Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Gleichung der abschnittsweise definierten Funktion f_{ab} mit:

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} 1{,}5x^2 - 5x + 3 & \text{für } x \leq 3 \\ a \cdot x + b & \text{für } x > 3 \end{cases}.$$

a1) Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f_{ab}.

a2) Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von f_{ab} sprung- und knickfrei verläuft.

a3) Zeigen Sie, dass die Gleichung: $\int_k^2 f_{ab}(x)\,dx = -1$ für den Parameter $k = 1$ erfüllt ist.

b) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \text{ mit } a, b \neq 0,$$

ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Funktion F mit der Gleichung: $F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x + e$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		
Wenn $a = b = 1, c = 0$ und $d \geq 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f immer null.		
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit: $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.		

c) Der Graph der ganzrationalen Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2 \text{ mit } a \neq 0$$

schneidet die Abszissenachse bei $x_1 = -1$ und berührt an der Stelle $x_2 = 2$ die Abszissenachse.

c1) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem.

c2) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

d) Für den Graphen der Funktion f gilt der folgende Definitionsbereich: $D_f = [2; 8]$. Der auf der Geraden f verschiebbare Punkt P ist rechter oberer Eckpunkt eines Rechteckes, dessen linke und untere Seite auf den Koordinatenachsen liegen (vergleiche Beispiel in Abb. 1.1).

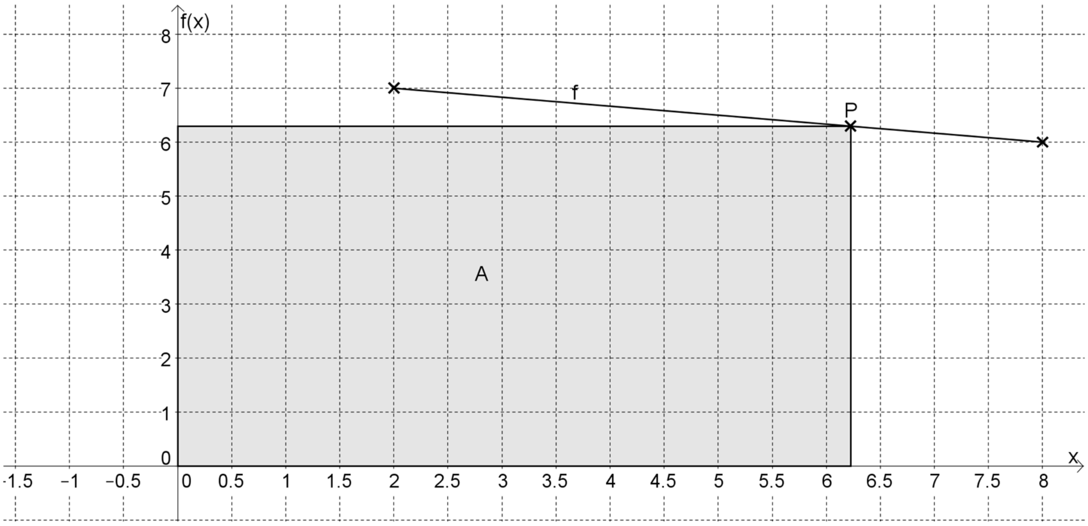


Abbildung 1.1

d1) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

d2) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird.

e) Gegeben sind die Gleichungen der folgenden zwei Geraden und einer Ebene in der Parameterdarstellung.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ k \end{pmatrix} \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e1) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 für $k = 2$.

e2) Bestimmen Sie den Parameter k so, dass die beiden Geraden g_1 und g_2 parallel, aber nicht identisch sind.

e3) Bestimmen Sie den Parameter k so, dass die Gerade g_2 und die Ebene E sich schneiden.

f) Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit den folgenden Gleichungen:

$$E_1: 3x - 4y + 6z = -2 \quad \text{und} \quad E_2: 2x - 2y + 3z = 2.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Ebene E_3 mit der Gleichung: $2x - 2y + 3z = -2$ und die Ebene E_2 sind identisch.		
Der Punkt $B(4\|0\|-2)$ liegt in der Ebene E_2, aber nicht in der Ebene E_1.		
Die Ebene E_2 schneidet die y-Achse in dem Punkt $S_y(0\|1{,}5\|0)$.		
Die Gleichung $-1{,}5x - 2y + 3z = -2$ beschreibt auch die Ebene E_1.		
Ein Normalenvektor der Ebene E_1 ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$.		

g) Die Punkte $D(2|-4|-3)$, $E(4|-1|3)$ und $F(5|2|-1)$ bilden die Eckpunkte eines Dreiecks.

Prüfen Sie rechnerisch, ob es sich dabei um ein gleichschenkliges oder gleichseitiges Dreieck handelt.

h) Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit den Gleichungen:

$$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2a \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E_2.

h1) Geben Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E_1 in Koordinaten- und Parameterform an.

h2) Ermitteln Sie den Wert des Parameters a, so dass die Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 linear abhängig sind.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: AirRace**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	4	3	6	3	4	3	3	8	6	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Beim AirRace geht es darum, möglichst schnell mit einem Flugzeug einen Parcours abzufliegen. Dieser wird durch sogenannte „Air Gates“, mindestens 15 m breite Tore, markiert. Die „Air Gates“ bestehen aus 20 m hohen Pylonen (aus Stoff gefertigte und mit Luft gefüllte seitliche Begrenzungen der Flugstrecke). Zusätzlich müssen die Piloten bestimmte, vorgegebene Manöver fliegen, für die anschließend von Schiedsrichtern Punkte vergeben werden. Im gesamten Rennen darf eine Flughöhe von 10 m nicht unterschritten werden, im Allgemeinen wird auf einer Höhe von 15 m geflogen. Es wird im Wettkampf nur über Wasserflächen geflogen (alle Angaben sind in Metern).

Die anschließende Graphik (Abb. 2.1) zeigt den Parcours und eine Flugroute.

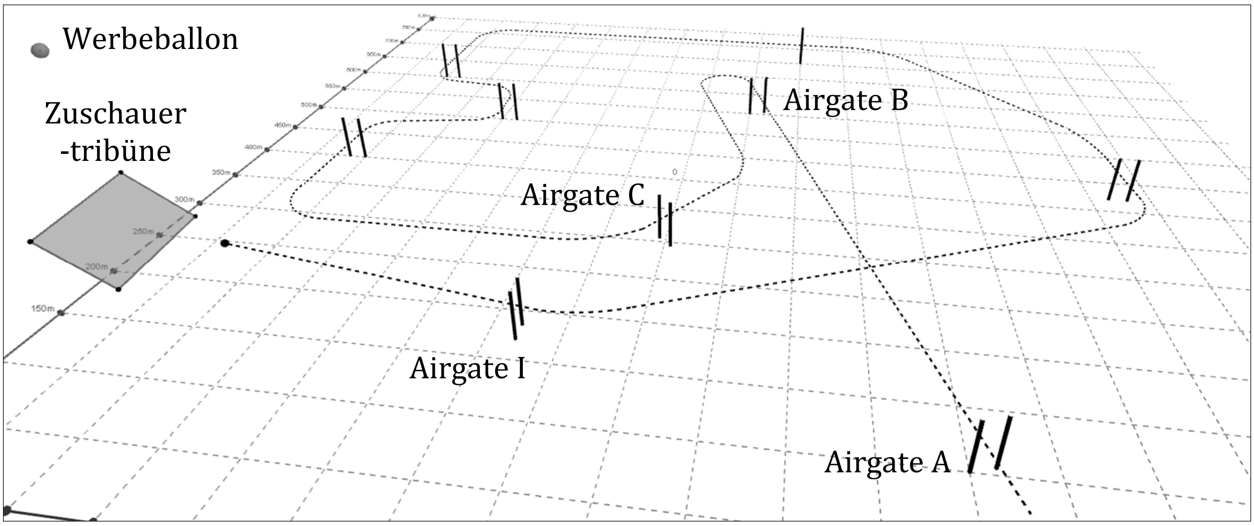


Abbildung 2.1 Ansicht des Parcours

Jedes Airgate wird durch zwei Pylonen begrenzt. Die Fußpunkte der Pylonen der Airgates A, B und C können Sie der Tabelle 2.1 entnehmen:

	1. Pylon	2. Pylon
Airgate A	$A_1(600\|100\|0)$	$A_2(615\|105\|0)$
Airgate B	$B_1(450\|550\|0)$	$B_2(465\|555\|0)$
Airgate C	$C_1(395\|305\|0)$	$C_2(405\|295\|0)$

Tabelle 2.1

Die Angaben der Punkte in Tabelle 2.1 beziehen sich auf die Mitte der Fußpunkte der Pylonen.

Als erste Aufgabe sind vom Piloten nacheinander die Airgates A und B (Abb. 2.1) zu durchfliegen. Dafür darf er nicht länger als 5 Sekunden benötigen.

a) Begründen Sie, dass sich die entsprechende Flugroute mit der folgenden Gleichung

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 607{,}5 \\ 102{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -150 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben lässt, wenn davon ausgegangen wird, dass die Airgates mittig zwischen den Pylonen durchflogen werden.

b) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, mit der der Pilot mindestens fliegen muss, um diese erste Aufgabe zu erfüllen.

Im Anschluss daran absolviert der Pilot einen Steigflug mit mehreren Pirouetten (nicht in Abb. 2.1 dargestellt). Nach Abschluss dieser Manöver befindet er sich im Punkt $P(800|700|300)$. Von hier aus muss er das Airgate C auf einer Höhe von höchstens 20 m und mindestens 10 m passieren. Dazu fliegt er in Richtung des Vektors:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix}.$$

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Pilot das Airgate C in einer Höhe von höchstens 20 m und mindestens 10 m passiert.

Der Pilot kann den Sinkflug bei einer solchen Höhe nur dann abfangen, wenn der Schnittwinkel in dieser Situation gegenüber der Wasseroberfläche beim Passieren des Airgates nicht größer als 30° ist. (Die Wasseroberfläche wird in diesem Fall als plane Fläche mit der Höhe $z = 0$ betrachtet.)

d) Prüfen Sie, ob der Pilot die Maschine noch rechtzeitig abfangen kann.

Die Zuschauertribüne lässt sich durch die Koordinaten der Eckpunkte $T_1(20|180|0)$, $T_2(10|280|0)$, $T_3(-40|275|40)$ und $T_4(-30|175|40)$ beschreiben (siehe Abb. 2.1).

e) Begründen Sie, dass die Ebene E mit der Ebenengleichung:

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq s \leq 1 \text{ und } 0 \leq t \leq 1$$

die Zuschauertribüne beschreibt.

f) Ermitteln Sie die Zuschauerkapazität der Tribüne unter der Maßgabe, dass pro Sitzplatz 0,75 m^2 berücksichtigt und 20 % der Gesamtfläche für Aufgänge benötigt werden.

Als Werbeträger hat der Hauptsponsor einen großen, kugelförmigen Ballon ausgebracht. Dieser mit Helium befüllte Ballon wird mit Hilfe einer Gasflasche befüllt und soll mittig über den Sitzflächen der Zuschauertribüne mithilfe eines Seils befestigt werden. Die Höhe des Zentrums des Ballons senkrecht (lotrecht) über der Wasseroberfläche ($z = 0$) soll 270 m betragen. Der Ballon hat einen Durchmesser von 10 m und das Seil ist an seiner Unterseite befestigt.

g) Berechnen Sie die Koordinaten des Zentrums des kugelförmigen Ballons und die Länge des Seils, das für die Befestigung des Ballons an der Zuschauertribüne benötigt wird.

Zum Abschluss durchfliegt der Pilot mittig das Airgate I im Punkt I_1 (320|177,5|15) und hält dann zum Abschied in Richtung des Punktes Q (100|200|15) direkt auf die Zuschauertribüne zu. Die Regularien besagen, dass ein quaderförmiger Sicherheitsbereich um die Tribüne nicht durchflogen werden darf (siehe Abb. 2.2). Der gekennzeichnete Sicherheitsabstand s von der oberen und seitlichen Begrenzung der Tribüne beträgt dabei 150 m.

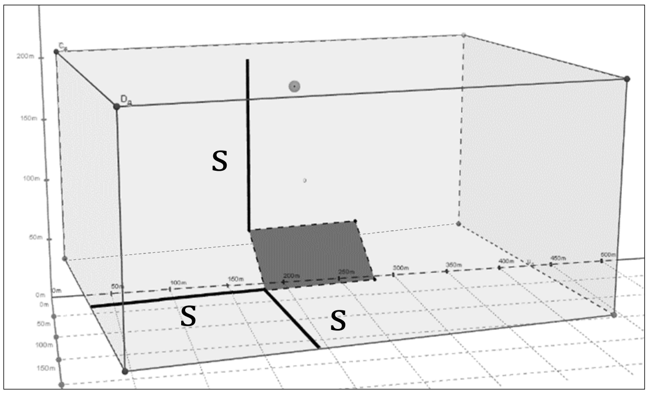


Abbildung. 2.2: quaderförmiger Sicherheitsbereich

h) Berechnen Sie den Punkt, in dem der Pilot bei gleichbleibender Flugroute in diesen Sicherheitsbereich (in diesem Fall die direkt 150 Meter in Sichtrichtung der Zuschauer vor der Tribüne liegende Begrenzungsebene) einfliegen und damit nachträglich disqualifiziert werden würde.

Um nicht disqualifiziert zu werden, behält der Pilot zwar den Kurs grundsätzlich bei, aber befindet sich genau ab Durchflug des Airgates I in einem Steigflug mit einer Steigung von 120 %.

i) Zeigen Sie, dass der minimale Abstand, mit dem der Pilot bei unverändertem Steigflug den kugelförmigen Werbeballon mit einem Durchmesser von 10 m passieren wird, ca. 142,87 m beträgt. Es wird davon ausgegangen, dass das Zentrum (der Mittelpunkt) des Ballons sich nun im Punkt Z(0|210|170) befindet.

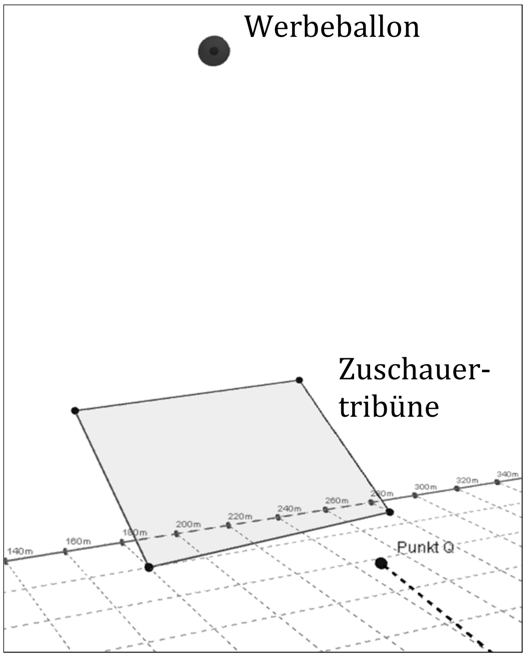


Abbildung 2.3: Ansicht der Zuschauertribüne

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

---

a) Gegeben ist die Gleichung der abschnittsweise definierten Funktion f_{ab} mit:

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} 1{,}5x^2 - 5x + 3 & \text{für } x \leq 3 \\ a \cdot x + b & \text{für } x > 3 \end{cases}.$$

a1) Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f_{ab}.

a2) Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von f_{ab} sprung- und knickfrei verläuft.

a3) Zeigen Sie, dass die Gleichung: $\int_k^2 f_{ab}(x)\,dx = -1$ für den Parameter $k = 1$ erfüllt ist.

b) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \text{ mit } a, b \neq 0,$$

ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Funktion F mit der Gleichung: $F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x + e$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		
Wenn $a = b = 1$, $c = 0$ und $d \geq 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f immer null.		
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit: $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.		

c) Der Graph der ganzrationalen Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2 \text{ mit } a \neq 0$$

schneidet die Abszissenachse bei $x_1 = -1$ und berührt an der Stelle $x_2 = 2$ die Abszissenachse.

c1) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem.

c2) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

d) Für den Graphen der Funktion f gilt der folgende Definitionsbereich: $D_f = [2; 8]$. Der auf der Geraden f verschiebbare Punkt P ist rechter oberer Eckpunkt eines Rechteckes, dessen linke und untere Seite auf den Koordinatenachsen liegen (vergleiche Beispiel in Abb. 1.1).

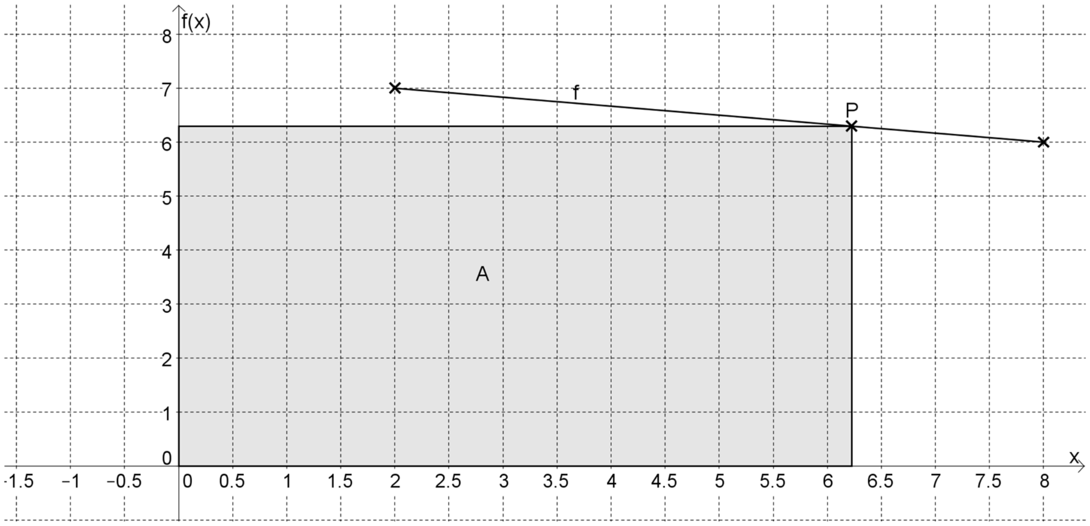


Abbildung 1.1

d1) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

d2) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird.

e) Gegeben ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & 10 \\ 3 & -5 & -4 & 22 \end{array}\right)$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

f) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&2\\-1&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\text{ und }D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Für die Matrix D gilt: $D = A^T$.		
Die Rechenoperation $A \cdot B - B$ ist definiert.		
Zur Matrix C existiert die inverse Matrix C^{-1} und es gilt: $C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.		
Es gilt: $C^n = E$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, wobei die Matrix E die Einheitsmatrix ist.		
Wenn für die Matrix $M = B \cdot C$ gilt, so gilt für die Matrix $C = B^{-1} \cdot M$.		

g) Gegeben sind die Matrizen:

$$Q_s=\begin{pmatrix}-1&2&5\\0&-3&2s\end{pmatrix},\ P_s=\begin{pmatrix}0&s&0\\-2&1&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\text{ und }R=\begin{pmatrix}6&4\\-2&5\\1&3\end{pmatrix}.$$

g1) Berechnen Sie $Q_s \cdot P_s = M_s$.

g2) Bestimmen Sie den Wert für s derart, dass für die Matrix $M_s=\begin{pmatrix}-4&5&11\\6&1&18\end{pmatrix}$ gilt.

g3) Entscheiden und begründen Sie, ob die Matrizen $Q_s \cdot R$ und $Q_S^T \cdot R^T$ vom gleichen Typ sein können.

h) Gegeben ist die Matrizengleichung $A \cdot X + B = A^T$ sowie die Matrix $A=\begin{pmatrix}8&4\\0&k\end{pmatrix}$.
(Alle gegebenen Matrizen sind invertierbar und vom gleichen Typ.)

h1) Stellen Sie die gegebene Matrizengleichung nach der Matrix X um.

h2) Berechnen Sie die Matrix A^{-1} in Abhängigkeit vom Parameter k.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Meeresschildkröten**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	3	7	3	7	5	7	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Alle Meeresschildkröten sind in ihrem Bestand vom Aussterben bedroht. So hat der WWF (World Wide Fund for Nature) schon seit mehreren Jahren festgestellt, dass die Populationsbestände der Meeresschildkröten zurückgegangen sind und dringender Handlungsbedarf besteht, diese Meeresschildkröten nachhaltig zu schützen.

In der folgenden Aufgabe soll die Entwicklung einer Meeresschildkrötenpopulation (im Folgenden Schildkrötenpopulation genannt) mathematisch modelliert werden. Dazu wird die Schildkrötenpopulation in vier Altersgruppen aufgeteilt:

Altersgruppen	Kurzzeichen	Alter in Jahren
Eier und Geschlüpfte	G	<1
Jungtiere	J	1 - 16
fast Ausgewachsene	A	17 - 25
Brüter	B	>25

Tabelle 2.1

Die Schildkrötenpopulation wird durch den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_n} = (G_n \quad J_n \quad A_n \quad B_n)^T$, beschrieben, der die Anzahlen der Individuen der jeweiligen Altersklasse nach n Jahren angibt. Die jährliche Entwicklung dieser Schildkrötenpopulation wird durch die Tabelle 2.2 bzw. durch die Matrix M dargestellt.

	G	J	A	B
G	0	0	0	110
J	0,08	0,680	0	0
A	0	0,001	0,71	0
B	0	0	0,04	0,8

Tabelle 2.2

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0{,}08 & 0{,}680 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Die Übergangsraten von einer zur nächsten Altersstufe sind hier als durchschnittliche Werte angegeben und berücksichtigen zusätzlich auch, dass männliche Schildkröten keine Eier legen.

a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen für die in der Matrix M bzw. in der Tabelle 2.2 angegebenen Informationen.

b) Erläutern Sie die Bedeutung der von Null verschiedenen Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix M und die Bedeutung des Matrixelementes $m_{32} = 0{,}001$.

c) Begründen Sie allgemein und im Sachzusammenhang, dass die Matrix M keine stochastische Matrix sein kann.

