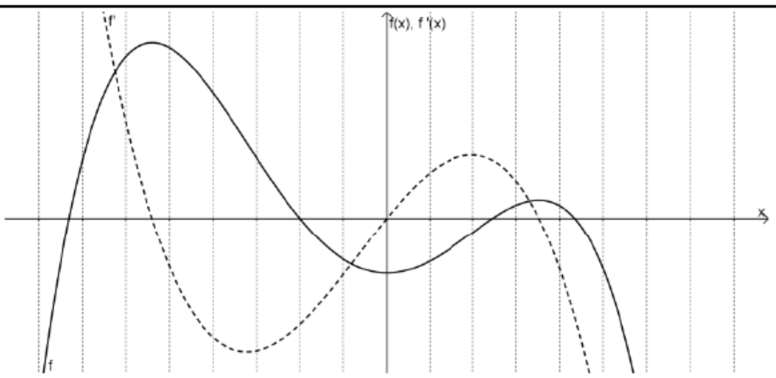
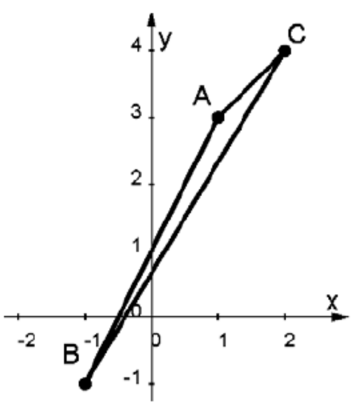
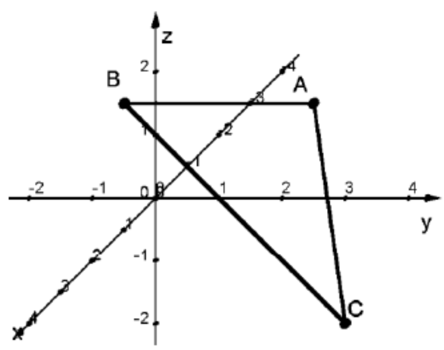
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	berechnet die Nullstellen,	Notw. Bedingung: $f(x) = 0$ $-2x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x^2 + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-2x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$	5
	bestimmt a mit $0 \leq a \leq 1$ so, dass folgende Gleichung gilt: $\int_0^a f(x)dx = 0{,}5$, und	$\int_0^a (-2x^3 + 2x)dx = 0{,}5$ $\left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}a^4 + a^2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow a_1 = 1$ oder $a_2 = -1$ Da $0 \leq a \leq 1$ gelten soll, ist $a = 1$ die gesuchte Größe.	
	beurteilt ohne Rechnung, ob die Ungleichung gilt.	Die Funktion f ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Von -1 bis 0 verläuft die Funktion unterhalb der Abszissenachse und das Integral hat einen negativen Wert. Von 0 bis 1 verläuft die Funktion über der Abszissenachse und das Integral hat einen positiven Wert. Diese beiden orientierten Flächeninhalte sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung gleich groß und heben sich auf. Ab $x = 1$ sind die Funktionswerte nur noch negativ und die Fläche zwischen Graph und Abszissenachse negativ orientiert. Daher ist das Integral der Funktion f von -1 bis 2 kleiner als null.	
1b	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	(siehe Tabelle unten)	5

	wahr	falsch
Es gilt immer: $f(c) = 0$		x
Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt $\|a\|$.		x
Für $\|d\| \leq \|a\|$ besitzt der Graph von f unendlich viele Nullstellen.	x	
Der Graph von f ist immer punktsymmetrisch zum Ursprung.		x
$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.	x	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1c	ordnet begründet den richtigen Graphen zu, gibt die Funktionsgleichung von g an und leitet die 1. Ableitung her.	f_2 ist von den drei zur Auswahl stehenden Graphen von natürlichen Exponentialfunktionen der richtige Graph. Die Punktprobe zeigt, dass die Punkte P_1 und P_3 nicht auf dem Graphen der gegebenen Funktion f liegen, aber der Punkt P_2. Es gilt: $f_2(2) = 0{,}5 \cdot e^{2\cdot 2-4} = 0{,}5$ $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-4}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ Zwischenschritte sind erforderlich: $k'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2x \cdot e^{x} + \frac{1}{2}\cdot x^2 \cdot e^{x}}_{\text{Produktregel}}$ $= e^{x}\cdot\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$	5
1d	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3 und beurteilt die Aussage.	 Die Stammfunktion F ist eine Funktion 5. Grades, daher hat die Stammfunktion mindestens eine Nullstelle. Aufgrund der drei Extremstellen des Graphen der Funktion f besitzt die Stammfunktion genau drei Wendepunkte. Die Aussage ist also richtig.	5
1e	gibt die ganzzahligen Koordinaten der Punkte A, B und C an und zeichnet die Ansichten des Dreieckes ABC in die Koordinatensysteme.	A(1|3|2); B(-1|-1|1); C(2|4|-1) 	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1f</td><td>gibt eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>

