beides in die letzte Zeile eingesetzt, ergibt eine falsche Aussage. Das LGS ist also unlösbar.
Damit existiert keine Ursprungsgerade.</td></tr>
<tr><td>Für $a = -1$ verläuft die Gerade parallel zur x_1-x_2-Ebene.</td><td>Die Aussage ist wahr. Für $a = -1$ lautet der Richtungsvektor der Gerade: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $x_3 = 0$ ist, haben alle Punkte der Geraden g_{-1} die Koordinate $x_3 = 3$.</td></tr>
<tr><td>Es gibt nur eine Gerade der Schar, die die x_1-Achse schneidet.</td><td>Die Aussage ist wahr. Das zugehörige LGS
$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 + a \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $a = 2, r = -1$ und $s = 3$.
Damit schneidet nur die Gerade g_2 die x_1-Achse.</td></tr>
</table>
</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>ermittelt die Koordinatenform der Ebenengleichung der Ebene E_1 und</td><td>$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_2 + 3x_3 = -3$
Fortsetzung nächste Seite</td><td>4</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h	begründet, dass die Ebene E_2 parallel zur Ebene E_1 ist. (Der Nachweis, dass die Ebenen nicht identisch sind, ist nicht gefordert.)	Zwei Ebenen sind parallel, wenn die Normalenvektoren dieser Ebenen linear abhängig sind. Der Normalenvektor der Ebene E_1 ist mit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ direkt ablesbar. Die Koordinaten des Normalenvektors der Ebene E_2 entsprechen den Koeffizienten der Ebenengleichung. Also ist $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit gilt: $\overrightarrow{n_1} = 3 \cdot \overrightarrow{n_2}$. Da die Normalenvektoren linear abhängig sind, sind die Ebenen E_1 und E_2 parallel.	
			34

Aufgabe 2: **Fun- und Kletterpark**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	ermittelt die Länge der Treppe und ermittelt die Anzahl der Treppenstufen.	Die Länge der Treppe entspricht der Länge des Verbindungsvektors von K_1 zu K_2: $\overrightarrow{K_1K_2} = \begin{pmatrix} -90-0 \\ 290-250 \\ 1500-1420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$ $\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\| = \sqrt{(-90)^2+40^2+80^2} = 10 \cdot \sqrt{161} \approx 126{,}89\ \ [\mathrm{m}]$ Die Anzahl n der Stufen ergibt sich aus dem zu überwindenden Höhenunterschied von 80 m und der Tritthöhe von 0,2 m: $\mathrm{n} = \frac{80}{0{,}2} = 400$ Stufen. Der Kletterstieg ist ca. 127 m lang und besteht aus 400 Stufen.	3
2b	prüft, ob die Gäste auf dem Kletterstieg die Möglichkeit haben, ein besonders schönes Echo zu erzeugen.	Der Abstand des Punktes K_E zum Kletterstieg kann z. B. mithilfe des Kreuzprodukts ermittelt werden. $\mathrm{d} = \frac{\left\|\overrightarrow{K_1K_2} \times \overrightarrow{K_1K_E}\right\|}{\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} -90 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -69 \\ 32 \\ 61{,}5 \end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix} -90 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{\sqrt{158585}}{322} \approx 1{,}237[\mathrm{m}].$ Die Gäste können auf dem Kletterstieg ein besonders schönes Echo erzeugen, weil der Abstand des Punktes K_E zum Kletterstieg mit 1,24 m kleiner als 1,50 m ist.	3
2c	berechnet die x_3-Koordinate so, dass das größtmögliche Gefälle erreicht wird und die Sicherheitsbestimmung für die Strecke vom Start-Tower S zum Change-Tower C eingehalten wird.	Ein Gefälle von 35 % entspricht einem Winkel von $\alpha = \arctan(0{,}35) \approx 19{,}29°$. Um die x_3-Koordinate zu berechnen, muss die folgende Gleichung nach x_3 aufgelöst werden. $\arccos\left(\frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC_0}}{\left\|\overrightarrow{SC}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{SC_0}\right\|}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|}\right) = 19{,}29°.$ Das CAS liefert: $x_3 \approx -1{,}11$ oder $x_3 \approx 1{,}11$. Für $x_3 \approx -1{,}11$ liegt das größtmögliche Gefälle in Richtung des Change-Towers vor, mit dem die Sicherheitsbestimmung in diesem Abschnitt noch eingehalten wird.	3
2d	zeigt, dass die maximale Anlauflänge ca. 2,5 Meter beträgt und	Zunächst werden die Koordinaten des Punktes R benötigt: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OE_1} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{E_1E_2}$ $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -101{,}75 \\ 297{,}35 \\ 1506{,}45 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} -97{,}01 \\ 298{,}93 \\ 1506{,}45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -101{,}75 \\ 297{,}35 \\ 1506{,}45 \end{pmatrix}\right]$ $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -99{,}38 \\ 298{,}14 \\ 1506{,}45 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	7

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d		Die Anlauflänge zwischen den Punkten A und R beträgt: $\lvert\overrightarrow{AR}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-99,38\\298,14\\1506,45\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}0,62\\-1,86\\-1,55\end{pmatrix}\right\rvert \approx 2,5\ [\mathrm{m}]$	
	ermittelt die Koordinaten des Eckpunktes E_1' und E_2' so, dass die Forderungen des TÜV erfüllt werden.	Wenn die Anlauflänge verdoppelt wird, gilt für den Ortsvektor des Punktes R′: $\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0,62\\-1,86\\-1,55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-98,76\\296,28\\1504,9\end{pmatrix}$. Für die Koordinaten des neuen Eckpunktes E_1' gilt dann: $\overrightarrow{OE_1'} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AE_1}$ $\overrightarrow{OE_1'} = \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix} + r\cdot\left[\begin{pmatrix}-101,75\\297,35\\1506,45\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix}\right]$ $= \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1,75\\-2,65\\-1,55\end{pmatrix}$ Damit die Rampe zwischen den Punkten E_1' und E_2' horizontal verläuft, müssen die x_3-Koordinaten der Eckpunkte E_1 und E_2 gleich sein, insbesondere gleich mit der x_3-Koordinate vom Punkt R′. Die Auswertung der x_3-Koordinate der Punkte E_1' und R′ liefert: $1508 + r\cdot(-1,55) = 1504,9 \iff r = 2$ Aus der Gleichung: $\overrightarrow{OE_1'} = \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1,75\\-2,65\\-1,55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-103,5\\294,7\\1504,9\end{pmatrix}$ ergeben sich die Koordinaten des Eckpunktes $E_1'(-103,5\vert 294,7\vert 1504,9)$ und aus der Gleichung: $\overrightarrow{OE_2'} = \begin{pmatrix}-100\\300\\1508\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2,99\\-1,07\\-1,55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-94,02\\297,86\\1504,9\end{pmatrix}$ die des Eckpunktes $E'_2(-94,02\vert 297,86\vert 1504,9)$.	
2e	ermittelt die Koordinaten des Change-Towers C und	Die Koordinaten der Spitze des Change-Towers ergeben sich aus dem Schnittpunkt der Geraden g_{SC} zwischen Start- und Change-Tower und g_{CL}, wobei für die Gerade g_{CL} der Punkt F und der Vektor $\overrightarrow{CL}$ zu verwenden sind. $g_{SC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-100\\300\\1510\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $g_{CL}: \vec{x} = \begin{pmatrix}300\\525\\1185\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}$ Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen führt auf das LGS: $\begin{pmatrix}-100\\300\\1510\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}300\\525\\1185\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}$ $r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\-7\\+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}400\\225\\-325\end{pmatrix}$ mit $r = 100$ und $s = -75$. *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2e		Damit ergeben sich die Koordinaten der Spitze des Change-Towers C aus der Gleichung: $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -100 \\ 300 \\ 1510 \end{pmatrix} + 100 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1410 \end{pmatrix}$ und es ist: C(0|0|1410).	
	des Landing-Towers L und	Um die die Koordinaten der Spitze des Landing-Towers L berechnen zu können, muss zunächst die Länge der Strecke zwischen den Punkten C und L bekannt sein. Laut Aufgabenstellung gilt dafür: $\left\lvert\overrightarrow{CL}\right\rvert = \frac{4}{3} \cdot \left\lvert\overrightarrow{CF}\right\rvert$ Mit $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 300 \\ 525 \\ 1185 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 525 \\ -225 \end{pmatrix}$ ist $\left\lvert\overrightarrow{CL}\right\rvert = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{416250} = 100 \cdot \sqrt{74} \approx 860{,}23$ [m] Damit ergeben sich die Koordinaten der Spitze des Landing-Towers L aus der Gleichung: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1410 \end{pmatrix} + \frac{100 \cdot \sqrt{74}}{\sqrt{74}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 700 \\ 1110 \end{pmatrix}$ und es ist: L(400|700|1110)	
	prüft, ob der Chef des Tourismusverbandes mit der längsten Seilrutsche Europas werben kann.	Die Gesamtlänge l der Seilrutsche beträgt dann: $l = \left\lvert\overrightarrow{SC}\right\rvert + \left\lvert\overrightarrow{CL}\right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1410 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -100 \\ 300 \\ 1510 \end{pmatrix} \right\rvert + 100 \cdot \sqrt{74} \approx 1192$ [m] Die Seilrutsche wird nicht die längste Europas werden.	
2f	stellt die Normalenform der Ebenengleichung für das Felsplateau auf und	Der Normalenvektor der Ebene lässt sich zum Beispiel aus den Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ berechnen. $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -80 \\ 205 \\ 1420 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -50 \\ 180 \\ 1360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 25 \\ 60 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -100 \\ 200 \\ 1470 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -50 \\ 180 \\ 1360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 110 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} -30 \\ 25 \\ 60 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 300 \\ 650 \end{pmatrix}$ Damit gilt für die Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform: $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -50 \\ 180 \\ 1360 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1550 \\ 300 \\ 650 \end{pmatrix} = 0.$	4
	erläutert, wie durch Rechnung gezeigt werden kann, dass eine beliebige Gerade echt parallel zu einer Ebene verläuft.	Eine Gerade verläuft parallel zu einer Ebene, wenn der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden g_{SC} orthogonal zueinander sind, d. h. deren Skalarprodukt ist Null. Um zu zeigen, dass die Gerade g_{SC} nicht in der Ebene liegt, genügt es zu zeigen, dass die Punktprobe zum Beispiel eines Punktes der Ebene in der Gleichung g_{SC} auf einen Widerspruch führt.	