Der WWF hat unter anderem festgestellt, dass z. B. die Population der Lederschildkröte im Ostpazifik in den letzten 20 Jahren um 90 % zurückgegangen ist.
Zum Vergleich beobachtete deshalb ein Forscherteam die Schildkrötenpopulation nun besonders intensiv und kann durch ihre Beobachtungen einen Schildkrötenpopulationsbestand feststellen, der mit Hilfe des Bestandsvektors $\overrightarrow{p_0} = (14\,000 \quad 8\,000 \quad 4\,000 \quad 130)^T$ beschrieben wird.

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Modellierung durch die Matrix M jeweils den Bestandsvektor der Schildkrötenpopulation nach einem, nach fünf und nach neun Jahren.

   Vergleichen Sie die zukünftige Entwicklung dieser gesamten Schildkrötenpopulation seit Beobachtungsbeginn mit der Entwicklung der Population der Lederschildkröte im Ostpazifik in den letzten 20 Jahren.

Man geht davon aus, dass die Schildkrötenpopulation eingeht, wenn nur noch zwei ausgewachsene Tiere ein Jahr überleben können.

e) Geben Sie an, nach wie vielen Jahren ungefähr die Schildkrötenpopulation bei unveränderten Lebensbedingungen eingehen würde.

An einem ausgewählten Küstenabschnitt wurde eine intensive zweijährige Untersuchung der Schildkrötenpopulation, die am 01.03.2015 aus insgesamt 4 740 Individuen bestand, durchgeführt. Statistische Erhebungen lassen erkennen, dass es dort zu Untersuchungsbeginn am 01.03.2013 doppelt so viele Jungtiere (J) wie fast Ausgewachsene (A) gab. Von der Anzahl der Eier und der Geschlüpften (G) wird angenommen, dass sie dreimal so groß war wie die der fast Ausgewachsenen (A). Die Zahl der Brüter (B) wurde auf 5 % der Jungtiere (J) geschätzt.

f) Zeigen Sie, dass die Schildkrötenpopulation zu Untersuchungsbeginn (am 01.03.2013) durch den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_A} = (3A \quad 2A \quad A \quad 0{,}1A)^T$ beschrieben werden kann.

   Bestimmen Sie die Verteilung der Schildkrötenpopulation auf die einzelnen Altersgruppen zu Untersuchungsbeginn, am 01.03.2013 und am 01.03.2015, wenn sich die Schildkrötenpopulation gemäß der Matrix M entwickelt hat.

Bei der Gründung einer Schutzorganisation für Meeresschildkröten werden drei Einsatzfelder festgelegt und es werden entsprechende Abteilungen gebildet: „Schutz der Brutbereiche“ (S), „Pflege und Auswilderung erwachsener Tiere“ (P) und „Information“ (I). Diese Schutzorganisation hat 40 Mitarbeiter, die nach und nach alle Abteilungen kennenlernen sollen, deshalb soll ein jährlicher Austausch zwischen den Abteilungen nach folgendem Modell (Abb. 2.1) stattfinden:

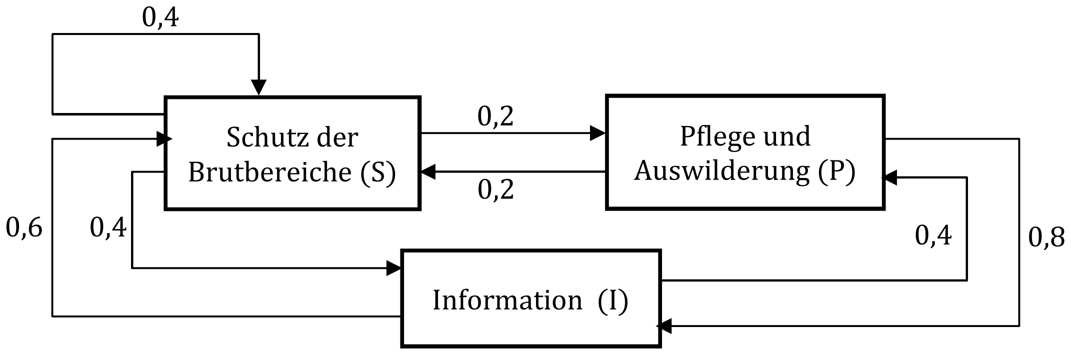


Abbildung 2.1

g) Erstellen Sie eine zugehörige Übergangsmatrix $V = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \text{von:} & \\ S & P & I \end{array} \\ \text{zu:}\ \begin{array}{c} S \\ P \\ I \end{array} & \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \end{array}.$

Ermitteln Sie eine Anfangsverteilung für die 40 Mitarbeiter auf die Abteilungen, so dass die Anzahl der Mitarbeiter pro Abteilung jedes Jahr stabil bleibt.

Der Chef der Organisation möchte eine stabile Verteilung der 40 Mitarbeiter auf die Abteilungen, bei der in den Abteilungen S und P immer jeweils 10 Mitarbeiter und in der Abteilung I entsprechend 20 Mitarbeiter beschäftigt sind. Der Chef möchte auch, dass immer mindestens 10 % der Mitarbeiter in der Abteilung S verbleiben und grundsätzlich in allen Abteilungen ein Wechsel stattfindet. Außerdem gibt er die folgenden Wechselwahrscheinlichkeiten der Mitarbeiter mit Hilfe der neuen Übergangsmatrix W vor:

$$W = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S & P & I \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ P \\ I \end{array} & \begin{pmatrix} a & b & 0{,}4 \\ c & 0{,}1 & 0{,}4 \\ d & e & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

h) Bestimmen Sie die fehlenden Elemente der Übergangsmatrix W so, dass die gewünschte Verteilung der Mitarbeiter auf Grund der vom Chef vorgegebenen Wechselwahrscheinlichkeiten erhalten bleibt.

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

---

a) Gegeben ist die Gleichung der abschnittsweise definierten Funktion f_{ab} mit:

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} 1{,}5x^2 - 5x + 3 & \text{für } x \leq 3 \\ a \cdot x + b & \text{für } x > 3 \end{cases}.$$

a1) Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f_{ab}.

a2) Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von f_{ab} sprung- und knickfrei verläuft.

a3) Zeigen Sie, dass die Gleichung: $\int_k^2 f_{ab}(x)\,dx = -1$ für den Parameter $k = 1$ erfüllt ist.

b) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \text{ mit } a, b \neq 0,$$

ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Funktion F mit der Gleichung: $F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x + e$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		
Wenn $a = b = 1$, $c = 0$ und $d \geq 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f immer null.		
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit: $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.		

c) Der Graph der ganzrationalen Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2 \text{ mit } a \neq 0$$

schneidet die Abszissenachse bei $x_1 = -1$ und berührt an der Stelle $x_2 = 2$ die Abszissenachse.

c1) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem.

c2) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

d) Für den Graphen der Funktion f gilt der folgende Definitionsbereich: $D_f = [2; 8]$. Der auf der Geraden f verschiebbare Punkt P ist rechter oberer Eckpunkt eines Rechteckes, dessen linke und untere Seite auf den Koordinatenachsen liegen (vergleiche Beispiel in Abb. 1.1).

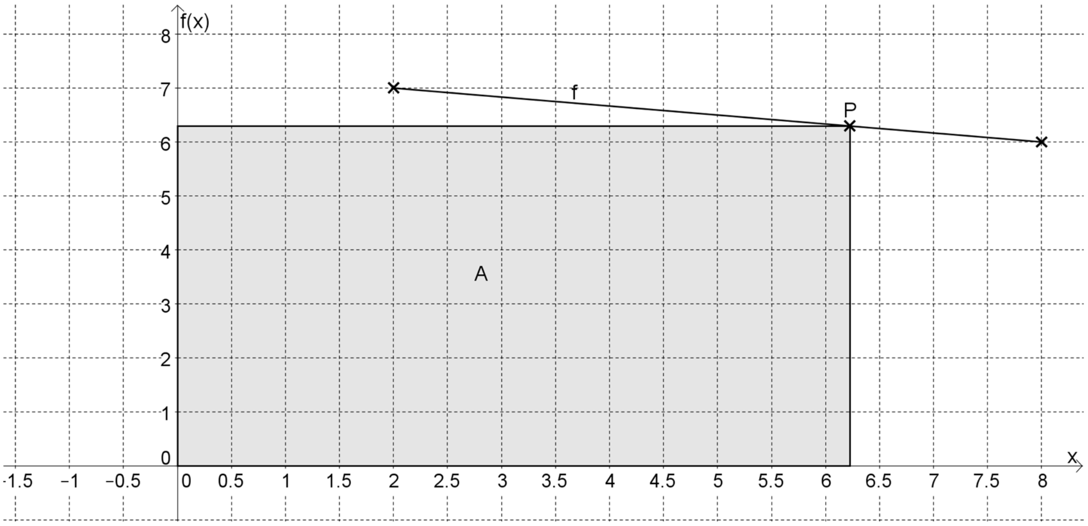


Abbildung 1.1

d1) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

d2) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird.

e) In der folgenden Wertetabelle ist die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariablen X dargestellt.

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	a	4a	6a	9a
$P(X = x_i)$				

Tabelle 1.1

e1) Geben Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X als Vielfaches von a an.

e2) Erläutern Sie, welches x_i die kleinste Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ haben muss.

e3) Ermitteln Sie den Wert für den Parameter a und
geben Sie die Wahrscheinlichkeiten als Dezimalzahlen in der untersten Zeile der Wertetabelle (Tab. 1.1) an.

f) Im Folgenden sind ein Wahrscheinlichkeitsbaum sowie ein unvollständiges Vierfelderdiagramm mit absoluten Häufigkeiten gegeben.

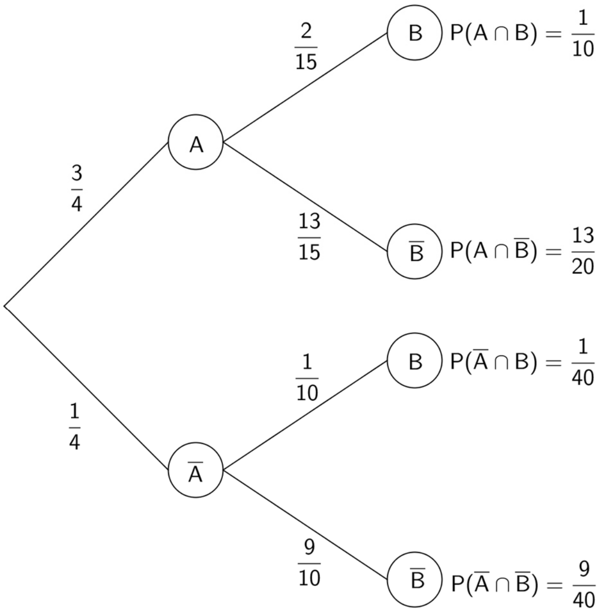


Abbildung 1.2

	A	$\overline{A}$	Summen
B			
$\overline{B}$			
Summen			2 000

Tabelle 1.2

f1) Ergänzen Sie alle fehlenden Werte im Vierfelderdiagramm (Tab. 1.2) so, dass diese zum abgebildeten Wahrscheinlichkeitsbaum (Abb. 1.2) passen.

f2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A}|B) =$ ☐.

g) Bei einem Hypothesentest wurden folgende Annahme- und Ablehnungsbereiche ermittelt:
Annahmebereich $A = \{0;\ 1;\ 2; \ldots ; 199; 200\}$ und
Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{201;\ 202; \ldots ; 299;\ 300\}$.
Hierbei lag die binomialverteilte Zufallsvariable X mit n = 300 und p = 0,6 zu Grunde.
Für den Fehler 1. Art wurde dabei eine Wahrscheinlichkeit von $\alpha \approx 0{,}736\ \%$ ermittelt.
Für eine reale Erfolgswahrscheinlichkeit von $p_1 = 0{,}7$ tritt ein Fehler 2. Art mit einer Wahrscheinlichkeit von $\beta \approx 11{,}63\ \%$ auf.

g1) Geben Sie die beiden Hypothesen an, die dem Hypothesentest zugrunde liegen.

H_0: ☐ H_1: ☐

g2) Geben Sie die Gleichung an, mit der der Fehler 1. Art näherungsweise berechnet wurde.

$0{,}00736 \approx$ ☐

g3) Erläutern Sie, warum der Fehler 2. Art sinken würde, wenn der Fehler 1. Art steigt.

h) Nachfolgend ist die Lage und die Streuung eines Merkmals Z mittels eines Boxplotdiagramms dargestellt:

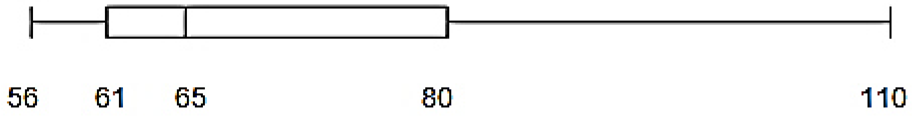


Abbildung 1.3

Folgende lückenhafte Häufigkeitstabelle mit $h_i > 0$ und $h_i \in \mathbb{N}$ liegt dem Boxplot-Diagramm zugrunde:

z_i	h_i
	1
58	3
61	
63	4
70	2
80	3
	2
$\sum$	18

Tabelle 1.3

h1) Geben Sie auf Grundlage der Häufigkeitstabelle (Tab. 1.3) und des Boxplotdiagramms (Abb. 1.3) die folgenden statistischen Größen an.

(1) Modus: $z_{\text{Modus}} =$ ☐

(2) Quartilsabstand: $Q_3 - Q_1 =$ ☐

h2) Ergänzen Sie auf Grundlage des Boxplotdiagramms (Abb. 1.3) die fehlenden Merkmalsausprägungen und absoluten Häufigkeiten in der Häufigkeitstabelle (Tab. 1.3).

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Im Bistro**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	4	6	6	5	6	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

An einer Beruflichen Schule in Schleswig-Holstein haben die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrerinnen und Lehrer (im Folgenden mit Lehrer bzw. Schüler bezeichnet) die Möglichkeit, mittags im Bistro zu essen. Hierfür werden jeden Tag zwei Gerichte angeboten: Das Tagesgericht sowie ein vegetarisches Gericht.

Im Rahmen eines Wirtschaftsprojektes haben Schüler des 12. Jahrgangs die Anzahl der verkauften Gerichte für die vergangene Woche ermittelt und ausgewertet. Sie haben das folgende Säulendiagramm (Abb. 2.1) erstellt, das neben den absoluten Häufigkeiten der einzelnen Tage auch den jeweiligen Mittelwert abbildet.

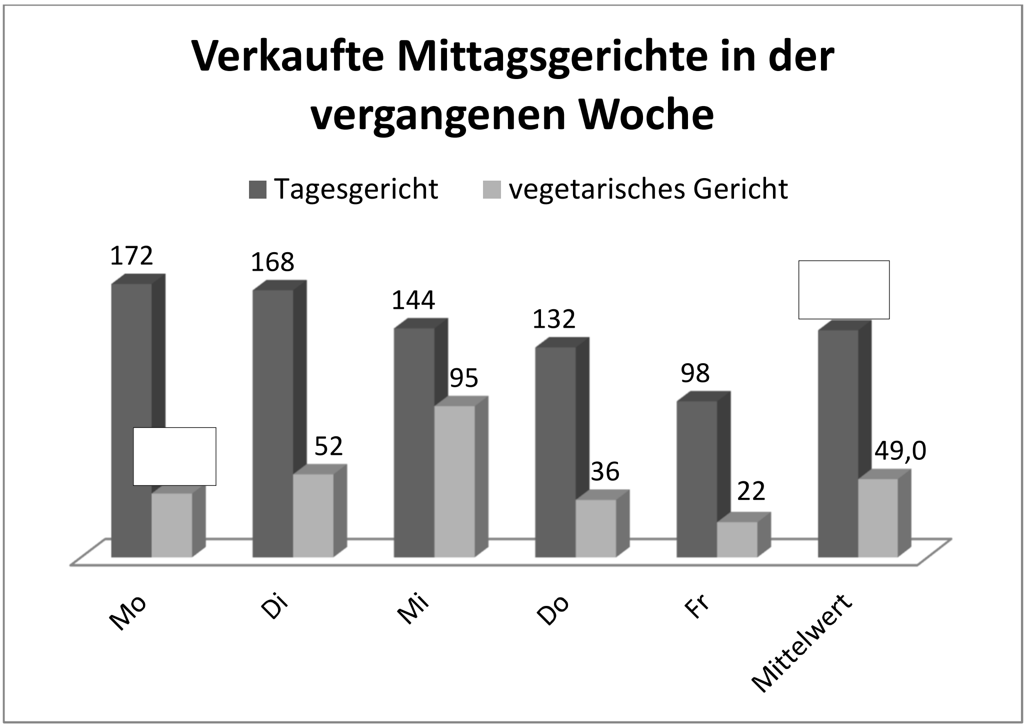


Abbildung 2.1

Leider fehlen zwei Werte auf dem Ausdruck des Diagramms, welches die Schüler durch Kästen markiert haben. Die fehlenden Werte sollen zumindest kurzfristig handschriftlich ergänzt werden.

a) Berechnen Sie die beiden fehlenden Werte.

Ein Schüler behauptet: „Die tägliche Anzahl der verkauften vegetarischen Gerichte streut viel stärker als die Anzahl der täglich verkauften Tagesgerichte.“

b) Nehmen Sie auf der Grundlage eines geeigneten Streuungsmaßes Stellung zu der Aussage des Schülers. Sollten Sie in Aufgabe a) zu keinen sinnvollen Werten gelangt sein, schätzen Sie diese aufgrund der dargestellten Säulen ab.

Der Betreiber des Bistros ist insbesondere mit der Anzahl der täglich verkauften vegetarischen Gerichte unzufrieden. Er hat diese auf den ausdrücklichen Wunsch der Schülervertretung ins Programm aufgenommen. Die Schülervertretung vertritt auch nach wie vor die Meinung, dass ein vegetarisches Gericht wichtig ist, da immer mehr Schüler Vegetarier sind. In Deutschland ernähren sich aktuell 9 % der Bevölkerung vegetarisch.

c) Erläutern Sie, unter welchen Annahmen die Anzahl der Vegetarier unter den Schülern der Berufsbildenden Schule als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.

An der Berufsbildenden Schule werden insgesamt 1 850 Schüler unterrichtet. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der Vegetarier binomialverteilt ist und auch hier die Trefferwahrscheinlichkeit in Höhe von 9 % für Vegetarier gilt.

d) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit…
   - genau 167 Vegetarier,
   - weniger als 150 Vegetarier und
   - mehr als 250 Vegetarier an der Schule sind.

Der Betreiber des Bistros ist jedoch der Meinung, dass an der Berufsbildenden Schule die Anzahl der Vegetarier geringer ist als im Bundesdurchschnitt und bittet die Schülervertretung, dieses zu testen. Diese schlägt einen Hypothesentest mit 300 zufällig ausgewählten Schülern und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von maximal 5 % vor.

e) Formulieren Sie auf der Grundlage des dargelegten Hypothesentests die Entscheidungsregel.

Insgesamt ist aufgrund der Verkaufszahlen der ersten Woche zu vermuten, dass auch häufig Nichtvegetarier das vegetarische Gericht wählen. Insbesondere bei den Frauen ist das vegetarische Gericht beliebt, in 60 % der Fälle haben sie eines der 245 vegetarischen Gerichte bestellt, wohingegen 462 der 714 Tagesgerichte von Männern bestellt worden sind. Die Schülervertretung möchte daher das Bistro gezielt bei den Schülerinnen und Lehrerinnen bewerben, die ihrer Meinung nach im Bistro seltener zu Mittag essen als Männer.

f) Prüfen Sie mittels eines Vierfelderdiagramms, ob tatsächlich weniger Frauen als Männer das Bistro zum Mittagessen nutzen.

Die Schülervertretung hat im Zusammenhang mit ihrer Befragung auch weitere Aspekte abgefragt. Die Ergebnisse zeigen, dass einige Schüler das Mittagsangebot im Bistro nicht nutzen, da ihnen die Wartezeit zu lang ist. Messungen ergaben, dass die Wartezeit beim Mittagsangebot normalverteilt gemäß der Abbildung 2.2 ist:

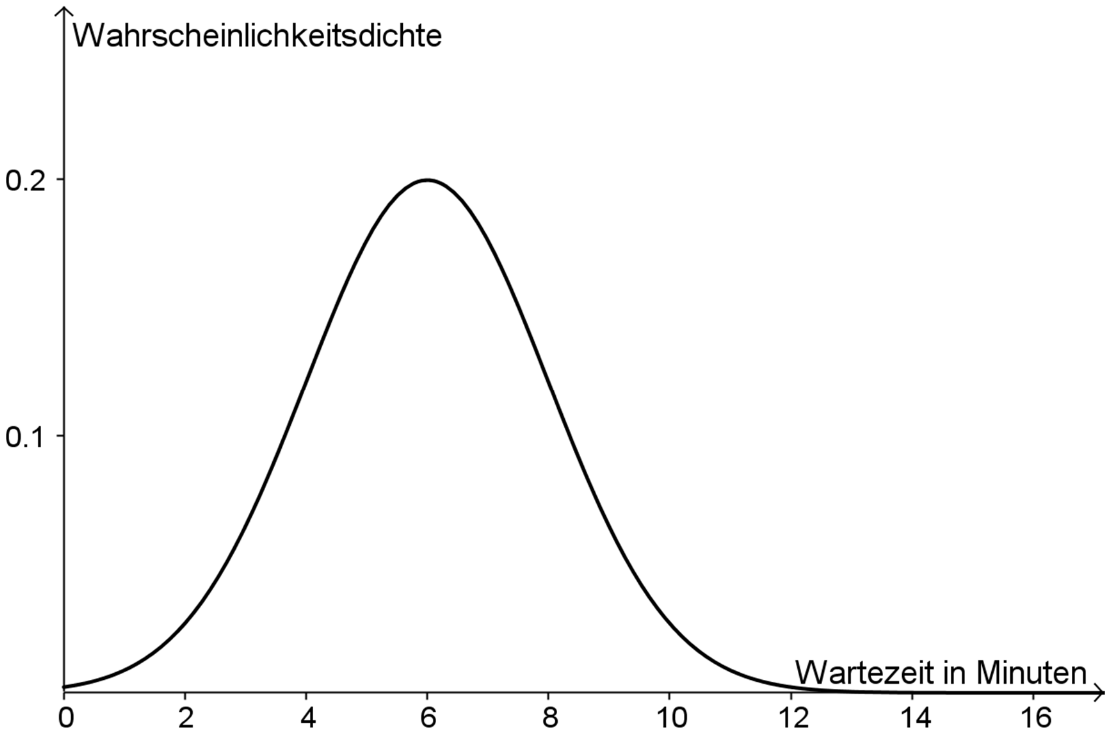


Abbildung 2.2

g) Ermitteln Sie auf Grundlage der Graphik (Abb. 2.2) näherungsweise, wie lange ein Schüler im Mittel wartet und wie groß die Standardabweichung hierbei ist.