$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Der Punkt $A(k \mid -\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}k)$ liegt für jedes $k \in \mathbb{R}$ in der Ebene E.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Gerade g mit $g\colon \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zur Ebene E.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{4}{3}t \\ -2t \end{pmatrix}$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Normalenvektor der Ebene E.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>prüft, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind und

begründet, warum die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für kein t kollinear sein können und

berechnet $t \in \mathbb{R}$ so, dass $|\vec{c}| = 7$ gilt.</td><td>

Zu prüfen ist, ob der Vektor $\vec{b}$ ein Vielfaches von Vektor $\vec{a}$ ist:

$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Gleichung der x-Koordinate $(4 = s \cdot (-2))$ ist für $s = -2$ erfüllt. In der Gleichung der y-Koordinate $(-3 = s \cdot 1)$ führt $s = -2$ zu einem Widerspruch, die Vektoren sind also nicht kollinear.

Die x-Koordinate und die y-Koordinate des Vektors $\vec{b}$ haben unterschiedliche Vorzeichen. Da im Vektor $\vec{c}$ die x-Koordinate und die y-Koordinate das gleiche Vorzeichen haben, kann es kein t geben, für das gilt:

$\vec{c} = s \cdot \vec{b}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Es gilt:

$\sqrt{t^2 + (2 \cdot t)^2 + 2^2} = 7$

$t^2 + 4 \cdot t^2 + 4 = 49$

$5 \cdot t^2 = 45$

$t_1 = 3 \wedge t_2 = -3$

Für $t = 3$ oder $t = -3$ gilt: $|\vec{c}| = 7$.

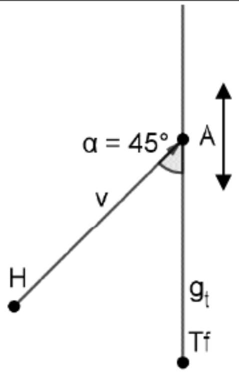
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1h	bestimmt den Parameter r so, dass der Vektor $\vec{v}$ orthogonal zum Vektor $\vec{a}$ ist.	$\vec{v} = r \cdot \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} r+2 \\ -2 \cdot r + 3 \\ 3 \cdot r + 6 \end{pmatrix}$ Damit $\vec{v}$ orthogonal zu $\vec{a}$ ist, muss gelten: $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ $r + 2 + (-2) \cdot (-2 \cdot r + 3) + 3 \cdot (3 \cdot r + 6) = 0$ $14 \cdot r + 14 = 0$ $r = -1$ Für $r = -1$ ist $\vec{v}$ orthogonal zu $\vec{a}$.	5
			40