	Anforderungen	Modelllösungen	
2g	bestimmt die Länge des Mastes, an dem die Kamera befestigt werden soll, damit die Entfernung zur Seilrutsche genau 32 Meter beträgt und	Der Punkt P ist auf der Seilrutsche der Punkt mit dem kürzesten Abstand zum Punkt W_M, wobei der Punkt W_M die Mastspitze ist. Es gilt: $\overrightarrow{OP} = \left[\begin{pmatrix}-100\\300\\1510\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right]$ und $\overrightarrow{OW_M} = \begin{pmatrix}-90\\170\\x_3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{W_MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OW_M} = \left[\begin{pmatrix}-100\\300\\1510\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}-90\\170\\x_3\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}-10\\130\\1510-x_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ Da der Vektor $\overrightarrow{WP}$ senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden g_{SC} verläuft, gilt: $\left[\begin{pmatrix}-10\\130\\1510-x_3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix} = 0.$ Es folgt: $x_3 + 3(3r-130) + 2r - 1520 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-x_3}{11} + \frac{1910}{11}$ Dann ist: $\overrightarrow{W_MP} = \left[\begin{pmatrix}-10\\130\\1510-x_3\end{pmatrix} + \left(\frac{-x_3}{11} + \frac{1910}{11}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right]$ und damit: $\lvert\overrightarrow{W_MP}\rvert = \sqrt{\frac{10\cdot x_3^2}{11} - \frac{29400\cdot x_3}{11} + \frac{21620000}{11}} = 32$ $\Leftrightarrow x_3 \approx 1464{,}86$ oder $x_3 \approx 1475{,}14$ Der Mast muss eine Länge von 4,86 m (1464,86 m − 1460 m) haben. Die andere Alternative von 15,14 m (14675,14 m − 1460 m) ist unwirtschaftlich, da technisch viel aufwendiger.	7
	beurteilt, ob der Einsatz der Kamera sinnvoll sein wird.	Um aus dem Graphen die Geschwindigkeit des Seilrutschers entnehmen zu können, wird die x_3-Koordinate des Punktes P benötigt. Mit $r = \frac{-1464{,}86}{11} + \frac{1910}{11} = \frac{22257}{550}$ ist: $\overrightarrow{OP} = \left[\begin{pmatrix}-100\\300\\1510\end{pmatrix} + \frac{22257}{550}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{550}\begin{pmatrix}-32743\\98229\\808243\end{pmatrix}$ Die x_3-Koordinate beträgt also ca. 1469,53. Vom Startpunkt S bis zum Punkt P hat der Seilrutschenbenutzer ca. 41 Höhenmeter $\left(1510 - \frac{808243}{550} = \frac{22257}{550} \approx 40{,}47\ [\mathrm{m}]\right)$ verloren. Die Geschwindigkeit des Rutschers beträgt an dieser Stelle lt. Graphik ca. $7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und ist damit kleiner als $8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der Einsatz der Kamera wird sinnvoll sein, da die Geschwindigkeit der Besucher an dieser Stelle nicht zu groß ist.	
			33

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

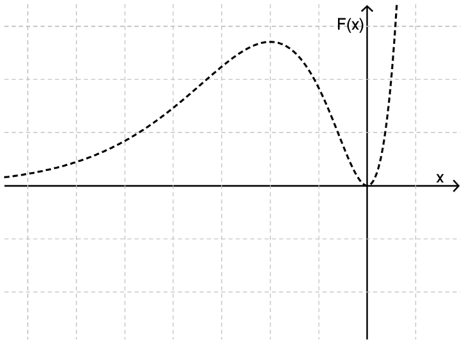
	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F.		4
1b	bestimmt den Korffizienten a in Abhängigkeit des Koeffizienten b.	Nullstellen der Funktion f: $f(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \;\wedge\; x_3 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$ (x_3 nicht relevant, da die Fläche im IV. Quadranten liegt) Da $a > 0$ und $b < 0$ gelten und die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, gilt: $-0{,}25 = \int_0^{\sqrt{\frac{-b}{a}}} (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,dx \;\Rightarrow\; a = b^2$	3
1c	entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	siehe Tabelle unten	6
1d	gibt die Werte für den Parameter t an und	Aus $f_t(x) = 0$ folgt $-1 \le t \le 1$ mit $t \in \mathbb{R}$, da $\cos^{-1}(-t)$ nur für diesen Bereich definiert ist. Daraus folgt, dass für $\lvert t\rvert > 1$ der Graph der Funktion f_t die Abszissenachse nicht schneidet. Für $-1 < t < 1$ schneidet der Graph der Funktion f_t inneralb einer Periode die Abszissenachse zweimal. *Fortsetzung nächste Seite*	4

Tabelle zu 1c:

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der zugehörige Funktionsterm kann nicht eindeutig bestimmt werden, da die Anzahl der gegebenen Bedingungen zu gering ist.	Die Aussage ist falsch. Da der Graph achsensymmetrisch zur Ordinate verläuft, gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Für die drei zu bestimmenden Parameter sind auch drei Bedingungen gegeben.
Um die Koeffizienten der Funktion f bestimmen zu können, wird die zweite Ableitungsfunktion benötigt.	Die Aussage ist falsch. Bei den Bedingungen werden Extrema und Steigungswerte genannt und dazu benötigt man nicht die zweite Ableitungsfunktion.
Aus den gegebenen Bedingungen lässt sich unter anderem folgende Gleichung aufstellen: $d = 0$.	Die Aussage ist wahr. Da die Funktion achsensymmetrisch ist, gilt die Bedingung $f'(0) = 0$ und es ergibt sich $d = 0$.