Berechnen Sie mittels ihrer Näherungswerte, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, länger als 5 Minuten auf das Essen zu warten.

Der Bistrobetreiber hat daraufhin den Ablauf beim Verkauf des Mittagessens verbessert, es werden jetzt Bestellnummern ausgegeben. Stolz verkündet er nach einiger Zeit: „Die Schüler warten jetzt im Mittel nur noch 5 Minuten und nur noch 5 % warten länger als 10 Minuten".

h) Berechnen Sie, unter der Annahme, dass die Wartezeit weiterhin normalverteilt ist, den Wert der jetzt vorliegenden Standardabweichung.

Vergleichen Sie die beiden Methoden (ohne und mit Bestellnummern) hinsichtlich der Wartezeitproblematik.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Fehmarnbeltquerung**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	4	4	6	6	3	4	3	5	5	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Zurzeit verkehrt eine Fähre zwischen Rødby (Dänemark) und Puttgarden (Deutschland). Die „Feste Fehmarnbeltquerung“ ist ein geplanter Tunnel unter dem Fehmarnbelt, der beide Länder miteinander verbinden soll.
Der Graph der Funktion f (1 Längeneinheit ≙ 1 km) beschreibt in der Draufsicht eine mögliche Trassenführung für diesen Tunnel (siehe Abb. 3.1).

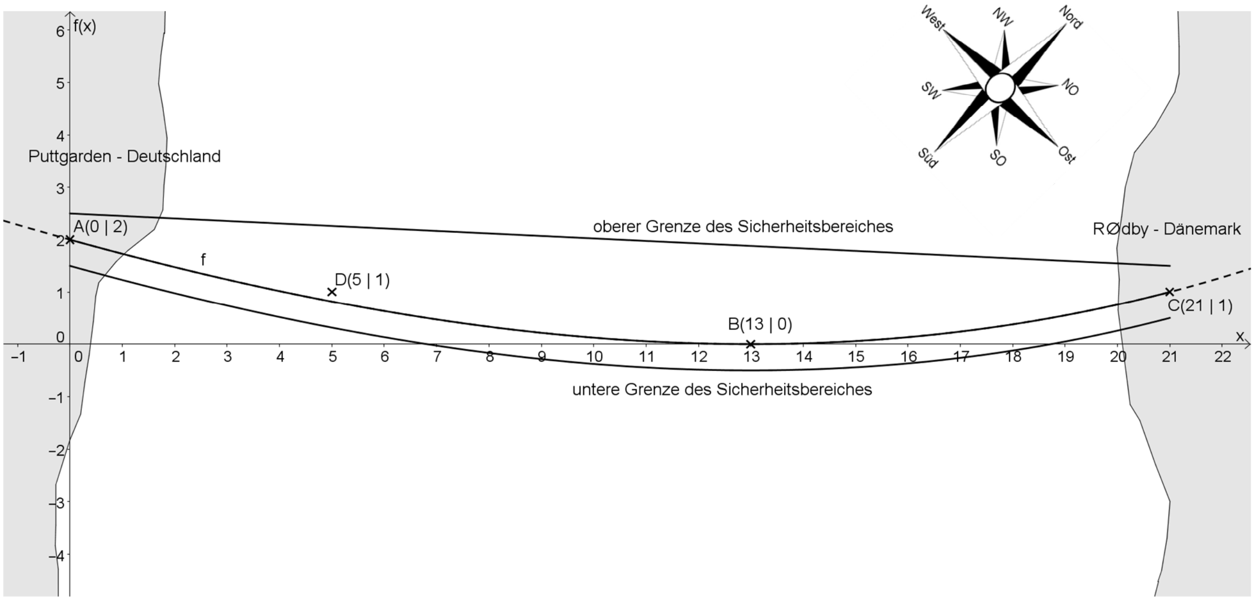


Abbildung 3.1

a) Begründen Sie, warum sich für die Modellierung des Verlaufs der Tunneltrasse f eine ganzrationale Funktion 3. Grades über den dargestellten Bereich anbietet.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{41}{227\,136}x^3 + \frac{811}{113\,568}x^2 - \frac{4\,843}{17\,472}x + 2 \text{ mit } 0 \leq x \leq 21$$

die dargestellte Trassenführung angemessen beschreibt.

Da in dieser Region mit rund 15 % des weltweiten Seeverkehrsvolumens ein hohes Verkehrsaufkommen herrscht, ist ein Sicherheitsbereich um den Tunnel (siehe Abb. 3.1) definiert worden. In diesem Bereich gelten besondere Regeln für den Schiffsverkehr.
Die Grenze des oberen Sicherheitsbereichs ist eine geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten, die sich 0,5 km nordwestlich (bitte beachten Sie die Kompassrose) der Punkte A und C befinden.
Die Grenze des unteren Sicherheitsbereichs ist die in südöstlicher Richtung um 0,5 km verschobene Tunneltrasse f.
Für den Sicherheitsbereich gilt von Südwesten nach Nordosten (Abszissenausrichtung) das Intervall $I = [0; 21]$.

c) Berechnen Sie die Fläche des Sicherheitsbereichs und geben Sie das Ergebnis in einer sinnvollen Maßeinheit an.

Für die Fertigstellung des Tunnels müssen einige Mio. m^3 Erdreich bewegt werden. Dieser Aushub soll dann an der Küste zur Landgewinnung genutzt werden.
Bevor mit dem Ausheben des Tunnelgrabens im Fehmarnbelt begonnen wird, soll bereits Boden an Land verschoben worden sein. Seeseitig wird mit einer 70-wöchigen Bauphase geplant, an deren Ende 98 % des gesamten Aushubs geborgen worden sein soll. Das Planungsbüro gibt an, dass sich erfahrungsgemäß die Menge des bewegten Erdbodens näherungsweise durch die Gleichung der Funktion g mit

$$g(t) = 15 - 14{,}5e^{k \cdot t} \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } k < 0$$

beschreiben lässt, wobei $g(t)$ die Menge des Aushubs in Mio. m^3 in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschreibt.

d) Ermitteln Sie die Menge des Aushubes, der langfristig annähernd bewegt werden muss, sowie die Aushubmenge zum Beginn der Betrachtung.

Ermitteln Sie aufgrund der jetzt vorliegenden Zahlen auf vier Nachkommastellen gerundet den Wert für den Parameter k in der Funktion g.

Verwenden Sie für Ihre weiteren Berechnungen die angenäherte Gleichung der Funktion h:

$$h(t) = 15 - 14{,}5\, e^{-\frac{3}{50}t} \text{ mit } t \geq 0.$$

e) Berechnen Sie die Dauer, bis 10 Mio. m^3 Aushub bewegt worden sind.

f) Ermitteln Sie die durchschnittliche wöchentliche Änderung der Aushubmenge von der 10. bis zur 30. Woche in der Bauphase.

Der Fortschritt der Baggerarbeiten wird vom Planungsbüro als besondes langsam angesehen, wenn die momentanen Änderungsraten der Aushubmengen weniger als 0,5 Mio. m^3 pro Woche betragen.

g) Ermitteln Sie die Dauer nach Baubeginn, bis zu dem diese Vorgabe noch eingehalten wird.

Um die Stärke des zu erwartenden Verkehrsaufkommens beschreiben zu können, wurde mithilfe vorliegender Zahlen und Schätzungen auf Grundlage des Verkehrs über den Großen Belt und des Verkehrs über den Öresund zwischen Dänemark und Schweden durch das Planungsbüro die Gleichung der Funktion $\mathrm{i_m}$ ermittelt.
Es gilt:

$$\mathrm{i_m(t) = 1{,}4 - m \cdot e^{-3t} + 2e^{-0{,}9t}} \quad \text{mit } \mathrm{m \neq 0} \text{ und } 0 \leq \mathrm{t} \leq 3{,}5.$$

Die Gleichung der Funktion $\mathrm{i_m}$ gibt den zu erwartenden Fahrzeugstrom an einem Montag in Richtung Fehmarn in 1 000 Fahrzeugen pro Stunde und in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden an. Betrachtet wird die prognostizierte Stoßzeit am Morgen zwischen 06:30 Uhr und 10:00 Uhr.

h) Berechnen Sie den Wert des Parameters m, so dass der zu erwartende Fahrzeugstrom um 07:00 Uhr maximal wird.

Geben Sie die Größe des Fahrzeugstroms zu diesem Zeitpunkt an.

Ein Ingenieur des Planungsbüros behauptet, dass die höchste Abnahme des Fahrzeugstroms außerhalb des betrachteten Zeitraumes stattfindet.

i) Beurteilen Sie für $\mathrm{m = 2}$ die Richtigkeit dieser Behauptung. Nutzen Sie hierbei die vom Planungsbüro modellierte Gleichung der Funktion $\mathrm{i_m}$.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Dengue-Fieber**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	5	7	5	4	4	6	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Anfang 2015 schrieb eine Moderatorin auf Facebook: „Dengue-Fieber ist echt […]!" Die Moderatorin hatte sich bei einem Neujahrsurlaub auf den Malediven diese Tropenkrankheit zugezogen. Die Virus-Erkrankung wird durch bestimmte Mückenarten übertragen, die sich in den letzten Jahren auch in Europa bzw. in Deutschland ausgebreitet haben.
Bei einer Recherche im Rahmen eines BG-Projekts im Fach „Gesundheit und Pflege" findet eine Projektgruppe Zahlen für die Anzahl der Dengue-Fieber-Fälle. Dabei bezeichnet $t = 0$ das Jahr 2002.

Vergangene Zeit in Jahren	0	1	2
Anzahl der Fälle pro Jahr[1]	210	120	

Tabelle 3.1

Leider ist die Anzahl der Fälle für das Jahr 2004 nicht lesbar. Bei einer ersten Beurteilung vermutet die Projektgruppe hier einen linearen Zusammenhang.

a) Erstellen Sie für diese Vermutung eine geeignete Funktionsgleichung und ergänzen Sie auf dieser Grundlage die fehlende Zahl für das Jahr 2004.

Bei weiteren Nachforschungen finden die Schülerinnen und Schüler die richtige Zahl für das Jahr 2004 sowie weitere zusätzliche Daten, die sie dazu veranlassen, den linearen Ansatz aus Teilaufgabe a) zu verwerfen. Dabei bezeichnet $t = 0$ das Jahr 2002.

Vergangene Zeit in Jahren	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Fälle pro Jahr	210	120	110	130	180	270

Tabelle 3.2

b) Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion, die die Entwicklung der übermittelten Dengue-Fieber-Fälle für die Jahre 2002 bis 2007 geeignet wiedergibt.

Begründen Sie die Wahl Ihres Funktionstyps.

---

[1] Übermittelte Dengue-Fieber-Fälle 2002 – 2011, Deutschland, Fälle entsprechend der Referenzdefinition des RKI; Datenstand: 4.4.2012. www3.rki.de/SurvStat/, Quelle: Deutsches Ärzteblatt, Jg. 109, Heft 41, 12. Oktober 2012, S. 685

Die Moderatorin wird mit Fieber in ein Krankenhaus eingeliefert und behandelt.
Der typische Verlauf der Körpertemperatur bei Dengue-Fieber kann für die ersten zwölf Tage durch die Funktion c mit der folgenden Gleichung modelliert werden:

$$c(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-0{,}21 \cdot t} + 2 \cdot e^{2{,}93} \text{ mit } 0 \leq t \leq 12.$$

Die Funktion c gibt die Körpertemperatur in Grad Celsius und t die vergangene Zeit in Tagen an. Man kann bei einer Körpertemperatur von über 40,5°C von kritischem Fieber sprechen, das einer strengen Beobachtung bedarf.

c) Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die Moderatorin vermutlich unter kritischem Fieber leidet.

Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Temperatur ansteigt.

Bestimmen Sie weiterhin den maximalen Wert, den die Temperatur erreicht.

d) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen der Funktion c und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang.

Häufig werden bei Fieber schmerz- und fiebersenkende Medikamente verordnet. Nimmt man ein derartiges Medikament ein, so wird der Wirkstoff zunächst vom Körper aufgenommen und die Wirkstoffkonzentration in den Körperflüssigkeiten steigt. Im Laufe der Zeit wird der Wirkstoff vom Körper abgebaut und die Wirkstoffkonzentration nimmt ab.
Der Zusammenhang zwischen der Wirkstoffkonzentration $w_{p;q}$ in den Körperflüssigkeiten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{mg}{l}\right]$ und t, der vergangenen Zeit seit der Einnahme in Stunden, wird durch die Funktionsschar $w_{p;q}$ mit der Gleichung:

$$w_{p;q}(t) = p \cdot t \cdot e^{-q \cdot t} \text{ mit } p > 0, q > 0 \text{ und } 0 \leq t \leq 12$$

beschrieben.

Gegeben ist der formale Ausdruck $M = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a w_{p;q}(t)dt$.

e) Interpretieren Sie den formalen Ausdruck M im Sachzusammenhang.

Ein Medikament, dessen Wirkstoffkonzentration sich im Laufe der Zeit gemäß der Funktionsgleichung $w_{p;q}$ verändert, erreicht bereits eine Stunde nach Einnahme seine maximale Wirkstoffkonzentration von $w_{max} = 12 \frac{mg}{l}$.

f) Bestimmen Sie die Parameter p und q der Funktionsgleichung von $w_{p;q}$ so, dass die dargestellte Beobachtung erfüllt wird.

Ab dem Wendepunkt wird die Modellierung der Wirkstoffkonzentration durch die Funktion $w_{p;q}$ ungenau. Eine bessere Näherung ist die Annahme, dass der Wirkstoff ab diesem Zeitpunkt vom Körper linear abgebaut wird. Die Wirkstoffkonzentration wird daher besser durch eine abschnittsweise definierte Funktion $w_{p;q_{\text{neu}}}$ mit der folgenden Gleichung beschrieben:

$$w_{p;q_{\text{neu}}}(t) = \begin{cases} p \cdot t \cdot e^{-q \cdot t} & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \square, \\ \boxed{} & \text{für} \quad \square < t \leq \square. \end{cases}$$

Auch hierbei gibt $w_{p;q_{\text{neu}}}$ die Wirkstoffkonzentration in den Körperflüssigkeiten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right]$ und t die vergangene Zeit seit der Einnahme in Stunden an.
Der erste Abschnitt der Funktion muss knickfrei in den zweiten linearen Abschnitt übergehen.

g) Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen der Funktion $w_{p;q}$.

Ergänzen Sie alle fehlenden Angaben der Funktionsgleichung $w_{p;q_{\text{neu}}}$.

Berechnen Sie hierzu auch den Zeitpunkt, an dem der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.

Dieses Medikament wird in sogenannten Weichkapseln angeboten. Die maximale Befüllungskapazität soll ein Volumen von $V = 0{,}25\ \text{cm}^3$ haben. Ein Mitglied der Projektgruppe hat nach Angaben des Kapselherstellers die folgende Zeichnung (Abb. 3.1) des Profilschnittes der Kapsel in der x-y-Ebene angefertigt. Die äußere Hülle der Kapselform entsteht durch Rotation der Funktion f um die x-Achse. Der Graph der Funktion f im I. und II. Quadranten beschreibt das Profil der Kapsel und ist gegeben mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -10x^6 + 0{,}3.$$

Die Variable x gibt die Ausdehnung in cm der Kapsel vom Kapselmittelpunkt in Richtung der Abszissenachse und f(x) die Ausdehnung in cm der Kapsel in Richtung der Ordinatenachse an.

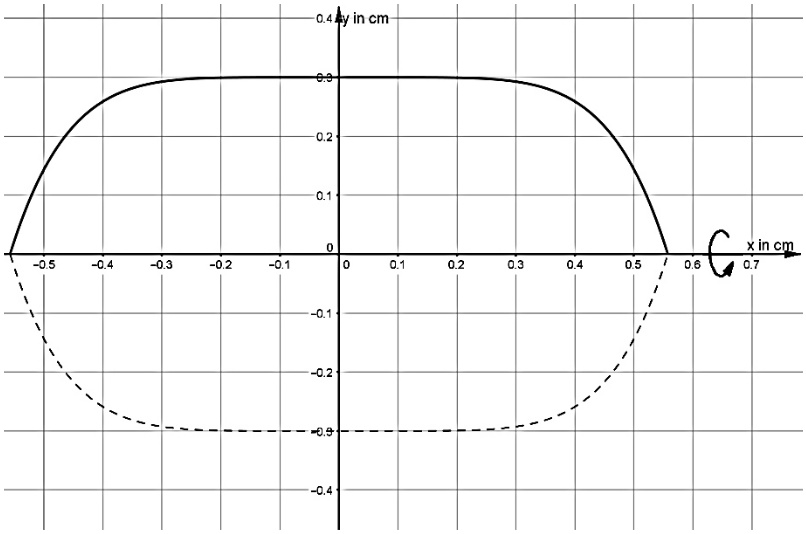


Abbildung 3.1

h) Prüfen Sie, ob die Weichkapseln das vorgegebene Volumen überschreiten.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Wattenmeer**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	6	8	4	6	3	4	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Der erste deutsche Offshore Windpark Alpha Ventus speist seit seiner Inbetriebnahme im Jahr 2010 kontinuierlich klimafreundliche Energie ins deutsche Versorgungsnetz ein.
Die Wasserströmungen können im Seegebiet von Alpha Ventus (siehe Abb. 3.1)[1] während der Gezeiten untersucht werden. Mit einer fest installierten Messvorrichtung auf der abgebildeten Umspannplattform wird dazu lokal die Wasserströmungsgeschwindigkeit über Grund in Richtung Küste gemessen.
Als Ergebnis werden die nachfolgenden Messwerte ermittelt. Die Messungen begannen um 00:00 Uhr Ortszeit und sind leider nur zu unregelmäßigen Zeiten notiert worden.

Abbildung 3.1

Uhrzeit	Wasserströmungsgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
00:00	0
01:15	0,35
02:45	0,61
04:15	0,4
06:30	−0,2
07:00	−0,4
08:45	−0,55
11:20	−0,25
14:00	0,5
19:00	−0,2

Tabelle 3.1

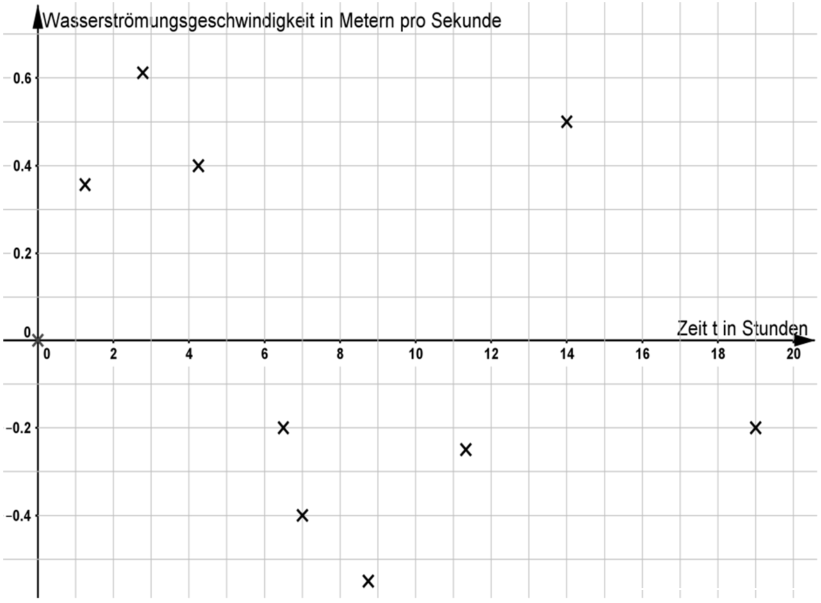


Abbildung 3.2

a) Beschreiben Sie den Verlauf der Wasserströmungsgeschwindigkeit in Abb. 3.2 im Sachzusammenhang anhand zweier Aspekte.

b) Bestimmen Sie die Gleichung einer geeigneten Funktion für den Verlauf der Wasserströmungsgeschwindigkeiten.
Begründen Sie Ihre Wahl.