Aufgabe 2: Seilbahn

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	leitet die Geradengleichung her und gibt den Definitionsbereich des Parameters t an.	Der Stützvektor der Geraden ist der Ortsvektor von Punkt A. Der Richtungsvektor der Geraden ist der Verbindungsvektor von Punkt A zu Punkt B: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 78 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}$. Deswegen lautet die Geradengleichung: $g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}$. $t \in [0; 1]$.	4
2b	weist nach, dass die Steigung von 40 % nicht überschritten wird, zeigt, dass die zurückzulegende Strecke ca. 400 m beträgt und berechnet die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde, mit der sich die Seilbahn bewegen muss.	Gesucht ist die Steigung zwischen dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und der Projektion $\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der x-y-Ebene: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}$ $\alpha \approx 10{,}48\,°$ Für die Steigung gilt: $\tan(10{,}48) \approx 0{,}185$ Die maximale Steigung wird mit ca. 18,5 % deutlich unterschritten. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\| \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-60)^2 + (-390)^2 + 73^2} \approx 401{,}28$ Die zurückzulegende Strecke beträgt ca. 400 m. $\frac{400}{5} = 80$ Die Bahn müsste mindestens mit einer Geschwindigkeit von ca. $80\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$ fahren, das entspricht $4{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2c	beurteilt, ob der Granitfelsen beim Verlegen der Versorgungsleitung im Weg sein wird und untersucht, ob die von der Gemeinde zur Verfügung gestellte Summe ausreicht, um die entstehenden Kosten zu tragen.	Die x-Koordinate des Felsens ist in x-Achsenrichtung näher am Ursprung als die x-Koordinate der Bergstation. Die y-Koordinate des Felsens ist in y-Achsenrichtung näher am Ursprung als die y-Koordinate der Bergstation. Dementsprechend liegt der Granitfelsen „hinter" der Bergstation und stellt kein Problem dar, wenn die Versorgungsleitung vom Punkt E in Richtung der Bergstation verlegt wird. Gesucht ist zunächst der kürzeste Abstand vom Punkt B_F zur Berghanggeraden g_{HK}: Für den Verbindungsvektor eines Punktes X der Geraden g_{HK} zum Punkt B_F gilt: $\overrightarrow{XB_F} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 73 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -250 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -220 \\ 30 \\ 73 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -250 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$. Im Falle des kürzesten Abstandes ist der Vektor $\overrightarrow{XB_F}$ orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g_{HK}: $\left[\begin{pmatrix} -220 \\ 30 \\ 73 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -250 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -250 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $-250(-220 + 250r) + 200(30 - 200r) = 0 \Rightarrow r = \frac{122}{205}$. Mit $r = \frac{122}{205}$ ergibt sich der Anfangspunkt E der Versorgungsleitung $E\left(\frac{4\,150}{41} \middle\vert \frac{4\,880}{41} \middle\vert 0\right)$. $\left\vert\overrightarrow{B_FE}\right\vert \approx 135{,}38$ Als kürzester Abstand ergibt sich eine Strecke von ca. 135,38 m. $\left\vert\overrightarrow{B_FE}\right\vert \cdot 45 \approx 6\,091{,}90$ Die Kosten betragen ca. 6 091,90 EUR, demnach wird die Summe der Gemeinde knapp nicht ausreichen.	6
2d	weist nach, dass der Berghang durch einen Ausschnitt der Ebene E_W modelliert werden kann und	Einsetzen des x-Achsenschnittpunktes $P_x(250 \mid 0 \mid 0)$ in die Ebenengleichung E_W: $4 \cdot 250 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 1\,000$ $1\,000 = 1\,000$ Einsetzen des y-Achsenschnittpunktes $P_y(0 \mid 200 \mid 0)$ in die Ebenengleichung E_W: $4 \cdot 0 + 5 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 1\,000$ $1\,000 = 1\,000$ Einsetzen des z-Achsenschnittpunktes $P_z(0 \mid 0 \mid 100)$ in die Ebenengleichung E_W: $4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 10 \cdot 100 = 1\,000$ $1\,000 = 1\,000$ Alle drei Punkte liegen in der Ebene E_W, somit kann der Berghang mit einem Ausschnitt der Ebene E_W modelliert werden. *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2d	bestimmt, aus welcher lotrechten Höhe über dem Berghang die Fahrgäste abgeseilt werden müssen.	Für den Punkt S der Seilbahn nach 20 % der Fahrzeit von Punkt B aus kommend gilt aufgrund der konstanten Geschwindigkeit: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 78 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 390 \\ -73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 108 \\ 63{,}4 \end{pmatrix}$. Da sich der Notausstieg vier Meter unterhalb des Tragseils befindet, müssen die Fahrgäste vom Punkt G(42 |108 | 59,4) aus gerettet werden. Die Höhe des Hanges lotrecht unter der Gondel ergibt sich durch Einsetzen der x- und y-Koordinate des Punktes G in die Ebenengleichung E_w. $4 \cdot 42 + 5 \cdot 108 + 10 \cdot z = 1\,000 \Leftrightarrow z = 29{,}2$ Der vertikale Abstand der Gondel zum Hang beträgt also $59{,}4 - 29{,}2 = 30{,}2$ Demnach müssten die Touristen aus einer Höhe von 30,2 m über dem Berghang gerettet werden.	
2e	erläutert anhand einer eigenen Skizze ein mögliches Vorgehen zur Bestimmung der Höhe, in der das Stahlseil an der Tanne angebracht werden muss.	 Zunächst wird die Tanne als Teil einer Geradengleichung g_t mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Anschließend wird ein Verbindungsvektor $\vec{v}$ vom Punkt H zu einem Punkt A auf der Geraden g_t gebildet. Durch das Umstellen der Gleichung $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}$ wird der Winkel in Abhängigkeit zum Punkt auf der Geraden g_t dargestellt. Wird der Winkel mit 45 ° eingesetzt und die Gleichung umgestellt, so ergibt sich der Parameter, der multipliziert mit dem Richtungsvektor der Geraden g_t die Höhe ergibt, an der das Seil angebracht werden muss.	4
2f	gibt das Ergebnis des Ausdrucks an und erläutert, was mit diesem Ausdruck im Sachzusammenhang berechnet wurde.	$\alpha \approx 65{,}1\,°$ Mit dem Ausdruck wird der kleinere Winkel ($0\,° \leq \alpha \leq 90\,°$) zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnet. Dabei ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene, in der der Berghang liegt und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der x-z-Ebene, in der die Felswand liegt. Somit entspricht das Ergebnis dem (kleineren) Schnittwinkel zwischen dem Berghang und der Felswand.	3