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>ermittelt die Koordinaten der Berührpunkte mit der Abszissenachse.</td><td>Für $|t| = 1$ hat der Graph der Funktion f Berührpunkte mit der Abszissenachse. Aus $f_1(x) = 0$ bzw. $f_{-1}(x) = 0$ folgt:
$x_{t=1} = 0{,}5\pi - 1 + k\cdot\pi$ bzw. $x_{t=-1} = -1 + k\cdot\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Die Koordinaten der Berührpunkte lauten daher:
$S_{xk}(0{,}5\pi - 1 + k\cdot\pi|0)$ für $t = 1$ und $S_{xk}(-1 + k\cdot\pi|0)$ für $t = -1$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>untersucht, für welche Werte von a das LGS eindeutig, mehrdeutig bzw. nicht lösbar ist und
gibt die Lösungsmenge des LGS für den Fall $a = -2$ an.</td><td>(1) Für den Fall, dass $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$, ist das LGS eindeutig lösbar.
(2) Für den Fall, dass $a = 0$ ist, ist das LGS mehrdeutig lösbar.
(3) Nicht lösbar ist das LGS, wenn $a = 2$ ist.

$\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{5}{4}\middle|\frac{7}{4}\middle|-\frac{1}{4}\right)\right\}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>bestimmt die Matrixelemente.</td><td>$2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2a^2-8b+4 & 2(a+b\cdot d+c) & 2(a\cdot b+b) \\ 4(a+c) & 2c^2+4 & 4b \\ -8a+4d-8 & 2(c\cdot d+d-4) & 2-8b \end{pmatrix}$
Aus dem Vergleich der Matrixelemente folgen:
$4b = 12 \Longrightarrow b = 3$,
$2(a\cdot b+b) = 12 \Longrightarrow a = 1$
$4(a+c) = 0 \Longrightarrow c = -1$,
$-8a+4d-8 = -16 \Longrightarrow d = 0$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>ermittelt eine mögliche Matrix X, für die angegebene Matrizengleichung gilt.</td><td>$x_{11}\cdot b + x_{12}\cdot a = a$
$x_{21}\cdot b + x_{22}\cdot a = b$
Das LGS ist zum Beispiel erfüllt, wenn $x_{11} = 0$ und $x_{12} = 1$ gilt und wenn $x_{21} = 1$ und $x_{22} = 0$ gilt.
Eine mögliche Matrix lautet: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table>
<tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Jede Matrix hat eine zugehörige inverse Matrix.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Wenn die quadratischen Matrizen A und B vom gleichen Typ sind, dann gilt: $(A\cdot B^{-1})^T = (B^{-1})^T\cdot A^T$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Hat die Matrizengleichung: $M\cdot\vec{x} = \vec{x}$ einen von Null verschiedenen Lösungsvektor $\vec{x}$, so ist der Vektor $\vec{x}$ Fixvektor zur Matrix M.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1i</td><td>ermittelt die Matrix X und

bestimmt das Matrixelement a so, dass $A^{-2} + B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ gilt.</td><td>$X = A^{-1}\cdot(A - B)$ mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -a \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Aus der Gleichung:
$A^{-2} + B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{1}{a^2} & a \\ \frac{3a}{2}-\frac{4}{a^2} & \frac{a}{2}+\frac{1}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
folgt das Matrixelement $a = 1$.</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>34</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: **Möbelhaus**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	gibt an, wie die Kunden drei Monate nach Beobachtungsbeginn verteilt sein werden und zeigt, dass sich nach drei Monaten der Kundenbestand im Möbelhaus „BEfI“ um mehr als 40 % reduziert hat.	$\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 \\ 489 \\ 249 \end{pmatrix}$ Drei Monate später werden im Möbelhaus „BEfI“ 162 Kunden, im Möbelhaus „AEKI“ 489 Kunden und im Möbelhaus „B&R“ 249 Kunden registriert sein. Verteilung der Kundschaft für „BEfI“ nach drei Monaten: $\frac{162}{300} = 54\ \%$ Innerhalb von drei Monaten ist der Kundenbestand im Möbelhaus „BEfI“ um mehr als 40 % zurückgegangen, tatsächlich sogar um 46 %.	3
2b	beurteilt die Aussagen des Geschäftsführers des Möbelhauses „AEKI“.	Für den Monat September 2014 gilt für die Kundenanzahl: $\overrightarrow{v_{-1}} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}80 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 378 \\ 168 \\ 354 \end{pmatrix}$. Zum 01. September 2014 hatte das Möbelhaus „AEKI“ nur 168 Kunden, aber schon einen Monat später 300 Kunden. Da die Matrix $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ eine Grenzmatrix darstellt, gilt für die langfristige zukünftige Verteilung der Kunden: $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 540 \\ 270 \end{pmatrix}$. Der Geschäftsführer des Möbelhauses hat Recht mit seiner Aussage, dass die Kundenzahl seines Möbelhauses seit September 2014 kontinuierlich gestiegen ist (168, 300, ... 540). Die Kundenzahl wird aber nur bis auf 540 Kunden wachsen, denn dieser stetige Wachstumsprozess wird sich langfristig stabilisieren und die Kundschaft wird sich bei 540 Kunden für das Möbelhaus „AEKI“ einpendeln. Das Wachstum der Kundschaft des Möbelhauses „AEKI“ ist langfristig (nach 48 Monaten) begrenzt. Da das Möbelhaus „BEfI“ kontinuierlich Kunden verliert (378, 300, 240, … 90) ist davon auszugehen, dass Kunden dieses Möbelhauses zu „AEKI“ gewechselt haben und somit zum stetigen Kundenzuwachstum des Möbelhauses „AEKI“ beitrugen. Recht hat der Geschäftsführer auch mit seiner Aussage, dass das Möbelhaus „AEKI“ langfristig Marktführer werden kann, denn zukünftig werden 60 % aller 900 Kunden das Möbelhaus „AEKI“ favoritisieren.	5
2c	berechnet den gesamten Bedarf an Stützen, Böden und Kreuzen und	Aus der Tab. 2.2 : <table><tr><th></th><th>RE1</th><th>RE2</th><th>RE3</th></tr><tr><td>S</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>B</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>K</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 2c</td><td></td><td>folgt die zugehörige Matrix $R_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und aus der Tab. 2.3:

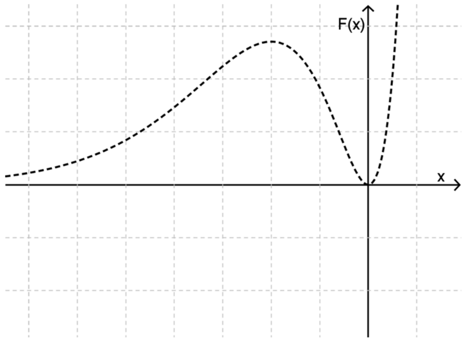
| | RE1 | RE2 | RE3 |
| RK1 | 1 | 1 | 0 |
| RK2 | 1 | 2 | 1 |

folgt die Matrix $R_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Daraus ergibt sich für die Anzahl der Stützen Böden und Kreuze für je eine Regalkombination RK1 bzw. RK2:
$\begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 16 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Anzahl der Stützen, Böden und Kreuze für die 60 Regalkombinationen RK1 und 80 Regalkombinationen RK2 bestimmen:
$\begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 16 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 880 \\ 1\,820 \\ 140 \end{pmatrix}$
Für die Lieferung werden 880 Stützen, 1 820 Böden und 140 Kreuze benötigt.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>ermittelt die Kosten für diese komplette Lieferung.</td><td>Kosten K = Rohstoffkosten R + Fix-und Fertigungskosten
$R = (27{,}50 \quad 18{,}00 \quad 7{,}90) \cdot \begin{pmatrix} 880 \\ 1\,820 \\ 140 \end{pmatrix} = 58\,066{,}00$ [€]
$K = 58\,066{,}00$ € $+ 1\,700{,}00$ € $+ 6\,380{,}00$ €
$K = 66\,146{,}00$ €
Die Kosten für die komplette Lieferung betragen 66 146,00 €.</td><td></td></tr>
<tr><td>2d</td><td>berechnet den Wert a so, dass die Herstellungskosten für 10 Regalkombinationen RK1 und 15 Regalkombinationen RK 2 einen Wert von 11 697,50 € nicht übersteigen und</td><td>Rohstoffkosten K_R für die Regalkombinationen RK1 und RK2:
$K_R = (27{,}50 \quad 18{,}00 \quad 7{,}90) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 16 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (279{,}90 \quad 515{,}90)$
Kosten K_{F1} der Fertigungsstufe 1 (Tab. 2.2, Tab. 2.6):
$K_{F1} = (a \quad 11{,}00 \quad 12{,}00) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = (a + 11 \quad a + 34)$
Kosten K_{F2} der Fertigungsstufe 2 (Tab. 2.6): $K_{F2} = (0{,}8a \quad 14)$
Kosten K des gesamten Fertigungsprozesses:
$K = K_R + K_{F1} + K_{F2}$
$K = (279{,}90 \quad 515{,}90) + (a + 11 \quad a + 34) + (0{,}8a \quad 14)$
$K = (1{,}8a + 290{,}90 \quad a + 563{,}90)$
Für 10 RK1 und 15 RK2 betragen die gesamten Fertigungskosten:
$K_{Ges} = (1{,}8a + 290{,}90 \quad a + 563{,}90) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = (33a + 11\,367{,}50)$
$K_{Ges} = 33a + 11\,367{,}50 \leq 11697{,}50$
$\Rightarrow a \leq 10$ [€].</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>gibt für diesen Fall die in den jeweiligen Fertigungsstufen anfallenden Kosten für RE1 und für RK1 an.</td><td>Die in Fertigungsstufe 1 anfallenden Kosten für das Regalelement RE1 dürfen maximal 10,00 € betragen und die in Fertigungsstufe 2 anfallenden Kosten für die Regalkombination RK1 betragen dann 8,00 €.</td><td></td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
2e	bestimmt die Anzahl der Stützen, Böden und Kreuze, die für insgesamt zehn Regalelemente RE4 und 20 Regalelemente RE5 benötigt werden.	Für den gesamten Produktionsprozess zur Herstellung der Regalkombinationen RK3 bzw. RK4 gilt die Matrizengleichung: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 23 & 32 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ Aus der Matrizengleichung folgt: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 23 & 32 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 23 & 32 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Da zehn Regalelemente RE4 und 20 Regalelemente RE5 benötigt werden, gilt für den Materialbedarf: $\begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 140 \\ 30 \end{pmatrix}$ Es werden für die Regalelemente RE4 und RE5 60 Stützen, 140 Böden und 30 Kreuze benötigt.	5
2f	begründet, dass die Matrix A invertierbar ist,	Existiert zu einer quadratischen Matrix eine Matrix X, so dass $A \cdot X = X \cdot A = E$ gilt, wobei E die Einheitsmatrix ist, dann ist diese Matrix X die inverse Matrix zur Matrix A. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Aus dieser Matrizengleichung folgen drei lineare Gleichungssysteme, $\begin{array}{rcl} 2a+2d+2g &=& 1 \\ 4a+5d+2g &=& 0 \\ a &=& 0 \end{array}$ $\quad \begin{array}{rcl} 2b+2e+2h &=& 0 \\ 4b+5e+2h &=& 1 \\ b &=& 0 \end{array}$ $\quad \begin{array}{rcl} 2c+2f+2i &=& 0 \\ 4c+5f+2i &=& 0 \\ c &=& 1 \end{array}$ die alle drei eindeutig lösbar sind, somit existiert auch eine zugehörige inverse Matrix $X = A^{-1}$.	6
	gibt die zugehörige inverse Matrix A^{-1} und	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	
	erläutert, wie mit Hilfe der Matrix A^{-1} die jeweilige Anzahl der Regalelemente RE1, RE2 und RE3, die für die Herstellung dieser Spezial-Regalkombination benötigt werden, berechnet werden kann.	Um die Anzahl der Regalelemente (RE) zu berechnen, kann man eine Matrizengleichung mit der Matrix A aufstellen: $\begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} RE1 \\ RE2 \\ RE3 \end{pmatrix}$, wobei der Vektor $\begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix}$ die Anzahl der Stützen, Böden und Kreuze für die Spezial-Regalkombination angibt. Diese Matrizengleichung muss umgestellt werden, da der Vektor $(RE1 \quad RE2 \quad RE3)^T$ bestimmt werden soll, der dann die Anzahl der Regalelemente RE1, RE2 und RE3 angibt: $\begin{pmatrix} RE1 \\ RE2 \\ RE3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe der Matrix A^{-1} kann somit die Anzahl der Regalelemente bestimmt werden.	

	Anforderungen	Modelllösungen	
2g	prüft, ob die Anzahl der vorhandenen Pakete (RE1, RE2 und RE3) für die Herstellung dieser Spezial-Regalkombinationen ausreichend ist und restlos für diese Lieferung aufgebraucht werden können und	Anzahl der Bauteile (S, B, K) für x ($x \in \mathbb{N},\ x \geq 25$) Spezial-Regalkombinationen: $\begin{pmatrix} S \\ B \\ K \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 6x \\ 1x \end{pmatrix}$ Anzahl der Zwischenprodukte (RE) berechnen: $\begin{pmatrix} RE1 \\ RE2 \\ RE3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 6x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x \\ \frac{1}{6}x \end{pmatrix}$ Es gilt: $\begin{pmatrix} RE1 \\ RE2 \\ RE3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x \\ \frac{1}{6}x \end{pmatrix}$ mit $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 45 \iff \frac{3x}{2} = 45 \Leftrightarrow x = 30.$	3
	gibt an, wie viele Pakete für RE1, RE2 und RE3 vorhanden sein müssten, um den Lagerbestand aufzubrauchen und wie viele Spezial-Regalkombinationen der Kunde maximal erhalten kann.	Im Lager müssten 30 Pakete für RE1, 10 Pakete für RE2 und 5 Pakete RE3 vorhanden sein, um den Lagerbestand für die Spezial-Regalkombinationen aufzubrauchen. Der Kunde kann maximal 30 Spezial-Regalkombinationen erhalten, um den Lagervorrat restlos aufzubrauchen.	
			33