---

[1] http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AAlpha_Ventus_Windmills.JPG (Zugriff 10. Juli 2014)

Von zwei Ingenieurbüros erhalten Sie die folgenden Vorschläge I und II zur Modellierung des gleichen Zusammenhangs für den Zeitraum von 12 Stunden, beginnend ebenfalls um 00:00 Uhr Ortszeit. Dabei geben v_I und v_{II} die Wasserströmungsgeschwindigkeiten in $\frac{m}{s}$ und t die Zeit in Stunden an:

$$\text{I:}\quad v_I(t) = \frac{3}{5} \cdot \sin\left(\frac{13}{25}t\right) \text{ mit } 0 \leq t \leq 12 \text{ und}$$

$$\text{II:}\, v_{II}(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{18}{125}t^2 + \frac{29}{50}t \text{ mit } 0 \leq t < 12.$$

Die Fundamente des Windparks entwickeln sich zu künstlichen Riffs. Aus diesem Grund sollen die größten Wasserströmungsgeschwindigkeiten betrachtet werden.

c) Ermitteln Sie die größten Wasserströmungsgeschwindigkeiten in Richtung Küste, die mithilfe der Funktionen v_I und v_{II} beschrieben werden und
vergleichen Sie diese Werte miteinander.

Geben Sie auch die dazugehörigen Uhrzeiten an.

In einem weiteren Schritt sollen nun die Auswirkungen des Windes auf schwimmende Körper (z. B. Treibgut) in diesem Seegebiet untersucht werden.
Dazu wird um 00:00 Uhr eine Treibboje von der Plattform im Meer ausgesetzt. Die Treibboje ist mit einem GPS-Gerät[2] ausgestattet, das die Messung der Geschwindigkeit über Grund erlaubt. Der Verlauf der Bojengeschwindigkeit v_B in Richtung Küste ist für 12 Stunden in der folgenden Graphik (Abb. 3.3) dargestellt und kann mit der Funktionsgleichung:

$$v_B(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{41}{250}t^2 + \frac{39}{50}t \text{ mit } 0 \leq t \leq 12$$

angegeben werden, wobei t die Zeit in Stunden und v_B die Geschwindigkeit der Boje in $\frac{m}{s}$ angeben.

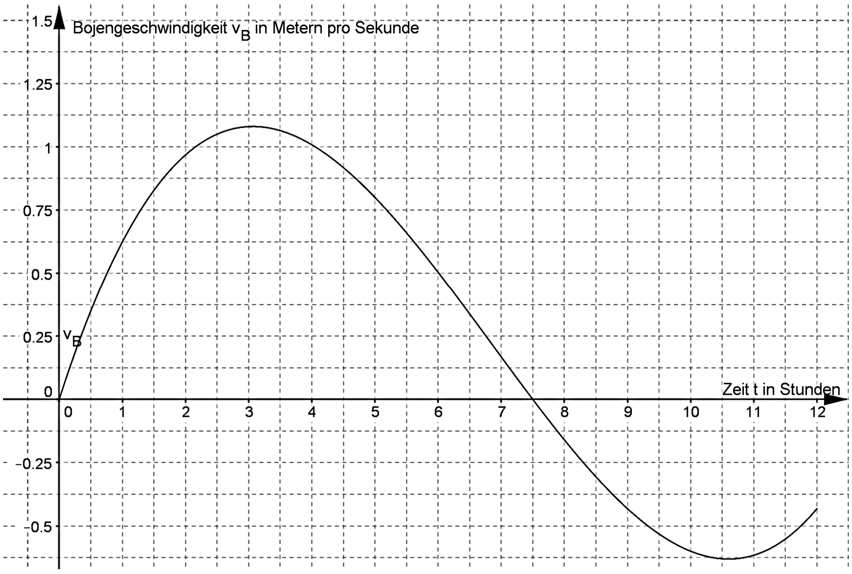


Abbildung 3.3

Gegeben ist der formale Ausdruck $s = 3600\left(\int_0^{7,5} v_B(t)\,dt + \left|\int_{7,5}^{12} v_B(t)\,dt\right|\right)$.

d) Interpretieren Sie den formalen Ausdruck s im Sachzusammenhang.

---

[2] GPS: Global Positioning System; Satelliten gestützte Positionsbestimmung

Ergänzt man die Abbildung 3.3 um den Graphen der Funktion v_{II}, so ergibt sich die folgende Abbildung 3.4.

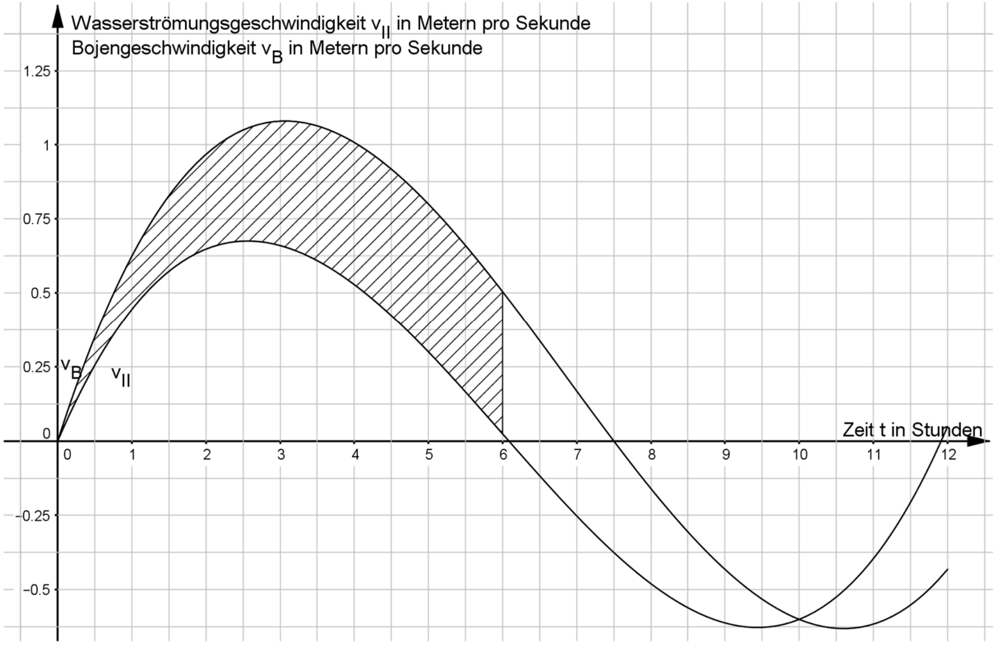


Abbildung 3.4

e) Bestimmen Sie die Größe der Fläche zwischen den Graphen v_B und v_{II} im Intervall $0 \leq t \leq 6$.

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Fläche im Sachzusammenhang.

Die zum Untersuchungszeitpunkt herrschende Windgeschwindigkeit wird vom Wetterdienst für den Verlauf von 12 Stunden nach 00:00 Uhr durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung:

$$w(t) = -0{,}4t^2 + 4t \text{ mit } 0 \leq t \leq 12$$

angegeben, dabei gibt w die Geschwindigkeit des Windes in $\frac{m}{s}$ und t die Zeit in Stunden an. Der Wind weht in diesem Zusammenhang in Richtung Küste und die Boje wird durch den Wind in diese Richtung vorwärts bewegt. Die Funktion w_a beschreibt den Geschwindigkeitsanteil der Boje in Richtung Küste, die sich allein durch den Wind ergibt. Die Gleichung der zugehörigen Funktion lautet:

$$w_a(t) = a \cdot (-0{,}4t^2 + 4t) \text{ mit } a \neq 0.$$

f) Begründen Sie, dass für den Parameter a die Einschränkung $0 < a \leq 1$ gelten muss.

g) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $w_{0,05}$ zusätzlich in das Koordinatensystem (Abb. 3.4) ein.

h) Erläutern Sie den Zusammenhang des Funktionsgraphen $w_{0,05}$ mit den beiden Graphen v_B und v_{II}.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Parameter a hier genau den Wert $a = 0{,}05$ haben muss.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe: Gläserproduktion**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	3	6	3	3	4	5	4	6	6	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Das Unternehmen PHANGLASTISCH produziert Gläser.

Unter anderem wird ein einfaches Sektglas für den Partybedarf produziert. Die Controllingabteilung hat hierbei ermittelt, dass die Kosten K in Euro in Abhängigkeit von der produzierten Menge x in 1 000 Stück durch den nebenstehenden Graphen K der Kostenfunktion (Abb. 3.1) mit der folgenden Funktionsgleichung beschrieben werden können:

$K(x) = 0{,}5x^3 - 20x^2 + 310x + 6\,000$
mit $0 \leq x \leq 36$.

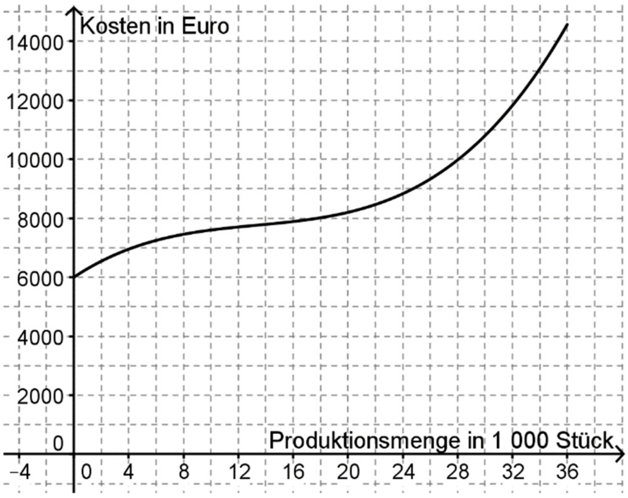


Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie den Kurvenverlauf in Abb. 3.1 im Sachzusammenhang anhand von drei Aspekten.

Die Produktionsmenge mit den geringsten Stückkosten legt auch die langfristige Preisuntergrenze fest. Diese Menge liegt bei $x_l \approx 27{,}78$. Kurzfristig darf der Preis sogar auf das Minimum der variablen Stückkosten sinken. Für die variablen Stückkosten k_v in Euro pro 1 000 Stück gilt die Funktionsgleichung:

$$k_v(x) = 0{,}5x^2 - 20x + 310 \text{ mit } 0 \leq x \leq 36.$$

b) Ermitteln Sie die kurz- und die langfristige Preisuntergrenze in Euro pro Stück.

Aktuell liegt der Marktpreis bei 0,80 Euro pro Stück, dies entspricht dann auch dem Grenzerlös E'.
Ein Volkswirt behauptet, dass man aus der Gleichung: Gewinn (G) = Erlös (E) – Kosten(K) folgern kann, dass die gewinnmaximale Menge x^* erreicht wird, wenn $E'(x^*) = K'(x^*)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass der Volkswirt Recht hat.

d) Ermitteln und interpretieren Sie den Ausdruck $K'(10)$.

e) Erläutern Sie, warum im vorliegenden Fall mit der Gleichung $0{,}8 = K'(x^*)$ nicht die gewinnmaximale Menge ermittelt werden kann.

Verändern Sie die Gleichung so, dass dieses möglich ist und ermitteln Sie die gewinnmaximale Menge.

Die Controllingabteilung gibt zu bedenken, dass Veränderungen im Beschaffungsbereich die Kostenfunktion in Kürze verändern würden, grundsätzlich der s-förmige, durchgehend steigende Kostenverlauf jedoch erhalten bleibt.

Betrachten Sie die Parameterfunktion K_a mit der Funktionsgleichung:

$$K_a(x) = 0{,}5x^3 - a \cdot x^2 + 310x + 6000 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 36 \text{ und } a > 0.$$

f) Entscheiden Sie begründet, für welche Werte des Parameters a die Aussage der Controllingabteilung hinsichtlich beider Aspekte (s-förmig, durchgehend steigend) zutrifft.

Die Unternehmensleitung von PHANGLASTISCH hat entschieden ein neues Sektglas mit einem 12 cm langen Stiel (inklusive der Glasdicke am Übergang) auf den Markt zu bringen. Sie erteilt einen Auftrag über die Lieferung und Programmierung einer Steuerung für einen Fertigungsautomaten. Für die Entwicklung des Programms sind Daten der zu fertigenden Gläser einzupflegen.
Der zu befüllende Teil des abgebildeten Sektglases soll durch die Rotation des Graphen der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 3{,}5 - 3{,}5e^{-0{,}35x} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 9$$

um die Abszissenachse mit f und x in cm beschrieben werden.

Abb. 3.2

g) Ermitteln Sie, in welcher Höhe die Markierung für den Eichstrich von der Maschine gesetzt werden soll, wenn das dafür vorgesehene Volumen 0,15 Liter, also 150 cm^3 betragen soll.

Die Produktentwicklungsabteilung schlägt vor, ein neues Glas mit einer innovativen, jedoch leider teuren Technologie zu versehen, so dass es sich je nach Temperatur unterschiedlich verfärbt. Die Unternehmensleitung ist sich nicht sicher, ob hierfür ein hinreichend großer Absatzmarkt besteht, auf dem auch höhere Preise erzielt werden können. Sie beauftragt ein Marktforschungsunternehmen, das nach einiger Zeit den Zusammenhang zwischen dem Preis eines Glases und der zu erwartenden Absatzmenge durch die in Abb. 3.3 eingetragenen Punkte beschreibt.

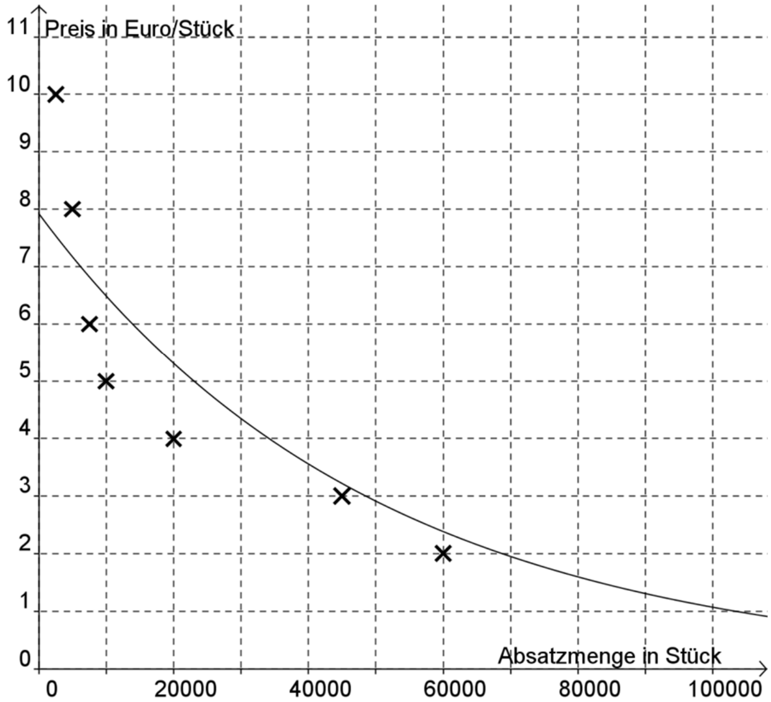


Abbildung 3.3

Zudem schlägt das Marktforschungsunternehmen vor, den Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro pro Stück und Absatz x in Stück näherungsweise durch die Funktion p mit der folgenden Gleichung zu beschreiben:

$$p(x) = 7{,}92 \cdot e^{-0{,}00002x} \text{ mit } 0 \le x \le 100\,000.$$

h) Beurteilen Sie anhand der Graphik (Abb. 3.3), inwieweit die Funktionsgleichung geeignet erscheint, den Zusammenhang zu beschreiben.

Geben Sie eine weitere mögliche Funktionsgleichung an und begründen Sie, ob Sie diese für gut oder sogar besser geeignet halten.

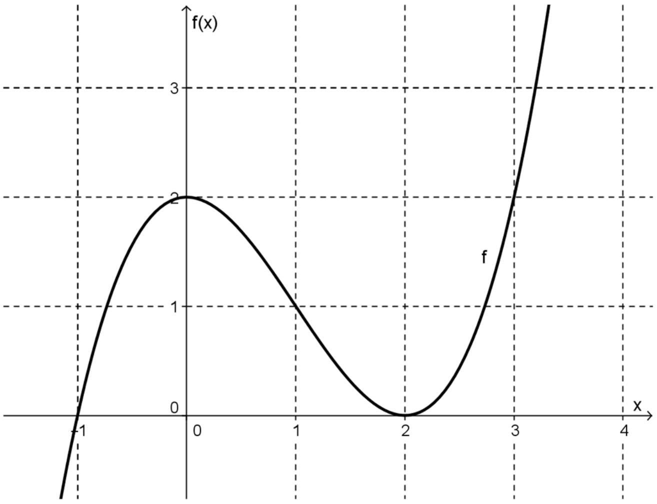
Auf der Basis der Preis-Absatzfunktion p hat die Controllingabteilung die Funktionsgleichung für den Grenzerlös der farbigen Gläser E_{farb}' in Euro je Stück in Abhängigkeit von der Absatzmenge x in Stück ermittelt:

$$E_{\text{farb}}'(x) = (7{,}92 - 0{,}0001584x) \cdot e^{-0{,}00002x} \quad \text{mit } 0 \le x \le 100\,000.$$

i) Ermitteln Sie die erlösmaximale Absatzmenge, den erlösmaximalen Preis sowie den zugehörigen Gesamterlös.

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f_{ab},
bestimmt die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von f_{ab} sprung- und knickfrei verläuft und
zeigt, dass der Wert $k = 1$ die Gleichung erfüllt.</td><td>$f_{ab}'(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{für } x \le 3 \\ a & \text{für } x > 3 \end{cases}$
$f_{ab}(3) = \frac{3}{2}$
Da $f'_{ab}(3) = 4$ gilt, muss auch $a = 4$ gelten.
$\frac{3}{2} = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{21}{2}$
$\begin{aligned} -1 = \int_k^2 f_{ab}(x)dx &= \int_k^2 (1{,}5x^2 - 5x + 3)dx \\ &= [0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 3x + c]_k^2 \\ &= -0{,}5k^3 + 2{,}5k^2 - 3k \\ &= -0{,}5 \cdot 1^3 + 2{,}5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \\ &= -1 \end{aligned}$
Die Gleichung $-1 = \int_k^2 f_{ab}(x)dx$ ist für $k = 1$ erfüllt.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Die Funktion F mit der Gleichung:
$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x + e$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Wenn $a = b = 1$, $c = 0$ und $d \ge 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f immer null.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit: $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1c	skizziert den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem und ermittelt die Gleichung der Funktion f.	 $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Aus den Bedingungen folgt das LGS: $-1a + 1b - 1c = -2 \quad \vert \cdot 8 \quad \vert \cdot 12$ $8a + 4b + 2c = -2$ $12a + 4b + 1c = 0$ $-1a + 1b - 1c = -2$ $12b - 6c = -18 \quad \vert \cdot 16$ $16b - 11c = -24 \quad \vert \cdot (-12)$ $-1a + 1b - 1c = -2$ $12b - 6c = -18$ $36c = 0$ Mit den Lösungen: $a = 0{,}5$, $b = -1{,}5$, $c = 0$ Die Gleichung der Funktion f lautet: $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2$.	5
1d	ermittelt die Gleichung der Funktion f und berechnet die Koordinaten des Punktes P.	Durch die Punkte Q(2|7) und P(8|6) lässt sich die Gleichung der Funktion f bestimmen: $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{22}{3}$. Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{22}{3}x$ $A'(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3}, A''(x) = -\frac{1}{3}$ Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3} \Leftrightarrow x_e = 22$ Hinreichende Bedingung: $A'(x_e) = 0 \wedge A''(x_e) \neq 0$ $A''(22) = -\frac{1}{3} \Rightarrow A''(x_e) < 0$ Somit ist x_e Stelle eines Hochpunktes. Da $x_e \notin D(A)$ ist, nimmt der Flächeninhalt A sein Maximum am rechten Rand des Definitionsbereiches an. Der Punkt P, bei dem der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird, hat folglich die Koordinaten P(8|6), da $f(8) = 6$ gilt.	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
1e	berechnet den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 für $k = 2$,	Zur Berechnung des Schnittpunktes werden die Geradengleichungen gleichgesetzt: $g_1 = g_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = r_2 \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ Durch Aufstellen zweier Gleichungen und das Eliminieren einer der Variablen, ergibt sich der Parameter $r_2 = \frac{1}{2}$. $\text{I} \quad 2 + r_1 = 4r_2$ $\text{II} \quad 1 + 2r_1 = 2r_2$ $(-2) \cdot \text{I} + \text{II}: \quad -2 \cdot (2 + r_1) + 1 + 2r_1 = -8r_2 + 2r_2$ $-3 = -6r_2$ $r_2 = \frac{1}{2}$ Durch Einsetzen des Parameters $r_2 = \frac{1}{2}$ in die Geradengleichung für die Gerade g_2 ergibt sich der Schnittpunkt P_s der beiden Geraden: $\overrightarrow{OP_s} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ Der Schnittpunkt P_S hat die Koordinaten $P_S(2\vert 2\vert 1)$.	5
	bestimmt den Parameter k so, dass die beiden Geraden parallel, aber nicht identisch sind und	Parallele Geraden haben linear abhängige Richtungsvektoren, es gilt deshalb: $u \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\k\end{pmatrix}$ Aus der x-Komponente ergibt sich $u = 4$. Aus der z-Komponente ergibt sich $u \cdot 2 = k$ und mit $u = 4$ dann $k = 8$. Wenn die Geraden g_1 und g_2 identisch wären, müsste außerdem ein beliebiger Punkt der Geraden g_1 auf der Geraden g_2 liegen. Punktprobe: $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = r_2 \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}$ Es findet sich kein Wert für r_2, der diese Bedingung erfüllt. Somit liegt auch kein Punkt der Geraden g_1 auf der Geraden g_2. Die beiden Geraden g_1 und g_2 sind parallel, wenn $k = 8$ gilt.	
	bestimmt den Parameter k so, dass die Gerade g_3 und die Ebene E sich schneiden.	$g_2: \vec{x} = r_2 \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\k\end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ Die Ebene und die Gerade schneiden sich nicht, wenn der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene einen rechten Winkel bilden. Ein möglicher Normalenvektor der Ebene E ist z. B.: $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Mit dem Skalarprodukt wird ein Wert für k bestimmt, so dass die beiden Vektoren rechtwinklig zueinander stehen. $0 = 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot k$ $0 = k$ Für alle $k \neq 0$ schneidet somit die Gerade g_2 die Ebene E.	