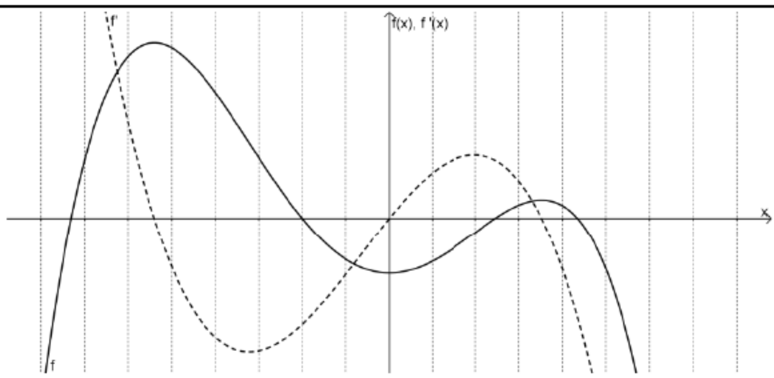
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2g	prüft, ob der Vorsprung auch nach der Fertigstellung der Seilbahn weiterhin von den Fallschirmspringern genutzt werden kann.	Die Flugbahn der Fallschirmspringer kann durch einen Teil der Geraden g_f modelliert werden. Der Ortsvektor entspricht dem Vorsprung an der Felswand. Der Richtungsvektor berücksichtigt je Meter Sinkflug (z-Koordinate hat den Wert -1) zwei Meter Horizontalflug – also das für die Abstandsmessung ungünstigere Gleitverhältnis. $g_f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0{,}5 \\ 200 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Für den Verbindungsvektor eines Punktes der Geraden g_f (Flugbahn des Fallschirmspringers) und eines Punktes der Geraden g_s (Seil der Seilbahn) gilt: $\overrightarrow{P_fP_s} = \begin{pmatrix} -60 \cdot t + 60 \\ -390 \cdot t - 2 \cdot k + 419{,}5 \\ 73 \cdot t + k - 195 \end{pmatrix}$ Im Falle des kürzesten Abstandes ist der Vektor $\overrightarrow{P_fP_s}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren der beiden Geraden. $\overrightarrow{P_fP_s} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix} = 0$ $\overrightarrow{P_fP_s} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ Das ist für $t \approx 0{,}325$ und $k \approx 151{,}358$ erfüllt. Der gesuchte Abstand zwischen den Punkten P_f und P_s entspricht der Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{P_sP_f}$. $\left\lvert \overrightarrow{P_fP_s} \right\rvert \approx 46{,}22$ Der minimale Abstand beträgt ca. 46,22 m. Der Vorsprung darf also nach dem Bau der Seilbahn nicht mehr genutzt werden.	6
2h	bestimmt die Gleichung einer Funktion, mit der der parabelförmige Verlauf des Tragseils modelliert werden kann und	Gesucht ist eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Durch das folgende Gleichungssystem können die Unbekannten bestimmt werden: $f(0) = 78$ $f(393{,}3) = 5$ $f'(393{,}3) = 0$ Daraus ergibt sich $a = \frac{7\,300}{15\,468\,489}, b = -\frac{1\,460}{3\,933}$ und $c = 78$ und somit die Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{7\,300}{15\,468\,489} \cdot x^2 - \frac{1\,460}{3\,933} \cdot x + 78$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2h	erläutert, warum sich aus $\lvert\overline{CD}\rvert = 400$ der Definitionsbereich $D(f) = [0; 393{,}3]$ ergibt, und	Die Länge des (geradlinigen) Seils beträgt ca. 400 m und der Höhenunterschied der Stationen beträgt 73 m. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich der horizontale Abstand der Stationen: $d = \sqrt{400^2 - 73^2}$ $d \approx 393{,}3$ Im neuen Koordinatensystem entspricht diese Entfernung dem Definitionsbereich.	
	untersucht, ob die gewünschte maximale Steigung von 40 % auch mit dem neu modellierten Verlauf der Seilbahn eingehalten wird.	Aus der Graphik ist erkennbar, dass die maximale Steigung des Graphen von f im Punkt $C(0\|78)$ erreicht wird: $f'(0) \approx -0{,}37$ Der Betrag der Steigung beträgt ca. 37 %, das heißt, dass die gewünschte maximale Steigung eingehalten wird.	
			40

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	berechnet die Nullstellen,	Notw. Bedingung: $f(x) = 0$ $-2x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x^2 + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-2x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$	5
	bestimmt a mit $0 \leq a \leq 1$ so, dass folgende Gleichung gilt: $\int_0^a f(x)dx = 0{,}5$, und	$\int_0^a (-2x^3 + 2x)dx = 0{,}5$ $\left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}a^4 + a^2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow a_1 = 1$ oder $a_2 = -1$ Da $0 \leq a \leq 1$ gelten soll, ist $a = 1$ die gesuchte Größe.	
	beurteilt ohne Rechnung, ob die Ungleichung gilt.	Die Funktion f ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Von -1 bis 0 verläuft die Funktion unterhalb der Abszissenachse und das Integral hat einen negativen Wert. Von 0 bis 1 verläuft die Funktion über der Abszissenachse und das Integral hat einen positiven Wert. Diese beiden orientierten Flächeninhalte sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung gleich groß und heben sich auf. Ab $x = 1$ sind die Funktionswerte nur noch negativ und die Fläche zwischen Graph und Abszissenachse negativ orientiert. Daher ist das Integral der Funktion f von -1 bis 2 kleiner als null.	
1b	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	siehe Tabelle unten	5