Aufgabe 1 mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F.		4
1b	bestimmt den Koeffizienten a in Abhängigkeit des Koeffizienten b.	Nullstellen der Funktion f: $f(x)=0 \implies x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \wedge x_3 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$ (x_3 nicht relevant, da die Fläche im IV. Quadranten liegt) Da $a > 0$ und $b < 0$ gelten und die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, gilt: $-0{,}25 = \int_0^{\sqrt{\frac{-b}{a}}} (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,dx \implies a = b^2$.	3
1c	entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	**Aussage** / **Entscheidung und Begründung** Der zugehörige Funktionsterm kann nicht eindeutig bestimmt werden, da die Anzahl der gegebenen Bedingungen zu gering ist. — Die Aussage ist falsch. Da der Graph achsensymmetrisch zur Ordinate verläuft, gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Für die drei zu bestimmenden Parameter sind auch drei Bedingungen gegeben. Um die Koeffizienten der Funktion f bestimmen zu können, wird die zweite Ableitungsfunktion benötigt. — Die Aussage ist falsch. Bei den Bedingungen werden Extrema und Steigungswerte genannt und dazu benötigt man nicht die zweite Ableitungsfunktion. Aus den gegebenen Bedingungen lässt sich unter anderem folgende Gleichung aufstellen: $d = 0$. — Die Aussage ist wahr. Da die Funktion achsensymmetrisch ist, gilt die Bedingung $f'(0) = 0$ und es ergibt sich $d = 0$.	6
1d	gibt die Werte für den Parameter t an und	Aus $f_t(x) = 0$ folgt $-1 \le t \le 1$ mit $t \in \mathbb{R}$, da $\cos^{-1}(-t)$ nur für diesen Bereich definiert ist. Daraus folgt, dass für $\lvert t\rvert > 1$ der Graph der Funktion f_t die Abszissenachse nicht schneidet. Für $-1 < t < 1$ schneidet der Graph der Funktion f_t innerhalb einer Periode die Abszissenachse zweimal. *Fortsetzung nächste Seite*	4

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>ermittelt die Koordinaten der Berührpunkte mit der Abszissenachse.</td><td>Für $|t| = 1$ hat der Graph der Funktion f Berührpunkte mit der Abszissenachse. Aus $f_1(x) = 0$ bzw. $f_{-1}(x) = 0$ folgt:
$x_{t=1} = 0{,}5\pi - 1 + k \cdot \pi$ bzw. $x_{t=-1} = -1 + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Die Koordinaten der Berührpunkte lauten daher:
$S_{xk}(0{,}5\pi - 1 + k \cdot \pi|0)$ für $t = 1$ und $S_{xk}(-1 + k \cdot \pi|0)$ für $t = -1$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table><tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr><tr><td>$0 < P(T) < 1$</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>$P(H) + P(T) + P(N) = 1$</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Aus $P(H \cup T) = P(H) + P(T) - P(H \cap T)$ folgt:
$P(H \cap T) > 0$.</td><td></td><td>X</td></tr></table></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>bestimmt den Parameter a
und

bestimmt $P(X > 0{,}5)$.</td><td>Von der normalverteilten Zufallsgröße sind Standardabweichung und Erwartungswert sowie eine Wahrscheinlichkeit bekannt:
$\sigma = 2$, $\mu = -1$ und $P(X \le a) = 0{,}67$.
Bestimmung per CAS-Befehl:
$a \approx -0{,}1202$.
Bestimmung per CAS-Befehl:
$P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \le 0{,}5) \approx 0{,}2266$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>ermittelt die Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.</td><td>$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
$= P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}5$
$P_B(A) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}5} = 0{,}36$
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass vorher das Ereignis B eingetreten ist, beträgt 36 %.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Der Erwartungswert der Zufallsvariablen beträgt 2,5.</td><td>Falsch. Der Erwartungswert für X ist $E(X) = 2{,}25 \neq 2{,}5$.</td></tr><tr><td>Beim 24-maligen Drehen beider Glücksräder wird zweimal die Zahlensumme vier erwartet.</td><td>Wahr. Da die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4) = \frac{1}{12}$ beträgt, ist bei 24facher Wiederholung die absolute Häufigkeit $\frac{1}{12} \cdot 24 = 2$ zu erwarten.</td></tr><tr><td>Die Wahrscheinlichkeit für eine Zahlensumme größer zwei beträgt genau $\frac{5}{12}$.</td><td>Wahr.
$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4)$
$= \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$</td></tr></table></td><td>6</td></tr>
<tr><td>1i</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table><tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr><tr><td>Es gilt: $P(X > 82) = P(\overline{X} \le 18)$.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Es gilt: $P(72 \le X \le 88) = P(X \le 88) - P(X < 72)$.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Es gilt: $P(X \le 75) = \sum_{i=0}^{75} \binom{100}{i} \cdot 0{,}8^i \cdot 0{,}2^{100-i}$.</td><td>X</td><td></td></tr></table></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>34</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: **Discounter**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erläutert, inwieweit dieser Schüler Recht hat und welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit die Binomialverteilung verwendet werden kann.	Die Zufallsvariable X: „Personen, die 2014 bei dem Discounter eingekauft haben" ist eine diskrete Größe und kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn ein Bernoulli-Versuch n-mal unabhängig voneinander durchgeführt werden kann. Der Zufallsversuch „Hat bei dem Discounter eingekauft" darf nur zwei mögliche Ergebnisse haben (ja / nein). Die Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}866$ und somit die Betrachtungsweise als Zufallsexperiment gilt nur, sofern die Befragten in der Fußgängerzone für Bürger Schleswig-Holsteins repräsentativ sind und muss bei jeder Versuchsdurchführung gleich bleiben.	3
2b	ermittelt die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.	Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Personen, die bei diesem Discounter eingekauft haben, $X \in \{0; 1; 2; 3;\ \dots\ ; 250\}$, X ist binomialverteilt mit $n = 250$, $p = 0{,}866$ und $q = 0{,}134$. • $P(X = 0) = \binom{250}{0} \cdot 0{,}866^0 \cdot 0{,}134^{250} \approx 0$ (Alternative Ermittlung per CAS-Befehl.) Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den Befragten niemand bei diesem Discounter eingekauft hat, ist sehr gering und liegt dicht an 0 %. • $P(X \leq 200) \approx 0{,}0024$ (Ermittlung per CAS-Befehl.) Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den Befragten höchstens 200 Personen bei diesem Discounter eingekauft haben, beträgt ca. 0,24 %. • $P(\overline{X} = 45) = P(X = 205) = \binom{250}{205} \cdot 0{,}866^{205} \cdot 0{,}134^{45} \approx 0{,}0081$ (Alternative Ermittlung per CAS-Befehl.) Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den Befragten genau 45 Personen nicht bei diesem Discounter eingekauft haben, beträgt ca. 0,81 %.	4
2c	beurteilt mithilfe eines geeigneten Testverfahrens, inwieweit die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % weiterhin angenommen werden kann.	Es wird die binomialverteilte Zufallsvariable X „Anzahl der Personen, die bei diesem Discounter eingekauft haben", $X \in \{0; 1; 2; 3;\ \dots\ ; 122\}$, $n = 122$ und $p = 0{,}866$ betrachtet. Da die Richtungen möglicher Abweichung strittig sind, wird ein zweiseitiger Hypothesentest durchgeführt. Nullhypothese: $H_0\colon p = 0{,}866$ Gegenhypothese: $H_1\colon p \neq 0{,}866$ Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 0{,}01$ Ermittlung des Ablehnungs- und des Annahmebereiches: $P(X \leq g_l) \leq 0{,}005 \Rightarrow g_l = 94$ $P(X \geq g_r) \leq 0{,}005 \Rightarrow P(X \leq g_r - 1) \geq 0{,}995 \Rightarrow g_r = 116$ Damit lautet der Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = \{0; 1;\ \dots\ ; 94\} \cup \{116; 117; \dots ; 122\}$ und der Annahmebereich von H_0 lautet: $A = \{95; 96;\ \dots\ ; 115\}$. Die Nullhypothese H_0 kann verworfen werden, da 93 nicht im Annahmebereich liegt ($93 \notin A$). Damit kann die Vermutung, dass nicht 86,6 % der Schüler beim Discounter einkaufen, angenommen werden.	6