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1f</td><td>entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>Die Ebene E_3 mit der Gleichung: $2x - 2y + 3z = -2$ und die Ebene E_2 sind identisch.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Punkt $B(4|0|-2)$ liegt in der Ebene E_2, aber nicht in der Ebene E_1.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Ebene E_2 schneidet die y-Achse in dem Punkt $S_y(0|1{,}5|0)$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Die Gleichung $-1{,}5x - 2y + 3z = -2$ beschreibt auch die Ebene E_1.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Ein Normalenvektor der Ebene E_1 ist der Vektor
$\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-8\\12\end{pmatrix}$.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>prüft rechnerisch, ob es sich um ein gleichschenkliges oder ein gleichseitiges Dreieck handelt.</td><td>Es wird der Betrag des Vektors $\overrightarrow{DE}$ berechnet:
$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$
$\left|\overrightarrow{DE}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$
Es wird der Betrag des Vektors $\overrightarrow{DF}$ berechnet:
$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$
$\left|\overrightarrow{DF}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+6^2+2^2} = \sqrt{49} = 7$
Es wird der Betrag des Vektors $\overrightarrow{EF}$ berechnet:
$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$
$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{26}$
$\left|\overrightarrow{DE}\right| = \left|\overrightarrow{DF}\right| \neq \left|\overrightarrow{EF}\right|$
Da die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{DF}$ identisch sind, aber der Betrag des Vektors $\overrightarrow{EF}$ von diesen abweicht, handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>gibt jeweils eine Gleichung der Ebene E_1 in Koordinaten- und Parameterform an und</td><td>Die Koordinatenform wird durch Auflösen des Skalarproduktes berechnet:
$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = (x-2)\cdot 4 + (y-4)\cdot 2 + (z-1)\cdot 4$
$4x - 8 + 2y - 8 + 4z - 4 = 0$
$4x + 2y + 4z = 20$
<i>Fortsetzung nächste Seite</i></td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h		Die Parameterform wird durch Umwandeln der Variablen x und y in die Parameter s und t bestimmt: $x = s$ $y = t$ $\underline{4s + 2t + 4z = 20}$ Es ergibt sich durch Umstellen: $x = s$ $y = t$ $\underline{z = -s - 0{,}5t + 5}$ Und damit die Parameterform der Ebene: $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$	
	ermittelt den Wert des Parameters a, so dass die Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 linear abhängig sind.	Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig, wenn $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2a \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt. Dies ist für $s = -2$ und folglich für $a = \frac{1}{2}$ der Fall.	
			40

Aufgabe 2: **AirRace**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	begründet, dass sich die entsprechende Flugroute mit der gegebenen Gleichung beschreiben lässt.	Die Flugroute lässt sich als eine Gerade beschreiben, die mittig durch die beiden Airgates A und B führt. Daher ergibt sich für die Geradengleichung g in der Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{a}$: Für $\vec{x}_0$: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}600\\100\\z\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}615\\105\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}600\\100\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}607{,}5\\102{,}5\\z\end{pmatrix}$ Die z-Koordinate des Ortsvektors beschreibt die Flughöhe, die sich zwischen AirGate A und AirGate B nicht verändert und beträgt im Allgemeinen 15 m beträgt. Es ergibt sich somit für den Stützvektor der Geraden: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}607{,}5\\102{,}5\\15\end{pmatrix}$ und für den Richtungsvektor $\vec{a}$ durch die jeweilige Mitte der Airgates: $\vec{a} = \begin{pmatrix}457{,}5\\552{,}5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}607{,}5\\102{,}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-150\\450\\0\end{pmatrix}$. Die Geradengleichung lautet damit: $g\colon \vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}607{,}5\\102{,}5\\15\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-150\\450\\0\end{pmatrix}$ und beschreibt somit die Flugroute.	4
2b	ermittelt die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde, mit der der Pilot mindestens fliegen muss, um die erste Aufgabe zu erfüllen.	$\vec{a} = \begin{pmatrix}450\\550\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}600\\100\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-150\\450\\0\end{pmatrix}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-150\\450\\0\end{pmatrix}\right\rvert \approx 474{,}34\ [\mathrm{m}]$ Die Entfernung (Betrag des Vektors $\lvert\vec{a}\rvert$) zwischen den Toren beträgt somit ca. 474,34 m. $\frac{474{,}34\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{s}} \approx 94{,}87\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $94{,}87\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}6 \frac{\mathrm{s \cdot km}}{\mathrm{m \cdot h}} \approx 341{,}53 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ Die Geschwindigkeit des Flugzeuges muss somit mindestens ca. $94{,}87\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ betragen, dies entspricht wiederum ca. $341{,}53\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.	3
2c	weist rechnerisch nach, dass der Pilot das Airgate C in einer Höhe von höchstens 20 m und mindestens 10 m passiert.	Die Gerade g_1 beschreibt die Flugbahn des Flugzeuges ausgehend von dem Punkt P: $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}800\\700\\300\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-80\\-80\\-57\end{pmatrix}$ Die Spannvektoren der Ebene E_1 ergeben sich mit Hilfe der Punkte $C_1(395\mid 305\mid 0)$ und $C_2(405\mid 295\mid 0)$ des Airgates C: $\begin{pmatrix}395\\305\\20\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}395\\305\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2c		$\begin{pmatrix}405\\295\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}395\\305\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}$ Mit dem Fußpunkt des 1. Pylonen ergibt sich z. B. die folgende Ebenengleichung: $E_1\colon\vec{x}=\begin{pmatrix}395\\305\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}$ Die Ebene E_1 beschreibt die Durchflugsebene durch das Airgate C. Durch Gleichsetzen der Geradengleichung für die Gerade g_1 und der Ebenengleichung für die Ebene E_1 und dem anschließendem Lösen: $\begin{pmatrix}800\\700\\300\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-80\\-80\\-57\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}395\\305\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}$ ergeben sich die folgenden Parameter: $r=5$, $s=0{,}75$ und $t=0{,}5$. $g_1\colon\overrightarrow{x_S}=\begin{pmatrix}800\\700\\300\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}-80\\-80\\-57\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\300\\15\end{pmatrix}$ $E_1\colon\overrightarrow{x_S}=\begin{pmatrix}395\\305\\0\end{pmatrix}+0{,}75\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\300\\15\end{pmatrix}$ Durch Einsetzen der Parameter in die Geraden- und/oder Ebenengleichung ergibt sich der Durchstoßpunkt $S(400\vert 300\vert 15)$. Die Höhe von 15 m stimmt mit den Vorgaben überein. Der Punkt S liegt zwischen den Pylonen, da die Parameter $s=0{,}75$ und $t=0{,}5$ zwischen 0 und 1 liegen. Bei der hier gewählten Definition der Spannvektoren muss der Durchstoßpunkt S in einem solchen Fall zwischen den Pylonen liegen.	
2d	prüft, ob der Pilot die Maschine noch rechtzeitig abfangen kann.	Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Berechnung des Schnittwinkels: $\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{0\cdot(-80)+0\cdot(-80)+1\cdot(-57)}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-80\\-80\\-57\end{pmatrix}\right\rvert}\right)\approx 26{,}74^\circ$ $26{,}74^\circ<30^\circ$ Damit ist die Bedingung erfüllt und der Pilot kann die Maschine noch rechtzeitig abfangen.	3
2e	begründet, dass die Ebenengleichung E die Zuschauertribüne beschreibt.	Die Spannvektoren der Ebene E lassen sich anhand der Punkte der Tribüne berechnen: $\overrightarrow{OT_1}-\overrightarrow{OT_2}=\begin{pmatrix}20\\180\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\280\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-100\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OT_3}-\overrightarrow{OT_2}=\begin{pmatrix}-40\\275\\40\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\280\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-50\\-5\\40\end{pmatrix}$ Mit dem Punkt T_2 als Stützvektor ergibt sich die folgende Ebenengleichung: $E\colon\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\280\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}10\\-100\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-50\\-5\\40\end{pmatrix}$.	4

Fortsetzung nächste Seite

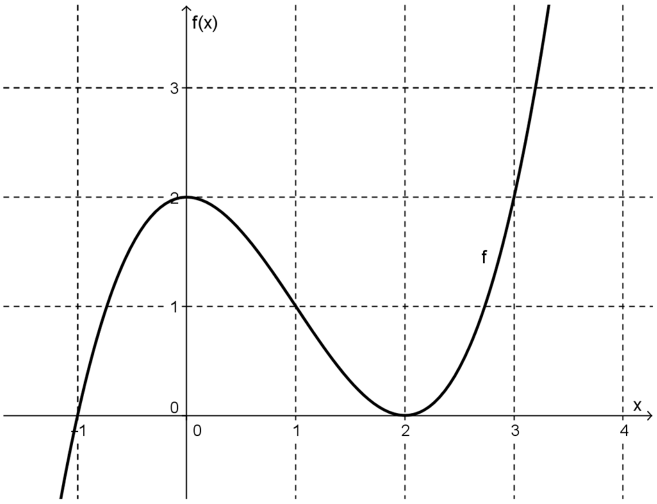
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2e		Die Parameter r und s müssen zwischen 0 und 1 liegen, damit die Ebene nur die Zuschauertribüne beschreibt. Das Einsetzen von $s = 1$ und $r = 1$ in die Ebenengleichung muss zu dem Punkt T_4 führen. $E: \overrightarrow{x_{T_4}} = \begin{pmatrix}10\\280\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}10\\-100\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-50\\-5\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\175\\40\end{pmatrix}$ Somit beschreibt die gegebene Ebenengleichung die Tribüne.	
2f	ermittelt die Zuschauerkapazität der Tribüne.	Zur Bestimmung der Fläche wird das Vektor- oder Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren und damit der Normalenvektor der Ebene bestimmt. $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}10\\-100\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-50\\-5\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\,000\\-400\\-5\,050\end{pmatrix}$ Der Betrag des Normalenvektors ergibt die Fläche, die von den Spannvektoren aufgespannt wird: $A = \left\lvert\begin{pmatrix}-4\,000\\-400\\-5\,050\end{pmatrix}\right\rvert \approx 6\,454{,}65\ [\mathrm{m}^2]$ Da nur 80 % der Fläche für Sitzplätze genutzt werden kann, muss die Fläche mit 0,8 multipliziert werden: $6454{,}65\ \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}8 = 5163{,}72\ \mathrm{m}^2$. Pro Sitzplatz werden $0{,}75\ \mathrm{m}^2$ kalkuliert, folglich muss die zur Verfügung stehende Tribünenfläche durch $0{,}75\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Zuschauer}}$ geteilt werden: $n = \frac{5163{,}72\ \mathrm{m}^2}{0{,}75\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Zuschauer}}} = 6884{,}96\ \mathrm{Zuschauer}$ Aufgrund der Ganzzahligkeit der Zuschauerplätze muss hier das Ergebnis abgeschnitten werden. Es ergibt sich eine Kapazität für 6884 Zuschauer.	3
2g	berechnet die Koordinaten des Zentrums des Ballons und die Länge des Seils.	Um den Mittelpunkt der Tribüne zu bestimmen, werden die Parameter $s = 0{,}5$ und $t = 0{,}5$ in die Ebenengleichung eingesetzt: $\overrightarrow{x_M} = \begin{pmatrix}10\\280\\0\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}10\\-100\\0\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-50\\-5\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\227{,}5\\20\end{pmatrix}$ Das Zentrum des Ballons soll sich in einer Höhe von $z = 270$ m befinden. Damit ergibt sich für das Zentrum des Ballons der Punkt $P_Z(-10\|227{,}5\|270)$. Die Länge l des Seils ergibt sich aus der Höhe des Ballonzentrums abzüglich des Radius des Ballons und der Höhe des Befestigungspunktes an der Tribüne: $l = 270\ \mathrm{m} - 5\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m} = 245\ \mathrm{m}$ Die Länge des Seils beträgt 245 m.	3
2h	berechnet den Punkt, in dem der Pilot in den Sicherheitskorridor einfliegen würde.	Der Kurs des Piloten kann durch die folgende Gerade beschrieben werden: $g_{\mathrm{Kollision}}: \vec{x} = \begin{pmatrix}320{,}0\\177{,}5\\15\end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix}100\\200\\15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}320{,}0\\177{,}5\\15\end{pmatrix}\right)$ $g_{\mathrm{Kollision}}: \vec{x} = \begin{pmatrix}320{,}0\\177{,}5\\15\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-220{,}0\\22{,}5\\0\end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	8

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2h		Es wird außerdem die Gleichung für die vordere Begrenzungsebene E aufgestellt, dazu wird der Stützvektor der „vorderen“ Ebene ermittelt, indem der Einheitsvektor $\vec{e}$ des Vektors $\overrightarrow{T_4T_1}$ (mit $z = 0$) berechnet wird: $\vec{e} = \frac{1}{\left\lVert \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rVert} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}995 \\ 0{,}0995 \\ 0 \end{pmatrix}$ Durch Multiplikation des Vektors $\vec{e}$ mit 150 und Addition mit dem Ortsvektor von Punkt T_1 ergibt sich der Stützvektor der Begrenzungsebene: $\begin{pmatrix} 20 \\ 180 \\ 0 \end{pmatrix} + 150 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}995 \\ 0{,}0995 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 169{,}256 \\ 194{,}926 \\ 0 \end{pmatrix}$ Aus dem Stützvektor und zwei Spannvektoren wird die Ebenengleichung gebildet. $\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 180 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich die Begrenzungsebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 169{,}256 \\ 194{,}926 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Diese Ebene wird mit der Geraden $g_{Kollision}$ zum Schnitt gebracht: $\begin{pmatrix} 169{,}256 \\ 194{,}926 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320{,}0 \\ 177{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -220 \\ 22{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ Es ergeben sich die folgenden Parameter: $s \approx -0{,}0203$, $t = 15$ und $r \approx 0{,}684$ und der Ortsvektor des Schnittpunktes P_S: $\overrightarrow{x_{P_S}} = \begin{pmatrix} 320 \\ 177{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} - 0{,}684 \cdot \begin{pmatrix} -220 \\ 22{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 169{,}459 \\ 192{,}896 \\ 15 \end{pmatrix}$ Da $s \approx -0{,}0203$ und $t = 15$ gelten, liegt der Punkt P_S in der vor der Tribüne liegenden Begrenzungsebene. Der Pilot würde bei gleichbleibender Flugroute in diesen Sicherheitsbereich im Punkt $P_S(169{,}459 \vert 192{,}896 \vert 15)$ einfliegen und damit nachträglich disqualifiziert werden.	
2i	zeigt, dass der minimale Abstand, mit dem der Pilot den kugelförmigen Werbeballon passieren wird, ca. 142,87 m beträgt.	Zunächst wird der Richtungsvektor $\vec{a}$ ohne z-Komponente und dessen Betrag berechnet: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 320 \\ 177{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ -22{,}5 \end{pmatrix}$ $\lvert \vec{a} \rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 220 \\ -22{,}5 \end{pmatrix} \right\rvert \approx 221{,}15[\mathrm{m}]$ Durch Multiplikation des Betrages mit dem Faktor $\left(\frac{120}{100} = 1{,}2\right)$ ergibt sich die z-Komponente des Richtungsvektors $\vec{a}$. Anschließend wird die Gerade für den Steigflug aufgestellt. $221{,}15\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2 = 265{,}38\ \mathrm{m}$ $g_{Steigflug}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 320{,}0 \\ 177{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} -220{,}00 \\ 22{,}50 \\ 265{,}38 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2i		Der Abstandsvektor ergibt sich aus der Differenz des Ortsvektors des Punktes Z und der Geraden $g_{\text{Steigflug}}$. Dieser wird mithilfe des Skalarproduktes in einen rechten Winkel mit der Steigfluggeraden gebracht. $\vec{d} = \overrightarrow{OZ} - g_{\text{Steigflug}}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}0\\210\\170\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}320\\177{,}5\\15\end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix}-220\\22{,}5\\265{,}38\end{pmatrix}\right)$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}-320\\32{,}5\\155\end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix}220\\-22{,}5\\-265{,}38\end{pmatrix}$ $0 = \begin{pmatrix}-220\\22{,}5\\265{,}38\end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix}-320\\32{,}5\\155\end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix}220\\-22{,}5\\-265{,}38\end{pmatrix}\right)$ $0 = (-220) \cdot \big((-320) + j \cdot 220\big) + 22{,}5 \cdot (32{,}5 - j \cdot 22{,}5)$ $\quad +265{,}38 \cdot (155 - j \cdot 265{,}38)$ $j \approx 0{,}941$ Es ergibt sich für den Parameter j der Zahlenwert $j = 0{,}941$. Durch Einsetzen des Parameters j in den Abstandsvektor ergibt sich der Vektor für den minimalen Abstand. Der Betrag führt dann zu der Länge des Abstandsvektors: $\vec{d} = \begin{pmatrix}-320\\-22{,}5\\155\end{pmatrix} + 0{,}940782 \cdot \begin{pmatrix}-220\\22{,}5\\265{,}38\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-113{,}03\\11{,}33\\-94{,}66\end{pmatrix}$ $\lvert\vec{d}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-113{,}03\\11{,}33\\-94{,}66\end{pmatrix}\right\rvert \approx 147{,}87\ [\text{m}]$ Da der Ballon einen Durchmesser von 10 m aufweist, muss für den tatsächlichen Abstand noch der Radius des Ballons vom Betrag des Abstandsvektors abgezogen werden. Es ergibt sich ein Abstand von ca. 142,87 Metern.	
			40

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

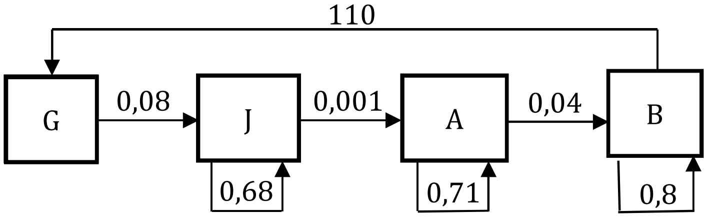
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f_{ab},
bestimmt die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von f_{ab} sprung- und knickfrei verläuft und
zeigt, dass der Wert $k = 1$ die Gleichung erfüllt.</td><td>$f_{ab}'(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ a & \text{für } x > 3 \end{cases}$
$f_{ab}(3) = \frac{3}{2}$
Da $f'_{ab}(3) = 4$ gilt, muss auch $a = 4$ gelten.
$\frac{3}{2} = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{21}{2}$
$\begin{aligned} -1 = \int_k^2 f_{ab}(x)dx &= \int_k^2 (1{,}5x^2 - 5x + 3)dx \\ &= [0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 3x + c]_k^2 \\ &= -0{,}5k^3 + 2{,}5k^2 - 3k \\ &= -0{,}5 \cdot 1^3 + 2{,}5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \\ &= -1 \end{aligned}$
Die Gleichung $-1 = \int_k^2 f_{ab}(x)dx$ ist für $k = 1$ erfüllt.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Die Funktion F mit der Gleichung:
$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x + e$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Wenn $a = b = 1$, $c = 0$ und $d \geq 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f immer null.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit: $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1c	skizziert den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem und ermittelt die Gleichung der Funktion f.	 $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Aus den Bedingungen folgt das LGS: $\begin{array}{rcrll} -1a + 1b - 1c &=& -2 & \vert \cdot 8 & \vert \cdot 12 \\ 8a + 4b + 2c &=& -2 & & \\ 12a + 4b + 1c &=& 0 & & \\ \hline -1a + 1b - 1c &=& -2 & & \\ 12b - 6c &=& -18 & \vert & \cdot 16 \\ 16b - 11c &=& -24 & \vert & \cdot (-12) \\ \hline -1a + 1b - 1c &=& -2 & & \\ 12b - 6c &=& -18 & & \\ 36c &=& 0 & & \\ \hline \end{array}$ Mit den Lösungen: $a = 0{,}5$, $b = -1{,}5, c = 0$ Die Gleichung der Funktion f lautet: $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2$.	5
1d	ermittelt die Gleichung der Funktion f und berechnet die Koordinaten des Punktes P.	Durch die Punkte $Q(2\vert 7)$ und $P(8\vert 6)$ lässt sich die Gleichung der Funktion f bestimmen: $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{22}{3}$. Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{22}{3}x$ $A'(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3}, A''(x) = -\frac{1}{3}$ Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3} \Leftrightarrow x_e = 22$ Hinreichende Bedingung: $A'(x_e) = 0 \wedge A''(x_e) \neq 0$ $A''(22) = -\frac{1}{3} \Rightarrow A''(x_e) < 0$ Somit ist x_e Stelle eines Hochpunktes. Da $x_e \notin D(A)$ ist, nimmt der Flächeninhalt A sein Maximum am rechten Rand des Definitionsbereiches an. Der Punkt P, bei dem der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird, hat folglich die Koordinaten $P(8\vert 6)$, da $f(8) = 6$ gilt.	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1e</td><td>bestimmt die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.</td><td>Durch Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix ergeben sich z. B.:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
Anhand der dritten Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist erkennbar, dass dieses LGS unendlich viele Lösungen hat.
Durch Wahl eines freien Parameters kann die Lösungsmenge bestimmt werden, z. B.:
$z = t, t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y - t = -2 \Leftrightarrow y = t - 2$ und
$\Rightarrow x - (t - 2) - 2t = 6 \Leftrightarrow x = 3t + 4.$
Die Lösungsmenge lautet: $L = \{(3t + 4; t - 2; t)\}$ mit $t \in \mathbb{R}$.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>entscheidet, welche der Aussagen wahr bzw. falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Für die Matrix D gilt: $D = A^T$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Rechenoperation $A \cdot B - B$ ist definiert.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Zur Matrix C existiert die inverse Matrix $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $C^n = E$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, wobei die Matrix E die Einheitsmatrix ist.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Wenn für die Matrix $M = B \cdot C$ gilt, so gilt für die Matrix $C = B^{-1} \cdot M$.</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>berechnet $Q_s \cdot P_s = M_s$ und
bestimmt den Wert für s derart, dass für die Matrix $M_s = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 11 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ gilt und
entscheidet und begründet, ob die Matrizen $Q_s \cdot R$ und $Q_s{}^T \cdot R^T$ vom gleichen Typ sein können.</td><td>$Q_s \cdot P_s = \begin{pmatrix} -4 & 7 - s & 11 \\ 6 & 2s - 3 & 6s + 6 \end{pmatrix}$
Es gilt: $\begin{pmatrix} -4 & 7 - s & 11 \\ 6 & 2s - 3 & 6s + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 11 \\ 6 & 1 & 18 \end{pmatrix}$, durch Vergleich aller Matrizenelemente ergibt sich $s = 2$.
Die Matrix Q_s ist vom Typ (2x3) und die Matrix R ist vom Typ (3x2), ihre Produktmatrix $Q_s \cdot R$ muss folglich vom Typ (2x2) sein, denn nur wenn die Spaltenanzahl der Matrix Q_s mit der Zeilenanzahl der Matrix R übereinstimmt, können diese Matrizen multipliziert werden.
Die Matrix $Q_s{}^T$ ist vom Typ (3x2) und die Matrix R^T ist vom Typ (2x3), ihre Produktmatrix $Q_s{}^T \cdot R^T$ muss deshalb vom Typ (3x3) sein.
Die Matrizen $Q_s \cdot R$ und $Q_s{}^T \cdot R^T$ können folglich nicht vom gleichen Typ sein.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>stellt die gegebene Matrizengleichung nach der Matrix X um und</td><td>$A \cdot X + B = A^T$
$A \cdot X = A^T - B$
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}(A^T - B)$
$X = A^{-1}(A^T - B)$
<i>Fortsetzung nächste Seite</i></td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h	berechnet die Matrix A^{-1} in Abhängigkeit vom Parameter k.	Für die inverse Matrix A^{-1} gilt: $A \cdot A^{-1} = E$. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Daraus folgen die linearen Gleichungssysteme: $\begin{array}{rcl} 8a + 4c & = & 1 \\ k \cdot c & = & 0 \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} 8b + 4d & = & 0 \\ k \cdot d & = & 1 \end{array}$ Unter der Bedingung, dass $k \neq 0$ ist, existieren die Lösungen: $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{2k}$, $c = 0$ und $d = \frac{1}{k}$, die zugehörige inverse Matrix ist: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{2k} \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$. Für $k = 0$ existiert keine zugehörige inverse Matrix A^{-1}.	
			40