	wahr	falsch
Es gilt immer: $f(c) = 0$		x
Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt $\lvert a\rvert$.		x
Für $\lvert d\rvert \leq \lvert a\rvert$ besitzt der Graph von f unendlich viele Nullstellen.	x	
Der Graph von f ist immer punktsymmetrisch zum Ursprung.		x
$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.	x	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1c	ordnet begründet den richtigen Graphen zu, gibt die Funktionsgleichung von g an und leitet die 1. Ableitung her.	f_2 ist von den drei zur Auswahl stehenden Graphen von natürlichen Exponentialfunktionen der richtige Graph. Die Punktprobe zeigt, dass die Punkte P_1 und P_3 nicht auf dem Graphen der gegebenen Funktion f liegen, aber der Punkt P_2. Es gilt: $f_2(2) = 0{,}5 \cdot e^{2 \cdot 2 - 4} = 0{,}5$ $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-4}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ Zwischenschritte sind erforderlich: $k'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^x}_{\text{Produktregel}}$ $= e^x \cdot \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$	5
1d	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3 und beurteilt die Aussage.	 Die Stammfunktion F ist eine Funktion 5. Grades, daher hat die Stammfunktion mindestens eine Nullstelle. Aufgrund der drei Extremstellen des Graphen der Funktion f besitzt die Stammfunktion genau drei Wendepunkte. Die Aussage ist also richtig.	5
1e	gibt für das Gleichungssystem eine Matrizen-Gleichung an, berechnet die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter r.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & r+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{llllll} & \text{I} & x & -y & & = -1 \\ & \text{II} & x & +y & -4z & = 7 \\ & \text{III} & x & -3y & +(r+4)z & = -7 \\ \hline \text{I} - \text{II} & \text{IV} & & -2y & +4z & = -8 \\ \text{I} - \text{III} & \text{V} & & 2y & -(r+4)z & = 6 \\ \hline \text{IV} + \text{V} & \text{VI} & & & +4z - (r+4)z & = -2 \end{array}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1e		Fallunterscheidung: __1. Fall $r = 0$:__ $-rz = -2$ $0 = -2$ Widerspruch $\Rightarrow L = \{\ \}$ __2. Fall $r \neq 0$:__ IV + V VI $+4z-(r+4)z = -2 \quad \Leftrightarrow z = \frac{2}{r}$ z in IV $-2y + 4\frac{2}{r} = -8 \quad \Leftrightarrow y = 4 + \frac{4}{r}$ y in I $x - 4 - \frac{4}{r} = -1 \quad \Leftrightarrow x = 3 + \frac{4}{r}$ $L = \left\{\left(3+\frac{4}{r}, 4+\frac{4}{r}, \frac{2}{r}\right)\right\}$	
1f	berechnet m_{11} so, dass die folgende Gleichung gilt: $M \cdot L = L \cdot M$ und ermittelt die Elemente der Matrix X.	$M \cdot L$ $= \begin{pmatrix} m_{11} & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_{11}-28 & 7m_{11}-8 \\ 13 & -22 \end{pmatrix}$ $L \cdot M$ $= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_{11}-28 & 13 \\ 7m_{11}-8 & -22 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2m_{11}-28 & 7m_{11}-8 \\ 13 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_{11}-28 & 13 \\ 7m_{11}-8 & -22 \end{pmatrix}$ I $2m_{11}-28 = 2m_{11}-28$ wahre Aussage II $7m_{11}-8 = 13 \quad \Leftrightarrow m_{11} = 3$ III $13 = 7m_{11}-8 \quad \Leftrightarrow m_{11} = 3$ IV $-22 = -22$ wahre Aussage $2 \cdot A \cdot B^3 - A^T + X = C$ $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0{,}5 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0{,}5 & a_{22} \end{pmatrix}^T + X = \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ 2 & c_{22} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \cdot a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ 2 & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ 2 & c_{22} \end{pmatrix} = -X$ $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & c_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = X$	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1g</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>wahr</td><td>falsch</td></tr>
<tr><td>Durch Addition einer 2 x 4-Matrix mit einer 4 x 3-Matrix ergibt sich eine 2 x 3-Matrix.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Sind die Matrizen A und B invertierbar und vom gleichen Typ, dann ist $A \cdot (B^{-1})^{-1}$ definiert.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Für die Multiplikation einer quadratischen Matrix D mit der Einheitsmatrix E und einem Skalar a gilt: $D \cdot E \cdot a = a \cdot D$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Sind zwei invertierbare Matrizen A und B vom gleichen Typ, dann gilt:
$A + B = B + A \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Ist G eine 2 x 2–Grenzmatrix einer Verteilung und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Fixvektor dieser Verteilung, dann gilt:
$$G = \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y} & \frac{x}{x+y} \\ \frac{y}{x+y} & \frac{y}{x+y} \end{pmatrix}$$</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>zeigt, dass eine Lösung für $x + y = 1$ existiert und

erläutert die Bedeutung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.</td><td>
$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gleichungssystem:
$0{,}5x + 0{,}75y = x$
$0{,}5x + 0{,}25y = y$