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>2d</td><td>beschreibt im Sachzusammenhang die Bedeutung der beiden Fehlerarten und begründet die Fehlerhöhen.</td><td>Der Fehler 1. Art bedeutet, dass die H_0 –Hypothese, „86,6 % kaufen beim Discounter“, irrtümlich abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.
Der Fehler 2. Art bedeutet, dass die H_0-Hypothese „86,6 % kaufen beim Discounter“ weiterhin beibehalten wird, obwohl sie falsch ist.
Die Wahrscheinlichkeit beider Fehler ist eher gering. Die Irrtumswahrscheinlichkeit wurde mit 1 % zu Beginn des Tests sehr klein gewählt wurde. Die Verringerung des Fehlers entstand durch die Rundung der Grenzen des Annahmebereiches.
Der Fehler 2. Art ist so gering, weil der Zustand der Realität ($p = 0{,}683$) weit entfernt von der Annahme ($p = 0{,}866$) liegt.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2e</td><td>weist nach, dass 20 % der Discounterkunden dort auch ihr Brot gekauft haben.</td><td>Die entsprechende Vier-Felder-Tafel lautet (fett gedruckt sind die gegebenen Zahlen):
<table>
<tr><th></th><th>Discounter</th><th>Supermarkt</th><th>Summen</th></tr>
<tr><td>Brot</td><td>56</td><td>94</td><td>150</td></tr>
<tr><td>Kein Brot</td><td>224</td><td>26</td><td>250</td></tr>
<tr><td>Summen</td><td>280</td><td>120</td><td>400</td></tr>
</table>
$P_{\text{Discounter}}(\text{Brot}) = \frac{56}{280} = 20\ \%$
20 % der Discounterkunden kauften dort auch ihr Brot.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2f</td><td>ermittelt den prozentualen Ausschussanteil.</td><td>Es wird die normalverteilte Zufallsvariable X „Gewicht des Brotes“, $X \in \mathbb{R}_+$ mit $\mu = 500$ und $\sigma = 7{,}5$ betrachtet.
$1 - P(485 \le X \le 515) \approx 0{,}0455$
(Ermittlung per CAS-Befehl.)
Der Ausschussanteil liegt bei ca. 4,55 %.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2g</td><td>erläutert und

beurteilt die abgebildete Graphik.</td><td>Das abgebildete Säulendiagramm zeigt unter der Überschrift „Supermärkte holen auf“ die Entwicklung der Anzahl kleiner Lebensmittelgeschäfte, Supermärkte und Discounter über einen Zeitraum von 5 Jahren. Dabei wurden auf der Abszissenachse die Jahre von 2008 bis 2012, auf der Ordinatenachse die Zahl der Märkte dargestellt. Erkennbar ist, dass die Zahl kleiner Lebensmittelgeschäfte im beschriebenen Zeitraum von 13 900 auf 10 064 drastisch abnimmt, während die Zahl der Supermärkte von 9 660 auf 10 505 kontinuierlich leicht ansteigt. Die Zahl der Discounter liegt mit 15 790 im Jahr 2008 deutlich höher und steigt bis 2011 weiter leicht an, um im Jahr 2012 erstmals leicht auf nunmehr 16 393 zu fallen.

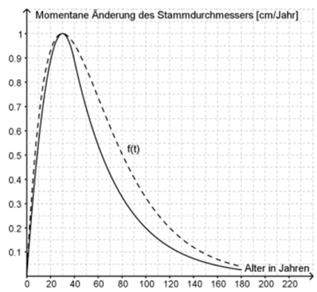
Hier kann beispielsweise ein manipulativer Eingriff in der Diagrammerstellung erkannt werden: Die relative Veränderung der Discounter und der Supermärkte sind fast in allen Jahren nahezu identisch, nur im letzten nicht. Die Anordnung der relativen Änderungen aufsteigend oberhalb der Säulen bei den Supermärkten kaschiert den Abstand und gleichzeitig wird ein erheblich stärkerer Anstieg suggeriert als ihn die Säulen angeben.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2h</td><td>erläutern, wie die Projektgruppe vorgegangen sein könnte, um die Gleichung der Funktion f zu ermitteln.</td><td>Die Funktion f mit $f(x) = 13900 \cdot e^{-0{,}0807 \cdot x}$ beschreibt die Anzahl kleiner Lebensmittelgeschäfte in Abhängigkeit von x, also der seit Beginn des Betrachtungszeitraumes vergangenen Zeit in Jahren.
In die allgemeine Gleichung $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ könnte man z. B. die Punkte $P_1(0|13900)$ sowie $P_2(4|10064)$ einsetzen. Anschließend würde man das so entstandene Gleichungssystem mithilfe eines geeigneten Verfahrens lösen und die Werte von a und b in die Gleichung einsetzen.</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>2i</td><td>beurteilt die Güte dieser Modellierung.</td><td>
<table>
<tr><th>Jahr</th><th>Werte mit Hilfe f(x) berechnet</th><th>Werte anhand der Grafik ermittelt</th></tr>
<tr><td>2009</td><td>$f(1) \approx 12\,822$</td><td>$13\,900 \cdot 0{,}921 \approx 12\,802$</td></tr>
<tr><td>2010</td><td>$f(2) \approx 11\,828$</td><td>$12\,802 \cdot 0{,}874 \approx 11\,189$</td></tr>
<tr><td>2011</td><td>$f(3) \approx 10\,911$</td><td>$11\,189 \cdot 0{,}951 \approx 10\,641$</td></tr>
<tr><td>2012</td><td>$f(4) \approx 10\,065$</td><td>$10\,641 \cdot 0{,}945 \approx 10\,056$</td></tr>
</table>
Nach einem Jahr weicht die Angabe der Grafik (Rückgang um 7,9 %) vom Funktionswert nur gering ab, weil diese von einem Rückgang in Höhe von 7,75 % ausgeht. Die Abweichungen nach zwei und drei Jahren sind deutlich höher.
Abschließend kommt der Schüler zu einem begründeten Urteil hinsichtlich der Güte dieser Modellierung.</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>33</td></tr>
</table>