Aufgabe 2: **Meeresschildkröten**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erstellt einen Übergangsgraphen für die in der Matrix M bzw. in der Tabelle 2.1 angegebenen Informationen.		4
2b	erläutert die Bedeutung der von Null verschiedenen Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix M und die Bedeutung des Matrixelementes $m_{32} = 0{,}001$.	Auf der Hauptdiagonalen gibt es Zahlenwerte, die von Null verschieden sind, da die Entwicklungsstufen der Schildkröten teilweise mehrere Altersstufen umfassen. So kann in der zweiten, dritten und vierten Entwicklungsstufe nach einem Jahr ein Verbleib in der Entwicklungsstufe erfolgen. Dabei bedeutet das Matrixelement $m_{22} = 0{,}68$, dass ca. 68 % der Jungtiere auch nach einem Jahres weiterhin zu den Jungtieren gezählt werden. Das Matrixelement $m_{33} = 0{,}71$ bedeutet auch, dass ca. 71 % der fast ausgewachsenen Tiere nach Ablauf eines Jahres auch in diesem Stadium verbleiben werden. Durch das Matrixelement $m_{44} = 0{,}8$ wird beschrieben, dass ca. 80 % der Brüter ein Jahr überleben werden. Das Matrixelement $m_{32} = 0{,}001$ gibt die Übergangswahrscheinlichkeit von den Jungtieren zu den fast ausgewachsenen Tieren an. Nur 0,1 % der Jungtiere sind ein Jahr später fast ausgewachsen.	4
2c	begründet allgemein und im Sachzusammenhang, dass die Matrix M keine stochastische Matrix sein kann.	Eine stochastische Matrix hat Matrixelemente m_{ij} mit $0 \leq m_{ij} \leq 1$ und die jeweiligen Spaltensummen ergeben immer den Wert 1. Das ist hier aufgrund der Geburtenrate (Anzahl der Eier > 1) sowie der nicht 100 %igen Überlebenswahrscheinlichkeit bzw. Übergangsrate nicht der Fall.	3
2d	berechnet den Bestand nach einem, nach fünf und nach neun Jahren,	Mit Hilfe des gegebenen Bestandvektors $\overrightarrow{p_0}$ und der Matrix M wird der Bestand berechnet. Nach einem Jahr: $\overrightarrow{p_1} = M \cdot \overrightarrow{p_0}$ $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0{,}08 & 0{,}680 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14\,300 \\ 6\,560 \\ 2\,848 \\ 264 \end{pmatrix}$ nach fünf Jahren: $\overrightarrow{p_5} = M^5 \cdot \overrightarrow{p_0}$ $\overrightarrow{p_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0{,}08 & 0{,}680 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}001 & 0{,}71 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 14\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 36\,391 \\ 7\,785 \\ 740 \\ 306 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	7

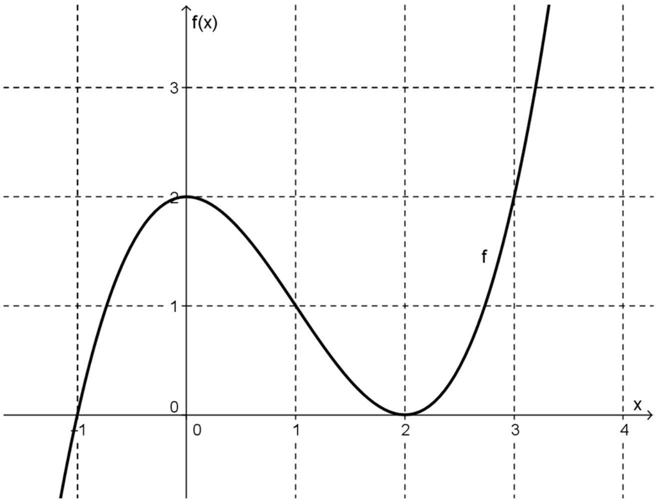
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d	vergleicht die zukünftige Entwicklung dieser gesamten Schildkrötenpopulation seit Beobachtungsbeginn mit der Entwicklung der Population der Lederschildkröte im Ostpazifik in den letzten 20 Jahren.	Nach neun Jahren: $\overrightarrow{p_9} = M^9 \cdot \overrightarrow{p_0}$ $\overrightarrow{p_9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0,08 & 0,680 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}^9 \approx \begin{pmatrix} 22\,897 \\ 7\,586 \\ 209 \\ 178 \end{pmatrix}$ Für die gesamte Schildkrötenpopulation ergab sich zu Beobachtungsbeginn eine Population mit ca. 26 130 Individuen. Um einen weiteren vergleichbaren Wert zu erhalten, wird auch der Populationsbestand nach zwanzig Jahren berechnet: $\overrightarrow{p_{20}} = M^{20} \cdot \overrightarrow{P_0} \approx \begin{pmatrix} 3\,135 \\ 1\,604 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ mit insgesamt ca. 4 778 Individuen. Das heißt, dass diese Schildkrötenpopulation bei unveränderten Bedingungen innerhalb der nächsten zwanzig Jahre auf einen Bestand von etwa 18,3 % zurückgehen wird. Der Rückgang beträgt also etwa 81,7 % und ist damit nicht ganz so groß wie der der Lederschildkröte.	
2e	gibt an, nach wie vielen Jahren die Schildkrötenpopulation bei unveränderten Bedingungen eingehen würde.	Bei unveränderten Bedingungen wird der Gesamtpopulationsbestand dieser Schildkrötenpopulation sich deutlich verringern. Mit Hilfe des CAS kann der Bestand nach beliebig vielen Jahren ermittelt werden, da der entsprechende Exponent der Matrix M gesucht wird. $\overrightarrow{p_{32}} = M^{32} \cdot \overrightarrow{p_0} \approx \begin{pmatrix} 311 \\ 170 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Nach etwa 32 Jahren wird die Schildkrötenpopulation eingehen, wenn die Lebensbedingungen nicht nachhaltig geändert werden. Hinweis: Je nach eingesetztem CAS und den gewählten Einstellungen kann die Lösung von der Modelllösung abweichen.	3
2f	zeigt, dass die Schildkrötenpopulation zu Untersuchungsbeginn durch den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_A}$ beschrieben werden kann und bestimmt die Verteilung der Schildkrötenpopulation auf die einzelnen Altersgruppen zu Beginn und nach zwei Jahren, wenn sich die Schildkrötenpopulation gemäß der Matrix M entwickeln wird.	Für die Verteilung zu Beginn der Untersuchung am 01.03.2013 gilt: doppelt so viele Jungtiere (J) wie fast Ausgewachsene (A): $J = 2A$, Anzahl der Eier und der Geschlüpften (G) ist dreimal so groß wie die der fast Ausgewachsenen (A): $G = 3A$, Brüteranzahl (B) ca. 5 % der Jungtiere (J): $B = 0,05J$. Daraus folgen: $J = 2A$, $G = 3A$ und $B = 0,05J = 0,1A$. Somit gilt für den Bestandsvektor $\overrightarrow{p_A}$: $\overrightarrow{p_A} = (G \quad J \quad A \quad B)^T = (3A \quad 2A \quad A \quad 0,1A)^T$. Für die Verteilung auf die verschiedenen Altersgruppen der Schildkrötenpopulation nach zwei Jahren gilt somit: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0,08 & 0,680 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 3A \\ 2A \\ A \\ 0,1A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,2A \\ 1,968A \\ 0,50712A \\ 0,12448A \end{pmatrix}$ Für die Verteilung der Population nach zwei Jahren gilt: $13,2A + 1,968A + 0,50712A + 0,12448A = 15,7996A = 4\,740$ $\Leftrightarrow A \approx 300$ *Fortsetzung nächste Seite*	7

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f		Schildkrötenpopulationsbestand nach zwei Jahren (A = 300): $\begin{pmatrix}G_2\\J_2\\A_2\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13{,}2A\\1{,}968A\\0{,}50712A\\0{,}12448A\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3\,960\\590\\152\\37\end{pmatrix}$ Nach zwei Jahren (01.03.2015) gab es etwa 3 960 Eier und Geschlüpfte, ca. 590 Jungtiere, ca. 152 fast ausgewachsene Tiere und ca. 37 Brüter. Zu Beginn der Untersuchung, am 01.03.2013 mit $A = 300$, gilt demzufolge: $\begin{pmatrix}G_0\\J_0\\A_0\\B_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3A\\2A\\A\\0{,}1A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}900\\600\\300\\30\end{pmatrix}.$ Zu Untersuchungsbeginn, am 01.03.2013, gab es 900 Eier und Geschlüpfte, 600 Jungtiere, 300 fast ausgewachsene Tiere und 30 Brüter in diesem Küstenabschnitt.	
2g	erstellt eine zugehörige Übergangsmatrix V und ermittelt eine Anfangsverteilung für die 40 Mitarbeiter auf die Abteilungen, so dass die Anzahl der Mitarbeiter pro Abteilung jedes Jahr stabil bleibt	$V=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}S & P & I\end{array}\\ \begin{array}{c}S\\P\\I\end{array} & \begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6\\0{,}2 & 0 & 0{,}4\\0{,}4 & 0{,}8 & 0\end{pmatrix}\end{array}$ Mit Hilfe der Matrizengleichung: $V\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ mit $a+b\ +\ c\ =\ 40$ kann der der Vektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, der die Verteilung der Mitarbeiter angibt, ermittelt werden, wobei durch a die Anzahl der Mitarbeiter in S, durch b die Anzahl der Mitarbeiter in P und durch c die Mitarbeiteranzahl in I angegeben wird. Aus der Matrizengleichung: $\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6\\0{,}2 & 0 & 0{,}4\\0{,}4 & 0{,}8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ folgt z. B. die Lösung: $a=\frac{17}{14}t, b=\frac{9}{14}t, c=t$ mit $t\in\mathbb{R}$. Da $a+b\ +\ c\ =\ 40$ gilt, ist $\frac{17}{14}t+\frac{9}{14}t+t=40$ mit $t=14$. Somit gilt für den Vektor $\vec{x}$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\9\\14\end{pmatrix}.$ Damit die Anzahl der Mitarbeiter in jedem Jahr stabil bleibt, sollten in der Abteilung S 17 Mitarbeiter, in der Abteilung P 9 Mitarbeiter und in der Abteilung I 14 Mitarbeiter beschäftigt werden.	5
2h	bestimmt die fehlenden Elemente der Übergangsmatrix W so, dass die gewünschte Verteilung der	Die Elemente der Übergangsmatrix $W=\begin{pmatrix}a & b & 0{,}4\\c & 0{,}1 & 0{,}4\\d & e & 0{,}2\end{pmatrix}$ sollen so bestimmt werden, dass Vektor $\vec{f}=\begin{pmatrix}10\\10\\20\end{pmatrix}$ ein Fixvektor ist. *Fortsetzung nächste Seite*	7

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2h	Mitarbeiter auf Grund der vom Chef vorgegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten bleibt.	Das heißt, die Matrizengleichung $W \cdot \vec{f} = \vec{f}$ soll gelöst werden: $W \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}4 \\ c & 0{,}1 & 0{,}4 \\ d & e & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, das zugehörige LGS lautet: $\begin{array}{rcl} 10a + 10b + 8 & = & 10 \\ 10c + 9 & = & 10 \\ \underline{10d + 10e + 4} & \underline{=} & \underline{20} \end{array}$ mit z. B. den Lösungen $(s, t \in \mathbb{R})$: $a = -s + 0{,}2$, $b = s$, $c = 0{,}1$, $d = -t + 1{,}6$ und $e = t$. Da $a \geq 0{,}1$ sein soll, ergibt sich als eine mögliche Lösung $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$, daraus folgt dann, da die Matrix W stochastisch ist, sofort $d = 0{,}8$ und $e = 0{,}8$. Eine mögliche Übergangsmatrix W, so dass die gewünschte Verteilung der Mitarbeiter gleich bleibt, lautet in diesem Fall: $W = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.	
			40

Aufgabe 1 Analysis mit Stochastik:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f_{ab},
bestimmt die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von f_{ab} sprung- und knickfrei verläuft und
zeigt, dass der Wert $k = 1$ die Gleichung erfüllt.</td><td>$f_{ab}'(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ a & \text{für } x > 3 \end{cases}$
$f_{ab}(3) = \frac{3}{2}$
Da $f'_{ab}(3) = 4$ gilt, muss auch $a = 4$ gelten.
$\frac{3}{2} = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{21}{2}$
$-1 = \int_k^2 f_{ab}(x)dx = \int_k^2 (1{,}5x^2 - 5x + 3)dx$
$= [0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 3x + c]_k^2$
$= -0{,}5k^3 + 2{,}5k^2 - 3k$
$= -0{,}5 \cdot 1^3 + 2{,}5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1$
$= -1$
Die Gleichung $-1 = \int_k^2 f_{ab}(x)dx$ ist für $k = 1$ erfüllt.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Die Funktion F mit der Gleichung:
$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x + e$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Wenn $a = b = 1$, $c = 0$ und $d \geq 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f immer null.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit: $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
</table>

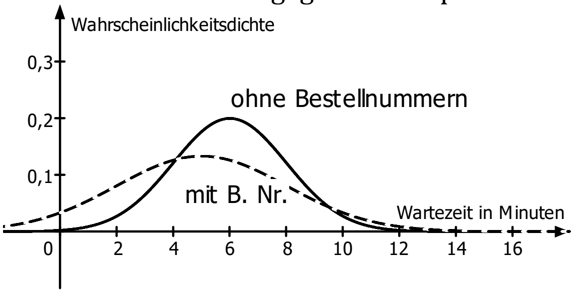
	Anforderungen	Modelllösungen	
1c	skizziert den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem und ermittelt die Gleichung der Funktion f.	 $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Aus den Bedingungen folgt das LGS: $\begin{array}{rcrl} -1a + 1b - 1c & = & -2 & \vert \cdot 8 \;\; \vert \cdot 12 \\ 8a + 4b + 2c & = & -2 & \\ 12a + 4b + 1c & = & 0 & \\ \hline -1a + 1b - 1c & = & -2 & \\ 12b - 6c & = & -18 & \vert \;\; \cdot 16 \\ 16b - 11c & = & -24 & \cdot (-12) \\ \hline -1a + 1b - 1c & = & -2 & \\ 12b - 6c & = & -18 & \\ 36c & = & 0 & \\ \hline \end{array}$ Mit den Lösungen: $a = 0{,}5$, $b = -1{,}5$, $c = 0$ Die Gleichung der Funktion f lautet: $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2$.	5
1d	ermittelt die Gleichung der Funktion f und berechnet die Koordinaten des Punktes P.	Durch die Punkte Q(2|7) und P(8|6) lässt sich die Gleichung der Funktion f bestimmen: $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{22}{3}$. Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{22}{3}x$ $A'(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3}$, $A''(x) = -\frac{1}{3}$ Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3} \Leftrightarrow x_e = 22$ Hinreichende Bedingung: $A'(x_e) = 0 \wedge A''(x_e) \neq 0$ $A''(22) = -\frac{1}{3} \Rightarrow A''(x_e) < 0$ Somit ist x_e Stelle eines Hochpunktes. Da $x_e \notin D(A)$ ist, nimmt der Flächeninhalt A sein Maximum am rechten Rand des Definitionsbereiches an. Der Punkt P, bei dem der Flächeninhalt des Rechteckes maximal wird, hat folglich die Koordinaten P(8|6), da $f(8) = 6$ gilt.	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1e</td><td>gibt den Erwartungswert an und
erläutert, welches x_i die kleinste Wahrscheinlichkeit haben muss und
ermittelt a und gibt die Wahrscheinlichkeiten an.</td><td>$E(X) = 0 \cdot a + 1 \cdot 4a + 2 \cdot 6a + 4 \cdot 9a = 52a$
Da $P(X = x_i)$ jeweils Vielfache von a sind, muss gelten $0 < a < 1$, da es sonst keine Wahrscheinlichkeiten sein können, die in der Summe 1 ergeben. Da $9a > 6a > 4a > a$ gilt, folgt, dass $P(0)$ am kleinsten ist.
$1 = a + 4a + 6a + 9a = 20a \Leftrightarrow a = 0{,}05$
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>a</td><td>4a</td><td>6a</td><td>9a</td></tr>
<tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,05</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,45</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>ergänzt die fehlenden Werte im Vierfelderdiagramm und
berechnet die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A}|B)$.</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>$\overline{A}$</td><td>Summen</td></tr>
<tr><td>B</td><td>200</td><td>50</td><td>250</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}$</td><td>1300</td><td>450</td><td>1750</td></tr>
<tr><td>Summen</td><td>1500</td><td>500</td><td>2000</td></tr>
</table>
$P(\overline{A}|B) = \frac{50}{250} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{40}} = 0{,}2$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>gibt die Hypothesen an,
gibt die Gleichung für den Fehler 1. Art an und
erläutert, warum der Fehler 2. Art sinkt, wenn der Fehler 1. Art steigt.</td><td>$H_0: p \leq 0{,}6$
$H_1: p > 0{,}6$
$0{,}00736 \approx \sum_{k=201}^{300} \binom{300}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{300-k}$
(oder $0{,}00736 \approx P(X > 200)$)
Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art berechnet sich über die kumulierten Wahrscheinlichkeiten der binomialverteilten Zufallsvariable X mit $n = 300$ und $p = p_1$ im Annahmebereich des Hypothesentests. Steigt der Fehler 1. Art, dann wird der Annahmebereich der Nullhypothese kleiner, da man sich beim Verwerfen der Nullhypothese mit einer größeren Wahrscheinlichkeit irren darf. Dadurch, dass der Annahmebereich kleiner wird, sinkt der Fehler zweiter Art für jeden realen p_1 Wert, der größer ist als $p = 0{,}6$.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>gibt auf Grundlage der Häufigkeitstabelle und des Boxplotdiagramms die statistischen Größen an und
ergänzt die fehlenden Werte in der Häufigkeitstabelle.</td><td>(1) Modus: $z_{Modus} = 63$
(2) Quartilsabstand: $Q_3 - Q_1 = 19$
<table>
<tr><td>z_i</td><td>h_i</td></tr>
<tr><td>56</td><td>1</td></tr>
<tr><td>58</td><td>3</td></tr>
<tr><td>61</td><td>1</td></tr>
<tr><td>63</td><td>4</td></tr>
<tr><td>67</td><td>2</td></tr>
<tr><td>70</td><td>2</td></tr>
<tr><td>80</td><td>3</td></tr>
<tr><td>110</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>18</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Im Bistro