Daraus folgt:
$0{,}5x = 0{,}75y$

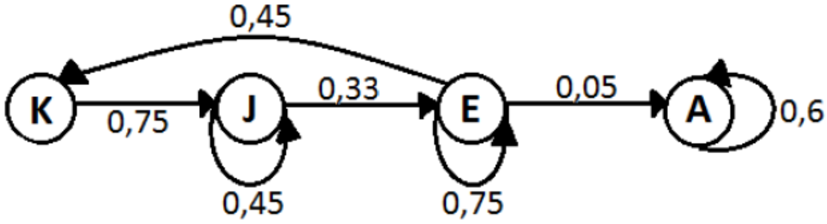
Zusätzliche Bedingung:
$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$

Einsetzen und auflösen nach x:
$0{,}5x = 0{,}75\,(1 - x) \quad \Leftrightarrow x = 0{,}6$

Berechnung von y:
$0{,}6 + y = 1 \quad \Leftrightarrow y = 0{,}4$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist die stabile Verteilung für diesen Übergangsprozess.
</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Schweinswale

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	stellt das Wechselverhalten durch einen geeigneten Graphen dar,		5
	beurteilt die drei Aussagen der Schülerin.	„Nur die erwachsenen Tiere (E) sind fortpflanzungsfähig." Alle Elemente in der ersten Zeile außer $m_{13} = 0{,}45$ betragen null. Damit führt bei einer Multiplikation mit einem Bestandsvektor nur dieses Element zu einer Zunahme beim Kälberbestand K. Die Aussage ist daher richtig. „Die Sterberate ist bei den Jungtieren (J) am höchsten." Sterberate bei J: $1 - (m_{22} + m_{32}) = 1 - (0{,}45 + 0{,}33) = 0{,}22$ Sterberate bei K: $1 - m_{21} = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ Sterberate bei E: $1 - (m_{33} + m_{43}) = 1 - (0{,}75 + 0{,}05) = 0{,}2$ Sterberate bei A: $1 - m_{44} = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ Die Aussage ist falsch, da z. B. die Kälber eine höhere Sterberate aufweisen als die Jungtiere. „Die Population wird in 20 Jahren vom Aussterben bedroht sein." $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(M^{20} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix} \right) \approx 194 > 30$ Somit ist die Aussage falsch.	
2b	zeigt, dass die von den Schülerinnen und Schülern erstellte Matrix M zu einer ähnlichen Prognose für das Jahr 2008 führt,	$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}45 & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix}$ $M^2 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_2 \approx \begin{pmatrix} 76 \\ 93 \\ 146 \\ 25 \end{pmatrix}$ Der Gesamtbestand für 2008 liegt mit ca. 340 Tieren zwischen 320 und 350 Tieren, die Matrix M liefert ähnliche Werte wie die Prognose der Experten.	4
	gibt s_{12} an und interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	$s_{12} = 0{,}1485$ (ergibt sich aus $m_{13} \cdot m_{32} = 0{,}45 \cdot 0{,}33$) Der Wert bedeutet, dass 14,85 % der Jungtiere des Jahres 2006 zwei Jahre später Nachkommen haben.	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2c	gibt an, unter welcher Voraussetzung der Rechenansatz des Schülers für die Rekonstruktion der Daten des Vorjahres verwendet werden kann und	Der Ansatz kann nur verwendet werden, wenn sich das Wechselverhalten nicht geändert hat.	6
	erläutert den Rechenansatz und	Durch die Multiplikation der Inversen der Übergangsmatrix mit dem Bestandsvektor aus 2006 wird ein Bestand für das Vorjahr 2005 rekonstruiert. Durch Multiplikation des Vektors $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ mit dem errechneten neuen Bestandsvektor werden die vier Bestandszahlen der Altersgruppen aufsummiert, also der Gesamtbestand zu Beginn des Jahres berechnet.	
	begründet anhand des Kälberbestands, dass das Ergebnis in diesem Fall nicht verwendet werden kann.	$M^{-1} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} -162 \\ 404 \\ 89 \\ 43 \end{pmatrix}$ Das Endergebnis von ca. 373 Tieren scheint im Sachzusammenhang zwar sinnvoll, jedoch kann kein negativer Kälberbestand existieren, wie er im Zwischenergebnis steht. Die Matrix ist für diese Berechnung nicht geeignet, da sich die Modellbedingungen massiv verändert haben müssen.	
2d	leitet die aufgrund des Erregerbefalls veränderten Elemente der Matrix M_{neu} her und	Der Ansatz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 140 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 83 \\ 138 \\ 19 \end{pmatrix}$ liefert $a \approx 0{,}23$ und $b \approx 0{,}54$ und damit $M_{neu} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0{,}54 & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.	5
	vergleicht den theoretischen Gesamtbestand ohne Erregerbefall von ca. 298 Tieren mit dem Gesamtbestand nach dem Erregerbefall zu Beginn des Jahres 2020.	Für den Gesamtbestand für 2020 mit Erregerbefall gilt: $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \cdot M_{neu}^2 \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ 83 \\ 138 \\ 19 \end{pmatrix} \approx 206$ Im Vergleich zu 298 Tieren ohne Erregerbefall liegt der Gesamtbestand mit Erregerbefall bei 206 Tieren und ist somit ca. 30 % niedriger.	