Aufgabe 3 (Alternative 1): **Stromtrasse auf dem Hang**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	erläutert, warum dieser Modellierungsansatz geeignet ist.	Der Ansatz ist näherungsweise geeignet, aufgrund der folgenden Aspekte: • m: Aufgrund des Steigungswinkels kann die Steigung ermittelt werden. Es gilt: $\tan(\alpha) = \lvert m \rvert \Rightarrow \tan(26{,}6°) \approx 0{,}5$, da die Gerade fällt, gilt dann $m = -0{,}5$. • $b = 0$ ist als Modellierung möglich, wenn der Ursprung des Koordinatensystems in den Hangfuß gelegt wird.	2
3b	weist nach, dass $m_t \approx -0{,}4$ beträgt.	$m_t = l'(x)$ $l'(x) = \frac{1}{985} e^{\frac{2x-5680}{985}} - \frac{1}{985} e^{-\left(\frac{2x-5680}{985}\right)}$ $l'(-100) \approx -0{,}39728 \approx -0{,}4$	1
3c	zeigt, dass sich auf Grundlage der Modellierungsvorgaben mittels eines lineares Gleichungssystem die Funktion g ermitteln lässt.	$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $g'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ I: $g(0) = p(0) + 70 \qquad \Rightarrow c = 70$ II: $g(-400) = p(-400) + 70 \qquad \Rightarrow 160\,000a - 400b + c = 270$ III: $g'(-100) = -0{,}4 \qquad \Rightarrow -200a + b = -0{,}4$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 1 & 70 \\ 160\,000 & -400 & 1 & 270 \\ -200 & 1 & 0 & -0{,}4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2000} \\ -\frac{3}{10} \\ 70 \end{pmatrix}$ $g(x) = \frac{1}{2000}x^2 - \frac{3}{10}x + 70$	4
3d	ermittelt x_1 und x_2 und interpretiert den formalen Ausdruck im Sachkontext und beurteilt die Alternativmodellierung.	$g(x) = l(x) \Rightarrow x_1 \approx -177{,}97$ und $x_2 \approx -13{,}13$ ($x_3 \approx -406{,}38$ und $x_4 \approx 8290{,}98 \notin \mathbb{D}$) Der mittlere Abstand zwischen den Graphen der beiden Modellierungsvorschläge beträgt 0,68 cm, das heißt im Mittel weicht der Graph, der die Stromleitung mittels der quadratischen Parabel modelliert, um 68 cm von dem Graphen der Funktion l ab. Die mittlere Höhe der Stromleitung über dem Boden beträgt schätzungsweise ca. 60 m (exakt 56,67 m, eine grobe Abschätzung aufgrund einer Skizze mit eigenständig ergänzten Werten reicht an dieser Stelle aus), so dass dies einer Abweichung von etwas über 1 % entspricht, welches durchaus noch vertretbar ist. Zumal auch die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion in der Modellierung ungenau ist, da bei ihr die Kurve nicht durch die Mastenspitzen verläuft.	5
3e	prüft, ob durch die vorgegebene Höhe der Sicherheitsabstand eingehalten wird.	Abstand: $d(x) = g(x) - p(x)$: $d(x) = \frac{1}{2000}x^2 - \frac{3}{10}x + 70 - (-0{,}5x) = \frac{1}{2000}x^2 + \frac{1}{5}x + 70$ Den minimalen Abstand liefert die notw. Bedingung: $d'(x)=0$ $0 = \frac{1}{1000}x + \frac{1}{5} \Rightarrow x_E = -200$ Nachweis des Minimums mithilfe der hinreichenden Bedingung: $d'(x_E) = 0$ und $d''(x_E) > 0$ $d''(x_E) = \frac{1}{1000} > 0 \Rightarrow x_E$ ist die Stelle eines lokalen Minimums. Berechnung des Funktionswertes: $d(-200) = 50$ Folglich dürfen die Bäume bis zu 45 Meter hoch werden.	3

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>3f</td><td>erläutert, welche Bedeutung die Parameter S und A auf den allgemeinen Kurvenverlauf haben und
gibt die Bedeutung im Sachkontext an.</td><td>$H(t) = S + (A - S) \cdot e^{-k \cdot t}$
<table>
<tr><th></th><th>Allgemeiner Kurvenverlauf</th><th>Sachkontext</th></tr>
<tr><td>S</td><td>$\lim\limits_{t \to \infty} H(t) = S$
S ist der Grenzwert des Funktionswertes H, wenn t gegen unendlich strebt.</td><td>S ist die maximale Höhe, die der Baum erreichen kann.</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$H(0) = S + A - S = A$
A ist der Ordinatenachsenabschnitt.</td><td>A ist die Anfangshöhe des Baumes am Ende der Jugendphase</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>3g</td><td>entscheidet auf der Grundlage eigener Berechnungen, ob der Sicherheitsabstand langfristig eingehalten wird.</td><td>$H(t) = S + (A - S) \cdot e^{-k \cdot t}$
I $H(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad 10 = S + (A - S) \cdot e^{-k \cdot 0}$
II $H'(0) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \; 0{,}4 = (-10 + S) \cdot k \cdot e^{-k \cdot 0}$
III $H'(60) = 0{,}2 \Rightarrow \; 0{,}2 = (-10 + S) \cdot k \cdot e^{-k \cdot 60}$
$\Rightarrow S \approx 44{,}62; \;\; k \approx 0{,}01155; \;\; A = 10$
Das bedeutet, der Grenzwert der Baumhöhe beträgt 44,62 m, womit auch langfristig der Sicherheitsabstand gewährt bleiben wird.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3h</td><td>weist – ohne die Nutzung von CAS-allgemeingültig nach, dass der Extrempunkt die Koordinaten $E\left(-\frac{1}{b}\middle|-\frac{a}{be}\right)$ hat.</td><td>$f(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t} \qquad f'(t) = (a + a \cdot b \cdot t) \cdot e^{b \cdot t}$
Notw. Bedingung E: $f'(t) = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; 0 = (a + a \cdot b \cdot t) \cdot e^{b \cdot t}$
Betrachtung 1. Faktor: $0 = (a + abt) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{b}$
Betrachtung 2. Faktor: $\nexists t_2 \middle| 0 = e^{b \cdot t_2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_E$
Hinr. Bedingung E: $f'(t_E) = 0$ und $f''(t_E) \neq 0$
$f''\left(-\frac{1}{b}\right) = a \cdot \left(2 \cdot b - b^2 \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot e^{-b \cdot \frac{1}{b}} = \frac{a \cdot b}{e} \neq 0$
$\Rightarrow$ an der Stelle $t = -\frac{1}{b}$ liegt ein Extrempunkt vor.
Berechnung des Funktionswertes:
$f\left(-\frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{b} a \cdot e^{b\left(-\frac{1}{b}\right)} = -\frac{a}{be} \;\; \Rightarrow E\left(-\frac{1}{b}\middle|-\frac{a}{be}\right)$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3i</td><td>beurteilt, ob eine Funktionsgleichung der Art f(t) den abgebildeten Zusammenhang angemessen beschreiben kann und

erläutert, welche Alternative für die grundsätzliche Art der Funktionsgleichung in Frage kommt.</td><td>HP lt. Graphik H(30|1)
$\Rightarrow b = -\frac{1}{30}$ und $a = \frac{1}{30} e$
$\Rightarrow f(t) = = \frac{1}{30} e \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot t}$


Die Beurteilung kann dann z. B. auf Grundlage einer Wertetabelle oder dem Einzeichnen des Graphen dieser Funktion f in das gegebene Koordinatensystem erfolgen. Es sollte dabei deutlich werden, dass insbesondere im Bereich ab t = 30 große Abweichungen erkennbar sind und dieser Modellierungsansatz daher als ungeeignet beurteilt werden könnte. (Graphik nicht gefordert)

Als alternative Funktionsgleichung kommt z. B. eine abschnittsweise definierte Funktionsgleichung in Frage.
Hierbei kann der erste Abschnitt mit der dargelegten Exponentialfunktion beschrieben werden oder auch mit einer ganzrationalen Funktion. Der zweite Abschnitt kann dann mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden.</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>33</td></tr>
</table>