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	berechnet die beiden fehlenden Werte.	Tagesgericht: $\bar{x} = \frac{172+168+144+132+98}{5} = 142{,}8$ Vegetarisches Gericht: $49 = \frac{v_1+52+95+36+22}{5} \Leftrightarrow v_1 = 40$ Im Mittel wurden in der betrachteten Woche täglich 142,8 Tagesgerichte verkauft. Am Montag wurden 40 vegetarische Gerichte verkauft.	4
2b	nimmt auf der Grundlage eines geeigneten Streuungsmaßes Stellung zu der Aussage.	Beispielsweise kann auf Grundlage der Standardabweichung der Anzahl der verkauften Gerichte in der betrachteten Woche Stellung bezogen werden. Ein CAS liefert: $s_x \approx 26{,}88$ und $s_v \approx 24{,}92$. Anhand der Standardabweichungen ist erkennbar, dass die Anzahl der Tagesgerichte tatsächlich stärker streut als die Anzahl der vegetarischen Gerichte. Absolut beträgt der Unterschied in der Streuung jedoch weniger als 2 Gerichte. Dies ist in Anbetracht der Anzahl der verkauften Gerichte nicht viel. Relativiert man die Streuung noch durch den Mittelwert, wird sogar deutlich, dass das Tagesgericht relativ weniger stark streut: $\frac{26{,}88}{142{,}8} \approx 0{,}19$ und $\frac{24{,}92}{49} \approx 0{,}51$.	4
2c	erläutert, unter welchen Annahmen die Anzahl der Vegetarier als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.	Wenn man n Schüler dahingehend untersucht, ob sie Vegetarier sind oder nicht, handelt es sich um eine n-stufige Bernoulli-Kette, da das Einzelexperiment innerhalb einer Stufe nur zwei Ergebnisse hat: Erfolg (Schüler ist Vegetarier) und Misserfolg (Schüler ist nicht Vegetarier). Die Anzahl der Schüler ist ganzzahlig, somit ist die Zufallsvariable abzählbar und mithin diskret. Zuletzt gilt es die Frage der stochastischen Unabhängigkeit zu klären: Ist die Tatsache, dass ein Schüler Vegetarier ist, unabhängig davon, dass ein anderer Schüler Vegetarier ist. Dies ist zumeist der Fall. Einige Berufsfelder haben zwar vielleicht eine größere Nähe zu Ernährungs- und/oder Ökologiefragen, dennoch ist davon auszugehen, dass im Allgemeinen die Entscheidung für oder gegen Vegetarismus unabhängig von dem einzelnen Schüler getroffen wurde.	4
2d	berechnet die Wahrscheinlichkeiten für • genau 167 Vegetarier, • weniger als 150 Vegetarier und	X:= Anzahl der Vegetarier X ist binomialverteilt mit $n = 1\,850$ und $p = 0{,}09$. $P(X = 167) = \binom{1\,850}{167} \cdot 0{,}09^{167} \cdot 0{,}91^{1\,683} \approx 0{,}0323$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 3,23 % sind genau 167 Schüler Vegetarier. $P(X < 150) = \sum_{k=0}^{149} \binom{1\,850}{k} \cdot 0{,}09^{k} \cdot 0{,}91^{1\,850-k} \approx 0{,}082$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 8,2 % sind weniger als 150 Schüler Vegetarier. *Fortsetzung nächste Seite*	6

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 2d</td><td>• mehr als 250 Vegetarier.</td><td>$$P(X \geq 251) = \sum_{k=251}^{1\,850} \binom{1\,850}{k} \cdot 0{,}09^k \cdot 0{,}91^{1\,850-k} \text{ ist nahezu Null.}$$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 250 Schüler Vegetarier sind, ist sehr klein, nahezu Null.</td><td></td></tr>
<tr><td>2e</td><td>formuliert auf der Grundlage des dargelegten Hypothesentests die Entscheidungsregel.</td><td>Linksseitiger Hypothesentest:
H_0: $p \geq 0{,}09$ und H_1: $p < 0{,}09$
mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha \leq 0{,}05$.
$X :=$ Anzahl der Vegetarier
X ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0{,}09$.
$P(X \leq 18) \approx 0{,}0376 < 0{,}05$ und $P(X \leq 19) \approx 0{,}0599 > 0{,}05$
Annahmebereich: $A = [19; 300]$
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = [0; 18]$
Entscheidungsregel: Wenn von den 300 zufällig ausgewählten Schülern weniger als 19 Vegetarier sind, wird die Nullhypothese verworfen. Es wird dann davon ausgegangen, dass der Anteil der Vegetarier unter 9 % liegt.
Wenn mindestens 19 Schüler Vegetarier sind, wird die Nullhypothese beibehalten und man geht davon aus, dass mindestens 9 % der Schüler Vegetarier sind.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2f</td><td>prüft mittels eines Vierfelderdiagramms, ob weniger Frauen als Männer das Bistro zum Mittagessen nutzen.</td><td>Vierfelderdiagramm mit absoluten Häufigkeiten
<table>
<tr><th>h</th><th>V</th><th>$\overline{V}$</th><th>∑</th></tr>
<tr><td>W</td><td>147</td><td>252</td><td>399</td></tr>
<tr><td>$\overline{W}$</td><td>98</td><td>462</td><td>560</td></tr>
<tr><td>∑</td><td>245</td><td>714</td><td>959</td></tr>
</table>
Vierfelderdiagramm mit empirischen Wahrscheinlichkeiten
<table>
<tr><th>P</th><th>V</th><th>$\overline{V}$</th><th>∑</th></tr>
<tr><td>W</td><td>$\frac{21}{137}$</td><td>$\frac{36}{137}$</td><td>$\frac{57}{137}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{W}$</td><td>$\frac{14}{137}$</td><td>$\frac{66}{137}$</td><td>$\frac{80}{137}$</td></tr>
<tr><td>∑</td><td>$\frac{35}{137}$</td><td>$\frac{102}{137}$</td><td>1</td></tr>
</table>
mit: W:= weibliche Kunden $\overline{W}$:= männliche Kunden
V:= vegetarisches Gericht $\overline{V}$:= Tagesgericht
In der untersuchten Woche haben tatsächlich weniger Frauen als Männer das Mittagsangebot im Bistro genutzt. Absolut standen 399 Frauen 560 Männern gegenüber. Relativ sind dieses ca. 42 % Frauen gegenüber ca. 58 % Männern.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2g</td><td>ermittelt näherungsweise, wie lange ein Schüler im Mittel wartet und die zugehörige Standardabweichung und</td><td>Der Mittelwert ist bei normalverteilten Zufallsvariablen stets die Stelle der größten Wahrscheinlichkeitsdichte, daher muss er bei einer Wartezeit von ca. 6 Minuten liegen.
Der Abstand zwischen den Wendestellen und der Maximalstelle der Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte beträgt bei einer normalverteilten Zufallsvariablen eine Standardabweichung. Laut Graphik liegen die Wendestellen in etwa bei 4 und 8 Minuten Wartezeit, daher muss die Standardabweichung in etwa 2 Minuten betragen.</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>berechnet die Wahrscheinlichkeit, länger als 5 Minuten zu warten.</td><td>Hieraus ergibt sich die folgende Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Y (Y:= Wartezeit in Minuten und Y ist normalverteilt mit $\mu = 6$ und $\sigma = 2$):
$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{2}\right)^2}$$
$$P(Y > 5) = 0{,}5 + \int_5^6 f(x)dx \approx 0{,}6915$$
Die Wahrscheinlichkeit, länger als 5 Minuten auf sein Essen zu warten, beträgt somit ca. 70 %.</td><td></td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
2h	berechnet unter der Annahme, dass die Wartezeit weiterhin normalverteilt ist, den Wert der jetzt vorliegenden Standardabweichung.	$\mu = 5$ und $P(Y \leq 10) = 0{,}95$ $0{,}45 = \int_5^{10} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{\sigma}\right)^2} dx$ $\Rightarrow \sigma \approx 3{,}04$ Nach der neuen Methode liegt jetzt eine höhere Standardabweichung von gut 3 Minuten vor. Zum Vergleich könnte der Schüler die neue Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in die gegebene Graphik skizzieren: 	5
	vergleicht die beiden Methoden hinsichtlich der Wartezeitproblematik.	Es können auch die Wertetabellen der Verteilungsfunktionen verglichen werden. Auffällig ist: • Im Mittel warten die Schüler mit Bestellnummern eine Minute weniger. • Die Wahrscheinlichkeiten für sehr lange und sehr kurze Wartezeiten sind mit Bestellnummern jedoch größer. Somit kann ein Schüler häufiger besonders schnell aber auch häufiger besonders spät drankommen. • Es ist unrealistisch, dass die Wartezeit mit Bestellnummern immer noch normalverteilt ist, weil negative Wartezeiten hohe Wahrscheinlichkeitsdichten haben.	
			40

Aufgabe 3: **Fehmarnbeltquerung**

A3	Anforderungen	Modelllösungen	
	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	begründet, warum sich eine ganzrationale Funktion 3. Grades anbietet.	Im dargestellten Verlauf der Tunneltrasse f befinden sich die drei Punkte A, B und C. Der Punkt B kann als Tiefpunkt identifiziert werden. Dadurch, dass durch den Tiefpunkt B keine Symmetrieachse verläuft, muss der Graph der Funktion einen höheren Grad als 2 aufweisen. Zur Erfüllung dieser Vorgaben bietet sich eine ganzrationale Funktion 3. Grades an.	4
3b	zeigt, dass die Gleichung der Funktion f die Trassenführung angemessen beschreibt.	Allgemeine Gleichung: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Bedingungen: I. $f(0) = 2$ II. $f(13) = 0$ III. $f(21) = 1$ IV. $f'(13) = 0$ LGS: I. $d = 2$ II. $2\,197 \cdot a + 169 \cdot b + 13 \cdot c + d = 0$ III. $9\,261 \cdot a + 441 \cdot b + 21 \cdot c + d = 1$ IV. $507 \cdot a + 26 \cdot b + c = 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{41}{227\,136}x^3 + \frac{811}{113\,568}x^2 - \frac{4\,843}{17\,472}x + 2$	4
3c	berechnet die Fläche des Sicherheitsbereiches und gibt das Ergebnis in einer sinnvollen Maßeinheit an.	$s_o(x) = -\frac{1}{21}x + \frac{5}{2}$ $s_u(x) = \frac{41}{227\,136}x^3 + \frac{811}{113\,568}x^2 - \frac{4\,843}{17\,472}x + 1{,}5$ Die Gleichung der Funktion d ist die Differenzenfunktion der Funktionen s_o und s_u: $d(x) = s_o(x) - s_u(x) = -\frac{41}{227\,136}x^3 - \frac{811}{113\,568}x^2 + \frac{191}{832}x + 1$ Die Gleichung der Integralfunktion I_0 lautet: $I_0(x) = -\frac{41}{908544}x^4 - \frac{811}{340704}x^3 + \frac{191}{1\,664}x^2 + x\,.$ $I_0(21) \approx 40{,}7987\ [\mathrm{km}^2]$ Der Flächeninhalt des Sicherheitsbereiches beträgt in etwa 40,7987 km^2.	6
3d	ermittelt die Menge des Aushubes, der langfristig annähernd bewegt werden muss, sowie die Aushubmenge zum Beginn der Betrachtung und ermittelt den Parameterwert k.	Da $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty}\left(15 - 14{,}5 \cdot e^{k \cdot t}\right) = 15.$ Der gesamte Aushub hat eine Menge von ca. 15 Mio. m^3. $g(0) = 0{,}5$ Zu Beginn der Baggerarbeiten sind bereits 0,5 Mio. m^3 an Land verschoben worden. 98 % ≙ 14, 7 Mio. m^3, für den Wert des gesuchten Parameters gilt somit: $14{,}7 = 15 - 14{,}5 \cdot e^{k \cdot 70} \Rightarrow k \approx -0{,}0554.$	6

A3	Anforderungen	Modelllösungen	
3e	berechnet die Dauer, bis 10 Mio. m^3 Aushub bewegt worden sind.	$10 = 15 - 14{,}5 \cdot e^{-\frac{3}{50}t} \Rightarrow t \approx 17{,}75$ Nach etwas mehr als 17 Wochen und 5 Tagen sind 10 Mio. m^3 Aushub bewegt worden.	3
3f	ermittelt die durchschnittliche wöchentliche Änderung der Aushubmenge.	$\frac{h(30)-h(10)}{30-10} \approx 0{,}278 \left[\frac{\text{Mio. } m^3}{\text{Woche}}\right]$ Die durchschnittliche Änderung der Aushubmenge ab der 10. bis zur 30. Woche der Bauphase beträgt ca. 0,278 Mio. m^3 pro Woche.	4
3g	ermittelt die gesuchte Dauer.	$h'(t) = 0{,}87 \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t}$ $0{,}5 = 0{,}87 \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} \Rightarrow t \approx 9{,}23$ [Wochen] In der 10. Woche nach Baubeginn wird diese Vorgabe noch genau eingehalten.	3
3h	berechnet den Wert des Parameters m, so dass der zu erwartende Fahrzeugstrom um 7:00 Uhr maximal wird und gibt die Größe des Fahrzeugstroms an.	$i_m(t) = 1{,}4 - m \cdot e^{-3t} + 2 \cdot e^{-0{,}9t}$ $i_m'(t) = 3 \cdot m \cdot e^{-3t} - 1{,}8 \cdot e^{-0{,}9t}$ $i_m''(t) = -9 \cdot m \cdot e^{-3t} + 1{,}62 \cdot e^{-0{,}9t}$ Notwendige Bedingung: $i_m'(t) = 0$ $i_m'(t) = 0 \Leftrightarrow t_e = \frac{10 \cdot \ln(m)}{21} + \frac{10 \cdot \ln(5)}{21} - \frac{10 \cdot \ln(3)}{21}$ mit $m>0$. Es gilt für 07:00 Uhr: $t_e = 0{,}5$ $\frac{10 \cdot \ln(m)}{21} + \frac{10 \cdot \ln(5)}{21} - \frac{10 \cdot \ln(3)}{21} = 0{,}5 \Leftrightarrow m = \frac{3 \cdot e^{\frac{21}{20}}}{5}$ $\Rightarrow m \approx 1{,}71$ Hinreichende Bedingung: $i_m''(t_e) < 0 \land i_m'(t_e) = 0$ $i_m''(t_e) \approx -2{,}41 \Rightarrow i_m''(t_e) < 0$ Somit ist t_e Stelle eines Hochpunktes. Der zu erwartende Fahrzeugstrom wird für $m \approx 1{,}71$ um 07:00 Uhr maximal. $i_m(t_e) \approx 2{,}293$ Um 07:00 Uhr beträgt der maximale Fahrzeugstrom ca. 2 293 Fahrzeuge pro Stunde.	5
3i	beurteilt die Richtigkeit der Behauptung.	$i_2'(t) = 6 \cdot e^{-3t} - 1{,}8 \cdot e^{-0{,}9t}$ $i_2''(t) = -18 \cdot e^{-3t} + 1{,}62 \cdot e^{-0{,}9t}$ $i_2'''(t) = 54 \cdot e^{-3t} - 1{,}458 \cdot e^{-0{,}9t}$ Notwendige Bedingung: $i_2''(t) = 0$ $0 = -18 \cdot e^{-3t} + 1{,}62 \cdot e^{-0{,}9t} \Rightarrow t_w \approx 1{,}15$ Hinreichende Bedingung: $i_2'''(t_w) \neq 0 \land i_2''(t_w) = 0$ $i_2'''(t_w) \approx 1{,}21 \Rightarrow i_2'''(t_w) > 0$ Somit ist t_w die Stelle eines Wendepunktes mit größter Abnahme. Die Behauptung ist nicht richtig, weil die größte Abnahme des Fahrzeugstroms um ca. 07:39 Uhr stattfindet.	5
			40

Aufgabe 3: **Dengue-Fieber**

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>erstellt eine Funktionsgleichung und ergänzt die fehlende Zahl für das Jahr 2004.</td><td>$g(t) = m \cdot t + b$
I. $g(0) = m \cdot 0 + b = 210$
II. $\underline{g(1) = m \cdot 1 + b = 120}$
Das Lösen des LGS ergibt:
$m = -90$ und $b = 210$,
also $g(t) = -90t + 210$
und somit $g(2) = 30$.
<table>
<tr><td>Vergangene Zeit in Jahren</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Fälle pro Jahr</td><td>210</td><td>120</td><td>30</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>ermittelt die Gleichung einer Funktion, die die Entwicklung der übermittelten Dengue-Fieber-Fälle für die Jahre 2002 bis 2007 geeignet wiedergibt und

begründet die Wahl des Funktionstyps.</td><td>Regression über die gegebenen Punkte ergibt
• mit quadratischer Regression:
$z_2(t) = 20{,}4t^2 - 87{,}5t + 202$
• mit kubischer Regression
$z_3(t) = -1{,}85t^3 + 34{,}2t^2 - 113t + 208$
• mit Regression 4. Ordnung
$z_4(t) = 1{,}25t^4 - 14{,}4t^3 + 72{,}6t^2 - 149t + 210$
• mit Regression 5. Ordnung
$z_5(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^5 + \frac{65}{12}t^4 - 32{,}5t^3 + \frac{1255}{12}t^2 - \frac{1003}{6}t + 210$

Der Korrelationskoeffizient für z_2 ist $r \approx 0{,}9907$, für z_3 ist $r \approx 0{,}9965$ und für z_4 ist $r \approx 0{,}9997$ und für z_5 ist $r = 1$.
Betrachtet man die Punkte, werden diese am besten durch einen durchgehend konvexen Kurvenverlauf beschrieben, der jedoch nicht symmetrisch ist. Diese Eigenschaft hat eine kubische und auch jede andere ganzrationale Funktion höheren Grades, sofern im betrachteten Intervall keine Extrempunkte außer einem Tiefpunkt liegen. Dies erfüllt die kubische Funktion, wie am Graphenverlauf leicht erschlossen werden kann. Zudem verfügt sie über einen hohen Korrelationskoeffizienten, so dass die Funktionswerte der Schätzerfunktion die empirischen Werte sehr gut wiedergeben. Da auch die ganzrationale Funktion 5. Grades lediglich einen Tiefpunkt im betrachteten Intervall aufzeigt, ist auch diese geeignet, ihre Kurve verläuft natürlich optimal durch alle sechs Punkte.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>ermittelt den Zeitraum, in dem die Moderatorin vermutlich unter kritischem Fieber leidet,

bestimmt den Zeitraum, in dem die Temperatur ansteigt und</td><td>$c(t) = 40{,}5$
$t_1 \approx 2{,}66$ und $t_2 \approx 7{,}75$.
Vom Tag 2,66 bis zum Tag 7,75, also über einen Zeitraum von gut fünf Tagen lag kritisches Fieber vor.

Für den Zeitraum des Anstiegs den Hochpunkt berechnen:
$c'(t) = (2 - \frac{21t}{50}) \cdot e^{-0{,}21t}$
$c'(t) = 0$
$t \approx 4{,}76$
$c(4{,}76) \approx 40{,}96$ <i>Fortsetzung nächste Seite</i></td><td>7</td></tr>
</table>