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>2e</td><td>ermittelt, ab welcher Anzahl eingewanderter erwachsener Tiere (E) nach diesem Modell der Gesamtbestand zu Beginn des Jahres 2020 bei über 300 Tieren liegen würde.</td><td>Der Bestand P_{2020} für 2020 berechnet sich mit x für eingewanderte erwachsene Tiere:
$$P_{2020} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot M_{neu} \cdot \left(M_{neu} \cdot \begin{pmatrix}32\\83\\138\\19\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\8\\x\\6\end{pmatrix} \right)$$
$$= \frac{103x}{100} + \frac{2\,175\,477}{10\,000}$$
$\frac{103x}{100} + \frac{2\,175\,477}{10\,000} > 300 \Leftrightarrow x > \frac{824523}{10300}$
Folglich liegt der Gesamtbestand in 2020 ab 81 eingewanderten erwachsenen Tieren bei über 300 Tieren.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2f</td><td>vervollständigt die Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle und

ermittelt, wie viele Metallblöcke M_3 für die Herstellung der 30 Pinger mindestens bestellt werden müssen.</td><td>Für die aus den Tabellen zu erstellenden Matrizen Q_{MZ}, Q_{ZB} und Q_{MB} gilt: $Q_{MZ} \cdot Q_{ZB} = Q_{MB}$
$$\begin{pmatrix}0 & b & d & 1\\a & 0 & 0 & e\\0 & c & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 3 & 5\\2 & 0 & 3\\0 & 4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b+2d & 3b+4 & 5b+3d+2\\2a & 2a+4e & a+2e\\c+2 & 3c & 5c+3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}b+2d & 3b+4 & 5b+3d+2\\2a & 2a+4e & a+2e\\c+2 & 3c & 5c+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\2 & 6 & 3\\4 & 6 & 13\end{pmatrix}$$
$\Rightarrow a = 1, b = 0, c = 2, d = 2$ und $e = 1$

Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle<table><tr><th></th><th>Z_1</th><th>Z_2</th><th>Z_3</th><th>Z_4</th></tr><tr><td>M_1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>M_2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>M_3</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>
$$\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\2 & 6 & 3\\4 & 6 & 13\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}30\\30\\30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}480\\330\\690\end{pmatrix}$$
$690 - 20 = 670$
Es müssen mindestens 670 Stück von M_3 bestellt werden.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2g</td><td>entscheidet begründet, ob der Lagerplatz aufgelöst werden kann und</td><td>Es gilt: b_1, b_2, b_3 gibt die Anzahl der Bauteile B_1, B_2, B_3 an.
Wenn der Lagerbestand aufgebraucht wird, müsste gelten:
$$\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\2 & 6 & 3\\4 & 6 & 13\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\44\\78\end{pmatrix}$$

Fortsetzung nächste Seite</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 2g</td><td>bestimmt, wie viele Pinger maximal mit dem Lagerbestand produziert werden können.</td><td>Das sich daraus ergebende lineare Gleichungssystem hat die folgende ganzzahlige Lösung: $b_1 = 7, b_2 = 4$ und $b_3 = 2$.
Bei der Produktion dieser Mengen werden die vorhandenen Metallteile genau aufgebraucht.
Jedoch können nur zwei Pinger gefertigt werden, da die entstandenen Bauteile im Verhältnis 1:1:1 benötigt werden. Es bleiben also fünf Bauteile B_1 und 2 Bauteile B_2 übrig. Daher kann der Lagerplatz nicht aufgelöst werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>2h</td><td>leitet die Gleichung H_c her, und