Aufgabe 3 (Alternative 2): Das Riesenrad

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	gibt die Abmessungen d, g und R_h und die Höhe des Einstiegspodestes an.	$d = 60$ m, $g = 3$ m, $R_h = 64$ m. Höhe des Einstiegspodests: $34\text{ m} - 30\text{ m} - 3\text{ m} = 1\text{ m}$	4
3b	leitet anhand der eingangs aufgeführten Daten den Wert des Parameters b her.	$u = d \cdot \pi = 60 \cdot \pi \approx 188{,}5\ [\text{m}]$ $1{,}885 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right] = 1885 \left[\frac{\text{m}}{\text{h}}\right]$ $1885 \frac{\text{m}}{\text{h}} : 188{,}5\text{ m} = 10$ [Umdrehungen pro Stunde] Periodenlänge p: p = 60 min/10 Umdrehungen = 6 min/Umdrehung Periodenlänge: $p = 6 \Longrightarrow b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.	3
3c	beschreibt die innermathematische Bedeutung des Parameters c und begründet, welchen möglichen Wert der Parameter c besitzen kann.	Der Parameter c bewirkt eine Phasenverschiebung (Verschiebung der Sinuskurve in Abszissen-Richtung). Wenn $c > 0$ wird der Graph um c in negative Abszissen-Richtung verschoben. Wenn $c < 0$ wird der Graph um c in positive Abszissen-Richtung verschoben. Die Sinusfunktion verläuft, ohne Verschiebung in Abszissenrichtung, mit einem Wendepunkt mit positiver Tangentensteigung auf der Ordinatenachse. Anstelle des Wendepunktes soll ein Tiefpunkt auf der Ordinatenachse liegen. Dies wird beispielsweise mithilfe einer Verschiebung um eine viertel Periodenlänge in positive Abszissenrichtung oder um eine dreiviertel Periodenlänge in negative Abszissenrichtung erreicht. Somit folgt: $c = -1{,}5$ oder $+4{,}5$.	3
3d	prüft, ob die momentane Höhenänderung zu keinem Zeitpunkt über 0,55m/s liegt.	$h'(t) = 10\pi \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t + \frac{9}{2}\right)\right)$ $h''(t) = -\frac{10}{3}\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(t + \frac{9}{2}\right)\right)$ Ermittlung eines Wendepunktes, z. B. WP $(-4{,}5 \mid 34)$ Da im Wendepunkt in diesem Fall der Zeitpunkt mit der größten Steigung vorliegt, wird die Steigung bei $t = -4{,}5$ untersucht. $h'(-4{,}5) \approx 31{,}42 \left[\frac{\text{m}}{\text{min}}\right] \approx 0{,}52 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ Somit liegt die momentane Höhenänderung zu keinem Zeitpunkt über $0{,}55 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.	3
3e	ermittelt, mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit der Kletterkünstler klettern muss.	$50 = 30 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi \cdot \left(t + \frac{9}{2}\right)\right) + 34$ $\Rightarrow t \approx -3{,}9628$ Da der Definitionsbereich im Intervall $0 \leq t \leq 6$ liegt und zum Zeitpunkt $t = 0$ ein TP vorliegt, folgt hieraus für den gesuchten Zeitpunkt t: $t \approx -3{,}9628 + 6 = 2{,}0372$ Hieraus resultiert eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $\frac{50}{2{,}0372} \approx 24{,}544 \left[\frac{\text{m}}{\text{min}}\right]$. Der Kletterkünstler muss somit durchschnittlich schneller als ca. $24{,}544 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ klettern.	4

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>3f</td><td>erläutert, warum das verwendete lineare Gleichungssystem keine eindeutige Lösung liefert.</td><td>Das LGS führt zu keiner eindeutigen Lösung, da die Gleichungen III und IV unter Einbeziehung der Gleichung II ($a_1 = 0$) linear abhängig sind. Die Information, dass der WP an der Stelle $t = 1{,}5$ liegt, ist aufgrund des Funktionstyps und seines Symmetrieverhaltens eine überflüssige Information, die durch die Stellen zweier Extrema (Gleichung II und IV) bereits determiniert ist.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3g</td><td>bestimmt den Parameter a_2 und

beurteilt, wie gut diese Annäherung durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades gelungen ist.</td><td>$a_3 = \frac{-2a_2}{9}$ und $a_3 = -\frac{40}{9} \Rightarrow \frac{-2a_2}{9} = -\frac{40}{9} \Rightarrow a_2 = 20$

$g(0) = 4$
$g(1{,}5) = 34$
$g(3) = 64$
An den Stellen der Hoch-, Tief- und Wendestelle beschreibt diese ganzrationale Funktion g die halbe Drehung des Riesenrades ebenso gut wie die trigonometrische Funktion f. Die Funktionswerte an anderen Stellen führen allerdings nur zu ähnlichen Funktionswerten. Beispielsweise:
<table>
<tr><th>Zeit t</th><th>trigonometrisch</th><th>ganzrational</th></tr>
<tr><td>1</td><td>19 m</td><td>≈19,56 m</td></tr>
<tr><td>2</td><td>49 m</td><td>≈48,44 m</td></tr>
<tr><td>2,5</td><td>≈59,98 m</td><td>≈59,56 m</td></tr>
</table>
Die Abweichungen sind dabei aber klein, so dass die ganzrationale Funktion als Annäherung geeignet ist.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3h</td><td>zeigt, dass
$m = -225$ und
$s \approx 1261$
gelten müssen.</td><td>Da angenommen wird, dass der Übergang knickfrei ist, müssen sowohl die Funktionswerte als auch die Tangentensteigungen an der Stelle $x = 5{,}25$ in ihren Grenzwerten bei links- und rechtsseitiger Annäherung identisch sein. Da beide Abschnitte der Funktion b ganzrational und somit je für sich stetig und differenzierbar sind, kann die Annäherung über die Funktionswerte und Tangentensteigungen dieser beiden Funktionsgleichungen erfolgen.
Somit gilt: I. $b_1(5{,}25) = b_2(5{,}25)$
und II. $b_1'(5{,}25) = b_2'(5{,}25)$
mit $b_1(x) = -\frac{400}{21}x^4 + \frac{12800}{63}x^3 - \frac{4000}{7}x^2 + 900$
und $b_2(x) = m \cdot x + s$
Aus II. folgt: $b_1'(5{,}25) = m = -225$
Aus I. folgt: $b_1(5{,}25) \approx 79{,}69$
$79{,}69 = -225 \cdot 5{,}25 + s \Leftrightarrow s \approx 1261.$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3i</td><td>berechnet, für welchen Zeitraum nur ein Mitarbeiter benötigt wird.</td><td>$\lim\limits_{g\to 5{,}25} \int_0^g b_1(x)\,dx = \lim\limits_{g\to 5{,}25} B_1(g) - B_1(0) = B_1(5{,}25) \approx 556$
Nach 5,25 Stunden bzw. um 19:15 Uhr befinden sich noch ca. 556 Personen auf dem Pfingstmarkt.
556−500= 56 Besucher
Somit müssen noch 56 Besucher den Freizeitpark verlassen.
Berechnung der folgenden Integralgleichung:
$-56 = \int_{5{,}25}^{x}(-225x + 1261)dx = -112{,}5x^2 + 1261x - \frac{112623}{32}$
$\Rightarrow x_1 \approx 4{,}81 \notin \mathbb{D}$
$x_2 \approx 6{,}39$

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3i		$-556 = \int_{5,25}^{x}(-225x + 1261)dx = -112{,}5x^2 + 1261x - \frac{112623}{32}$ $\Rightarrow x_3 \approx 3{,}35 \notin \mathbb{D}$ $x_4 \approx 7{,}86 = n$ Dauer: $n - x_2 = 7{,}86 - 6{,}39 = 1{,}47$ Das heißt, dass für eine Dauer von ca. 1,5 Stunden nur eine Einstiegshilfe eingeplant werden muss.	
3j	beurteilt, inwieweit der gegebene formale Ausdruck mit der vorausgehenden Aussage übereinstimmt.	$\int_{x}^{x+0,25} b(x)dx \le 210$ Der formale Ausdruck ist eine Integralfunktion, die jedem Zeitpunkt x die Summe aller Besucherzahländerungen innerhalb der nächsten 15 Minuten zuordnet. Liegt dieser Funktionswert bei maximal 210, dann entspricht dieses der Kapazität des Riesenrads und niemand muss länger als bis zum nächsten Stop des Riesenrades warten, um eine Fahrt anzutreten, selbst wenn alle Besucher Riesenrad fahren wollten. Allerdings berücksichtigt diese Gleichung nicht, dass es sich bei der Funktion b um die kumulierten Besucherzu- und abflüsse handelt, so dass trotz dieser Gleichung mehr als 210 Besucher neu auf dem Pfingstmarkt eintreffen könnten, so lange hinreichend viele ihn innerhalb der gleichen Zeitspanne verlassen haben. Daher ist diese Gleichung nicht geeignet um sicher vorauszusagen, dass kein Engpass entsteht.	3
			33