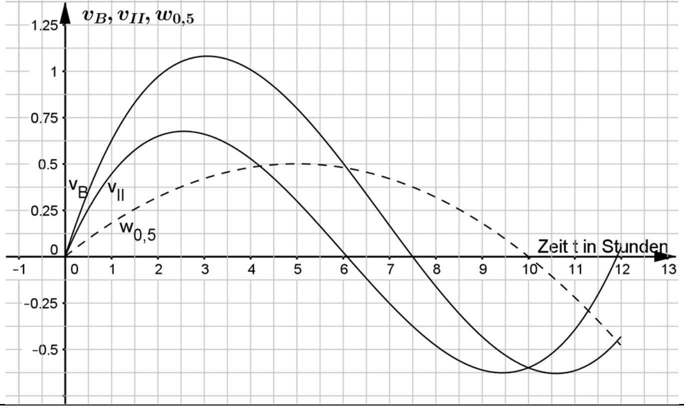
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3c	bestimmt weiterhin den maximalen Wert, den die Temperatur erreicht.	lt. Graphik: $H(4{,}76 \vert 40{,}96)$ Bis zum Zeitpunkt $t = 4{,}76$ also rund 4 Tage und 18 Stunden stieg die Temperatur, bis sie dann ihren höchsten Wert von ca. 41°C erreichte.	
3d	berechnet den Wendepunkt des Graphen der Funktion c und interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	$c(t) = 2t \cdot e^{-0,21t} + 2e^{2,93}$ $c'(t) = \left(-\frac{21}{50}t + 2\right) \cdot e^{-0,21t}$ $c''(t) = \left(\frac{441}{5\,000}t - \frac{21}{25}\right) \cdot e^{-0,21t}$ $c'''(t) = \left(-\frac{9\,261}{500\,000}t + \frac{1\,323}{5\,000}\right) \cdot e^{-0,21t}$ Notwendige Bedingung: $c''(t) = 0$ $0 = \left(\frac{441}{5\,000}t - \frac{21}{25}\right) \cdot e^{-0,21t} \Rightarrow t = \frac{200}{21}$ Hinreichende Bedingung: $c''(t_W) = 0 \ \wedge \ c'''(t_W) \neq 0$ $c'''\left(\frac{200}{21}\right) \approx 0{,}012 \ \Rightarrow c'''(t_W) \neq 0$ Berechnung des Wendepunktes: $c\left(\frac{200}{21}\right) \approx 40{,}03 \Rightarrow W\left(\frac{200}{21} \middle\vert 40{,}03\right)$ Im Wendepunkt sinkt die Temperatur momentan am stärksten ($c'''(t_W) > 0$), das heißt, nach ca. 9,5 Stunden bei einer momentanen Temperatur von 40,03°C sinkt das Fieber pro Tag am stärksten.	5
3e	interpretiert den formalen Ausdruck M im Sachzusammenhang.	$M = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a w_{p;q}(t)dt$ Mit Hilfe des Integrals wird die Wirkstoffkonzentration mal Stunde im Zeitraum von 0 bis a Stunden berechnet. Die Einheit des Integrals ist $\frac{mg}{l} \cdot h$, also „Wirkstoffkonzentrationsstunden“. Durch den Faktor $\frac{1}{a}$ wird das Ergebnis des Integrals durch die Länge des Zeitraums geteilt. Der Faktor $\frac{1}{a}$ hat die Einheit $\frac{1}{h}$, damit hat der formale Ausdruck die Einheit $\frac{mg}{l}$. Der formale Ausdruck M beschreibt die mittlere Konzentration im Zeitraum von 0 bis a Stunden für $a \leq 12$.	4
3f	bestimmt die Parameter p und q.	$w_{p;q}(t) = p \cdot t \cdot e^{-q \cdot t}$ $w'_{p;q}(t) = (p - p \cdot q \cdot t) \cdot e^{-q \cdot t}$ Der Hochpunkt soll nach einer Stunde mit einem Wert von $12\,\frac{mg}{l}$ erreicht werden. Daraus ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen: I. $w_{p;q}(1) = 12 \Leftrightarrow \quad 12 = p \cdot e^{-q}$ II. $\underline{w'_{p;q}(1) = 0} \ \Leftrightarrow \quad \underline{0 = (p - p \cdot q) \cdot e^{-q}}$ $\Rightarrow q = 1 \text{ und } p = 12 \cdot e \ \cong \ 32{,}6$	4
3g	bestimmt den Wendepunkt des Graphen der Funktion $w_{p;q}$,	$w_{p;q}(t) = p \cdot t \cdot e^{-q \cdot t}$ $w'_{p;q}(t) = (p - p \cdot q \cdot t) \cdot e^{-q \cdot t}$ $w''_{p;q}(t) = p \cdot q \cdot (q \cdot t - 2) \cdot e^{-q \cdot t}$ $w'''_{p;q}(t) = -p \cdot q^2 \cdot (q \cdot t - 3) \cdot e^{-q \cdot t}$ Notwendige Bedingung: $w''_{p;q}(t) = 0$ $\Rightarrow t_W = \frac{2}{q}$, $p \cdot q \neq 0$, da $p > 0$ und $q > 0$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3g	ergänzt die fehlenden Angaben der Funktionsgleichung $w_{p;q_{neu}}$und berechnet auch den Zeitpunkt, an dem der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.	Hinreichende Bedingung: $w''_{p;q}(t_W)=0\ \wedge\ w'''_{p;q}(t_W)\neq 0$ $w'''_{p;q}\left(\frac{2}{q}\right)=p\cdot q^2\cdot e^{-2}\neq 0$, da $p>0$ und $q>0$ $w_{p;q}\left(\frac{2}{q}\right)=\frac{2\cdot p\cdot e^{-2}}{q}\Rightarrow WP\left(\frac{2}{q}\,\mid\,\frac{2\cdot p\cdot e^{-2}}{q}\right)$ Steigung im Wendepunkt ist Steigung der Tangente: $m=w'_{p;q}\left(\frac{2}{q}\right)=-p\cdot e^{-2}$ Wendepunkt für die Berechnung von b: $w_{p;q}\left(\frac{2}{q}\right)=\frac{2\cdot p\cdot e^{-2}}{q}$ $g\left(\frac{2}{q}\right)=-p\cdot e^{-2}\cdot\frac{2}{q}+b=\frac{2\cdot p\cdot e^{-2}}{q}\Leftrightarrow b=\frac{4\cdot p\cdot e^{-2}}{q}$ Berechnung der Nullstelle für den Definitionsbereich $0=-p\cdot e^{-2}\cdot t+\frac{4\cdot p\cdot e^{-2}}{q}$ $\Rightarrow t=\frac{4}{q}$ Somit ergibt sich für die Funktionsgleichung $w_{p;q_{neu}}$: $w_{p;q_{neu}}(t)=\begin{cases} p\cdot t\cdot e^{-qt} & \text{für}\quad 0<t\leq\frac{2}{q}\\ -p\cdot e^{-2}\cdot t+\frac{4\cdot p\cdot e^{-2}}{q} & \text{für}\quad \frac{2}{q}\leq t\leq\frac{4}{q}\end{cases}.$ Der Wirkstoff ist zum Zeitpunkt $t=\frac{4}{q}$ vollständig abgebaut.	
3h	prüft, ob die Weichkapseln das vorgegebene Volumen überschreiten.	Nullstellen als Integrationsgrenzen berechnen: $f(x)=0\ \Rightarrow x_1\approx -0.557$ und $x_2\approx 0{,}557$ Volumen des Rotationskörpers: $V_{Rotation}=\pi\cdot\int_{-0{,}557}^{0{,}557}(-10x^6+0{,}3)^2dx\approx 0{,}249$ Die Kapsel umfasst ein Volumen von knapp 0,25 cm^3. Damit wird das vorgegebene Volumen von 0,25 cm^3 nicht überschritten.	5
			40

Aufgabe 3: **Wattenmeer**

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt den Verlauf der Wasserströmungsgeschwindigkeit im Sachzusammenhang anhand zweier Aspekte.	Beispielsweise: • Anstieg der Wasserströmungsgeschwindigkeit bis 02:45 Uhr mit scheinbarem Maximum, • zwischen 04:15 Uhr und 6:30 Uhr Umkehr der Richtung, ablandige Strömung, • gegen 08:45 Uhr Minimum (maximale ablandige Wasserströmungsgeschwindigkeit), • zwischen 11:20 Uhr und 14:00 Uhr Rückkehr zur Richtung Küste, • ab 12:00 Uhr (eventuell) wiederkehrende Periode.	4
3b	bestimmt die Gleichung einer geeigneten Funktion für den Verlauf der Wasserströmungsgeschwindigkeiten und begründet die Wahl.	Regression z. B. mit einer trigonometrischen Funktion ergibt: $v(t) \approx 0{,}59 \cdot \sin(0{,}51 \cdot t + 0{,}11) - 0{,}023.$ Hinweis: Je nach eingesetztem CAS und den gewählten Einstellungen kann die Lösung von der Modelllösung abweichen. Nur eine ganzrationale Funktion vom Grad vier oder eine trigonometrische Funktion beschreibt durch die mindestens erforderlichen zwei Wendepunkte den Verlauf im betrachteten Intervall relativ gut.	6
3c	ermittelt die größten Wasserströmungsgeschwindigkeiten in Richtung Küste der Funktionen v_I und v_{II} und gibt auch die dazugehörigen Uhrzeiten an und	„In Richtung Küste“ bedeutet, dass nur nach dem Hochpunkt gefragt wird. $v_I(t) = \frac{3}{5} \cdot \sin\left(\frac{13}{25}t\right)$ $v_I'(t) = \frac{39}{125} \cdot \cos\left(\frac{13}{25}t\right)$ $v_I''(t) = -\frac{507}{3\,125} \cdot \sin\left(\frac{13}{25}t\right)$ Notwendige Bedingung: $v_I'(t) = 0$ $0 = \frac{39}{125} \cdot \cos\left(\frac{13}{25}t\right) \Rightarrow t_{e1} \approx 3{,}02$ und $t_{e2} \approx 9{,}06$ Hinreichende Bedingung: $v_I'(t_e) = 0 \wedge v_I''(t_e) \neq 0$ $v''(t_{e1}) < 0 \Rightarrow\ t_{e1} \approx 3{,}02$ ist die Stelle eines Hochpunktes. $v''(t_{e2}) > 0 \Rightarrow\ t_{e2} \approx 9{,}06$ ist die Stelle eines Tiefpunktes. $v(t_{e1}) = 0{,}6$ Also ist nach v_I ca. 03:01 Uhr der Zeitpunkt der größten Strömungsgeschwindigkeit mit $0{,}6\ \frac{m}{s}$ in Richtung Küste (Flut). Analog für v_{II} $v_{II}(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{18}{125}t^2 + \frac{29}{50}t$ $v_{II}'(t) = \frac{3}{125}t^2 - \frac{36}{125}t + \frac{29}{50}$ $v_{II}''(t) = \frac{6}{125}t - \frac{36}{125}$ $v_{II}'(t) = 0$ $0 = \frac{3}{125}t^2 - \frac{36}{125}t + \frac{29}{50} \Rightarrow t_{e1} \approx 2{,}56 \vee t_{e2} \approx 9{,}44$ $v_{II}''(t_{e1}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $t_{e1} \approx 2{,}56$ *Fortsetzung nächste Seite*	8

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3c		$v_{II}''(t_{e2}) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt bei $t_{e1} \approx 9{,}44$ $v_{II}(2{,}56) \approx 0{,}68$ Also ist nach v_{II} ca. 02:34 Uhr der Zeitpunkt der größten Strömungsgeschwindigkeit mit 0,68 $\frac{m}{s}$ in Richtung Küste (Flut).	
	vergleicht die Ergebnisse miteinander.	Im Vergleich der beiden Funktionen ist die Flut bei v_{II} eine halbe Stunde früher als bei v_I und bei v_{II} mit 0,68 $\frac{m}{s}$ auch stärker als bei v_I mit nur 0,6 $\frac{m}{s}$.	
3d	interpretiert den formalen Ausdruck s im Sachzusammenhang.	Die Größe der Fläche zwischen dem Graph v_B und der Abszissenachse entspricht der zurückgelegten Strecke der Boje. Im Zeitraum von 0 bis 7,5 Stunden ist der Wert des Integrals positiv: die Boje bewegt sich in Richtung Küste. Im Zeitraum von 7,5 bis 12 Stunden ist der Wert des Integrals negativ: die Boje bewegt sich von der Küste weg. Durch die Betragsstriche um das zweite Integral wird der Wert dieses Integral positiv. Die Summe beider Integrale beschreibt die insgesamt zurückgelegte Strecke beider Richtungen. Die Einheit für die Integrale ist $\frac{m}{s} \cdot h$. Ersetzt man Stunde durch 3 600 Sekunden erhält man: 3 600 m. Dies erklärt den Faktor 3 600 und ist damit die Einheit des in beide Richtungen zurückgelegten Weges s in Metern.	4
3e	bestimmt die Größe der Fläche zwischen den Graphen v_B und v_{II} im Intervall $0 \leq t \leq 6$ und	Die Fläche ist formal: $\int_0^6 \left(v_B(t) - v_{II}(t)\right) dt = \frac{54}{25}\left[\frac{m}{s} \cdot h\right]$ $\frac{54}{25}\frac{m}{s} \cdot h \cdot 3\,600\ \frac{s}{h} = 7\,776\ m = 7{,}776\ km.$	6
	interpretiert die Bedeutung dieser Fläche im Sachzusammenhang. .	Da die Bojengeschwindigkeit über Grund bis $t = 6$ über der Wassergeschwindigkeit liegt, muss der Wind die Boje zusätzlich Richtung Küste antreiben. Die Differenz der Funktionswerte ist also die zusätzliche Vortriebsgeschwindigkeit durch den Wind. Die eingeschlossene Fläche beschreibt somit den sich durch den Wind ergebenden Weg Richtung Küste.	
3f	begründet, dass für den Parameter a die Einschränkung $0 < a \leq 1$ gelten muss.	Für den Parameter a muss $0 < a \leq 1$ gelten, da sich nur ein gewisser Prozentsatz der Windgeschwindigkeit auch in eine „Bojen-Vortriebsgeschwindigkeit“ umsetzt. Der Parameter a ist positiv, die Parabel ist somit nach unten geöffnet und hat die Nullstellen $t_1 = 0$ und $t_2 = 10$, also dazwischen „positive“ Windgeschwindigkeiten. Dies würde zu dem zusätzlichen Bojen-Vortrieb Richtung Küste (siehe Aufgabe 3e) passen, entspricht also auflandigem Wind.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
3g	zeichnet den Graphen der Funktion $w_{0,05}$ zusätzlich in das Koordinatensystem (Abb. 3.4) ein.		4
3h	erläutert den Zusammenhang der Funktion $w_{0,05}$ mit den beiden anderen Graphen und weist rechnerisch nach, dass der Parameter a hier genau den Wert $a = 0{,}05$ haben muss.	Anhand der Graphik ist erkennbar, dass die gestrichelt dargestellte Funktion $w_{0,05}$ die Differenzenfunktion von $(v_B - v_{II})$ ist, also der Zusatzvortrieb des Windes (siehe Aufgabe 3f). Bildet man die Differenzenfunktion: $d(t) = \left(v_B(t) - v_{II}(t)\right)$ $d(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{41}{250}t^2 + \frac{39}{50}t - \left(\frac{1}{125}t^3 - \frac{18}{125}t^2 + \frac{29}{50}t\right)$ $d(t) = -\frac{1}{50}t^2 + \frac{1}{5}t = \frac{1}{20} \cdot \left(-\frac{2}{5}t^2 + 4t\right) = 0{,}05 \cdot (-0{,}4t^2 + 4t)$ und vergleicht mit $w_a(t) = a \cdot (-0{,}4t^2 + 4t)$: $d(t) = w_a(t)$ $0{,}05 \cdot (-0{,}4t^2 + 4t) \;=\; a \cdot (-0{,}4t^2 + 4t)$ ergibt dies: $a = \frac{1}{20} = 0{,}05.$ Der Parameter a muss folglich den Wert $a = 0{,}05$ haben.	5
			40

Aufgabe 3: Gläserproduktion

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt den Kurvenverlauf im Sachzusammenhang anhand von drei Aspekten.	Unabhängig von der Produktionsmenge fallen immer 6 000,00 € Fixkosten bei der Produktion der Sektgläser an. Mit steigender Produktionsmenge steigen die Kosten streng monoton immer weiter an. Bis ca. 18 000 Gläser nimmt die Höhe der zusätzlichen Kosten dabei ab, über 18 000 Gläser steigt die Höhe der zusätzlichen Kosten dabei immer weiter an.	3
3b	ermittelt die kurz- und langfristigen Preisuntergrenzen.	Langfristige Preisuntergrenze: $K(27{,}78) \approx 9\,896{,}54$ Wenn bei $x_l \approx 27{,}78$ Gesamtkosten von ca. 9 896,54 € anfallen, dann betragen die minimalen Stückkosten $\frac{9\,896{,}54}{27\,780} \approx$ 0,36 [€ pro Stück]. Unter diesen Preis darf der Marktpreis langfristig nicht fallen, wenn das Unternehmen ohne Verlust produzieren will. Das Minimum der variablen Stückkosten liegt an der Stelle $x_m = 20$. $k_v(20) = 110$ Daher darf der Preis für die Sektgläser kurzfristig nicht unter $\frac{110}{1\,000} = 0{,}11$ [€ pro Stück] fallen.	6
3c	zeigt, dass der Volkswirt Recht hat.	Die notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum lautet: $G'(x) = 0$. Wendet man die Summenregel auf die Ableitung der Gewinnfunktion an, erhält man: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$. Aus der Bedingung: $G'(x^*) = 0$, folgt $0 = E'(x^*) - K'(x^*) \quad \vert + K'(x^*)$ $E'(x^*) = K'(x^*)$.	3
3d	ermittelt und interpretiert den Ausdruck $K'(10)$.	$K'(x) = 1{,}5x^2 - 40x + 310$ $K'(10) = 60$ Der formale Ausdruck $K'(10)$ gibt die Grenzkosten bei einer produzierten Menge von 10 000 Gläsern an, das heißt, die Kosten der Gläserproduktion würden für die nächsten 1 000 Gläser um 60,00 € zunehmen, wenn die Grenzkosten, die bei exakt 10 000 Gläsern gelten, für weitere 1 000 Gläser konstant bleiben würden.	3
3e	erläutert, warum mit der Gleichung nicht die gewinnmaximale Menge ermittelt werden kann, verändert die Gleichung und ermittelt die gewinnmaximale Menge.	Der Preis von 0,80 € pro Stück gilt nur für ein Glas, der Grenzerlös von 0,80 € pro Stück würde also nur für ein zusätzliches Glas gelten. Die Grenzkosten gelten jedoch gemäß Variablendefinition immer für 1 000 Gläser, daher muss der Preis für ein Glas noch mit dem Faktor 1 000 multipliziert werden. $800 = K'(x^*)$ $800 = 1{,}5x^2 - 40x + 310$ $\Rightarrow x_1 \approx 35{,}793 \quad \wedge \quad x_2 \approx -9{,}13 \notin D_K$ *Fortsetzung nächste Seite*	4

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 3e</td><td></td><td>Zeichnet man z. B. die Erlösfunktion $E(x) = 800x$ in das Koordinatensystem ein, wird deutlich, dass an der Stelle x_1 aufgrund des maximalen Abstandes zwischen Kosten und Erlösen das Gewinnmaximum liegt. Die gewinnmaximale Menge liegt somit bei ca. 35 793 Stück.</td><td></td></tr>
<tr><td>3f</td><td>entscheidet begründet, für welche Werte des Parameters a die Aussage der Controllingabteilung zutreffen würde.</td><td>Der Graph der Funktion K_a soll
(i) s-förmig und
(ii) streng monoton steigend verlaufen.
(i) Er benötigt im Definitionsbereich einen Wendepunkt mit positiver Tangentensteigung.
Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle lautet: $K''_a(x) = 0$
$K''_a(x) = 3x - 2a$
$0 = 3x_W - 2a \quad \Leftrightarrow \quad x_W = \frac{2}{3}a$
Unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs $D(K_a)=[0; 36]$ ergibt sich dann für a: $0 < a < 54$, da der Wendepunkt für einen s-förmigen Verlauf nicht auf den Grenzen des Definitionsbereiches liegen darf.
Die Absicherung der positiven Wendetangente wird durch die zweite Bedingung gewährleistet.
(ii) Der Graph der Funktion soll streng monoton steigend verlaufen.
Das heißt: $K'_a(x) > 0$ für alle x
$K'_a(x) = 1{,}5x^2 - 2ax + 310$
Für $K'_a(x) = 0$ gilt:
$x_{1,2} = \frac{2a}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{-2a}{3}\right)^2 - \frac{620}{3}}$
Ist die Diskriminante hier negativ, gibt es keine Lösung.
Dies gilt für: $\left(\frac{-2a}{3}\right)^2 < \frac{620}{3}$.
Für $a > 0$ folgt daraus:
$a < \sqrt{465} \approx 21{,}56$.
Fazit: Für alle a größer Null und kleiner als ca. 21,56 ist ein streng monoton steigender s-förmiger Kurvenverlauf gesichert.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3g</td><td>ermittelt die Höhe der Markierung für den Eichstrich.</td><td>$f(x) = 3{,}5 - 3{,}5e^{-0{,}35x}$
$V(h) = \pi \cdot \int_0^h \left(f(x)\right)^2 dx$
$V(h) = 150 \quad \Leftrightarrow 150 = \pi \cdot \int_0^h \left(f(x)\right)^2 dx \ \Rightarrow h \approx 7{,}82$
Zuzüglich der Stiellänge von 12 cm beträgt die Höhe der Markierung des Eichstriches auf dem Glas somit ca. 19,82 cm.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3h</td><td>beurteilt anhand der Graphik, inwieweit die Funktionsgleichung geeignet erscheint und</td><td>Aus der Graphik können die folgenden Punkte näherungsweise abgelesen werden:
<table>
<tr><th>x</th><th>p(x)</th></tr>
<tr><td>2 500</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5 000</td><td>8</td></tr>
<tr><td>7 500</td><td>6</td></tr>
<tr><td>10 000</td><td>5</td></tr>
<tr><td>20 000</td><td>4</td></tr>
<tr><td>45 000</td><td>3</td></tr>
<tr><td>60 000</td><td>2</td></tr>
</table>
<i>Fortsetzung nächste Seite</i></td><td>6</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3h		Der eingezeichnete Graph ist grundsätzlich geeignet, den Sachzusammenhang zu beschreiben, da die Preise mit steigender Absatzmenge abnehmen, diese Abnahmen sich jedoch verringern, somit sollte eine geeignete Kurve konvex sein, welches für den Graphen von p gilt. Die scheinbar durch Kleinstquadratregression ermittelte Funktionsgleichung erzeugt jedoch teilweise Funktionswerte, die von den realen Punkten stärker abweichen. Dennoch ist sie mit Einschränkungen geeignet.	
	gibt eine weitere mögliche Funktionsgleichung an und begründet, ob er diese für geeignet hält.	Eine weitere gut geeignete Möglichkeit wäre die Annäherung durch Regression mittels einer ganzrationalen Funktion, zum Beispiel: $\hat{p}(x) = -1{,}883 \cdot 10^{-13} \cdot x^3 + 2{,}118 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 - 0{,}00075x + 11{,}16$ Diese Funktion hat zwar einen hohen Korrelationskoeffizienten von $r \approx 0{,}98$, was aufzeigt, dass die geschätzten Funktionswerte nur wenig von den realen Werten der Punkte abweichen, zeigt jedoch im Definitionsbereich auch konkave Abschnitte auf, die im Sachkontext vielleicht kausal nicht so leicht erklärbar sind, so dass diese Schätzerfunktion den Zusammenhang nicht zwingend besser beschreibt. Es wäre auch möglich, die Parabel einer quadratischen Funktion so in die Punktwolke zu legen, dass z.B. der erste Punkt durchlaufen wird und der letzte als Tiefpunkt verwendet wird.	
3i	ermittelt die erlösmaximale Menge,	$E_{\text{farb}}'(x) = (7{,}92 - 0{,}0001584x) \cdot e^{-0{,}00002x}$ erlösmaximale Menge: $E_{\text{farb}}'(x) = 0 \ \wedge E_{\text{farb}}''(x^*) < 0$ $E_{\text{farb}}'(x) = 0 \ \Rightarrow x^* \approx 50\,000$ $E_{\text{farb}}''(50\,000) < 0$	6
	den erlösmaximalen Preis sowie	Erlösmaximaler Preis: $p(50\,000) \approx 2{,}91$.	
	den Gesamterlös.	Maximaler Gesamterlös: $E_{\text{farb}}(50\,000) = \int_0^{50\,000} (7{,}92 - 0{,}0001584x) \cdot e^{-0{,}00002x} dx$ $E_{\text{farb}}(50\,000) \approx 145\,680$ Bei einer Absatzmenge von ca. 50 000 Gläsern zu einem Preis von 2,91 Euro pro Stück würde der maximale Erlös von ca. 145 680,00 € erzielt werden.	
			40