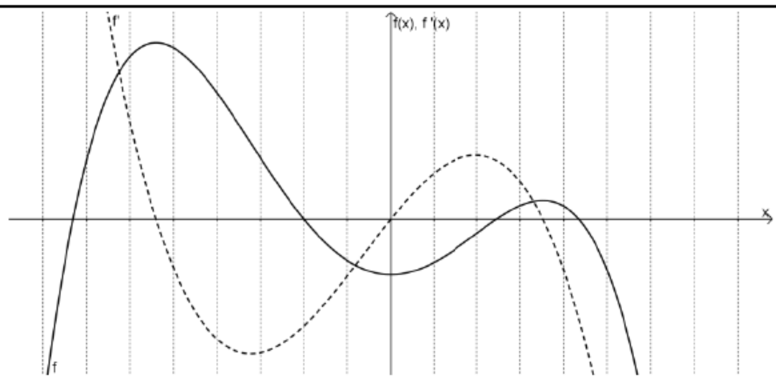
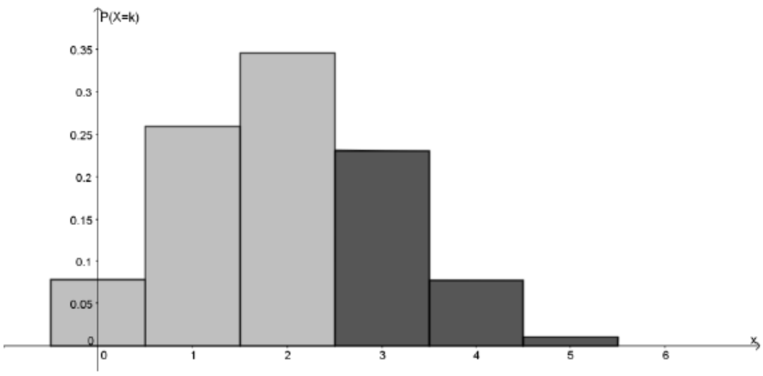
ermittelt den Wert, den Parameter c maximal annehmen darf, so dass der Kostenrahmen eingehalten werden kann.</td><td>Kosten K_M der Metallbauteile in EUR für die Produktion von jeweils einem Bauteil B_1, B_2 und B_3:
$K_M = (5 \quad 3c-4 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 13 \end{pmatrix}$
$K_M = (6c+16 \quad 18c+2 \quad 9c+41)$
Kosten K_Z der Zwischenprodukte in EUR für die Produktion von jeweils einem Bauteil B_1, B_2 und B_3
$K_Z = (2 \quad c+2 \quad 4 \quad c-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
$K_Z = (c+14 \quad 7c+6 \quad 7c+22)$
Gesamtkosten der Metallbauteile und Zwischenprodukte für die Produktion eines Pingers:
$K_{M,Z} = (K_M + K_Z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$K_{M,Z} = (7c+30 \quad 25c+8 \quad 16c+63) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$K_{M,Z} = (48c+101)$
K_T Kosten für die Endmontage in EUR pro Pinger
$H_c = K_{M,Z} + K_T$
$H_c = 48c + 101 + 13$
$H_c = 48c + 114$

Bedingung für die obere Grenze: maximal 210 EUR pro Pinger.
$48c + 114 \leq 210 \Leftrightarrow c \leq 2$
Parameter c darf nicht größer als 2 sein, da ansonsten die Gesamtproduktionskosten von 210,00 EUR pro Pinger überschritten werden.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 1 mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	berechnet die Nullstellen, bestimmt a mit $0 \leq a \leq 1$ so, dass folgende Gleichung gilt: $\int_0^a f(x)dx = 0{,}5$, und beurteilt ohne Rechnung, ob die Ungleichung gilt.	Notw. Bedingung: $f(x) = 0$ $-2x^3 + 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(-2x^2 + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $-2x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$ $\int_0^a (-2x^3 + 2x)dx = 0{,}5$ $\left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}a^4 + a^2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow a_1 = 1$ oder $a_2 = -1$ Da $0 \leq a \leq 1$ gelten soll, ist $a = 1$ die gesuchte Größe. Die Funktion f ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Von -1 bis 0 verläuft die Funktion unterhalb der Abszissenachse und das Integral hat einen negativen Wert. Von 0 bis 1 verläuft die Funktion über der Abszissenachse und das Integral hat einen positiven Wert. Diese beiden orientierten Flächeninhalte sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung gleich groß und heben sich auf. Ab $x = 1$ sind die Funktionswerte nur noch negativ und die Fläche zwischen Graph und Abszissenachse negativ orientiert. Daher ist das Integral der Funktion f von -1 bis 2 kleiner als null.	5
1b	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	siehe Tabelle unten	5

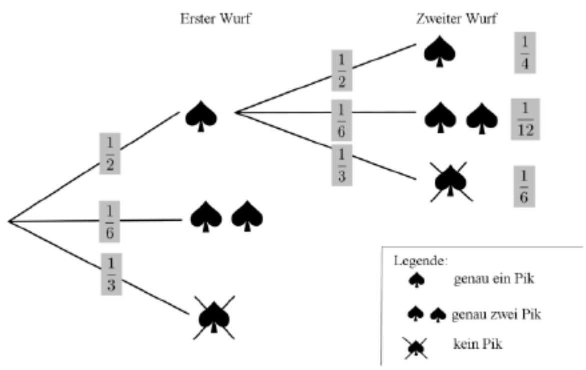
	wahr	falsch
Es gilt immer: $f(c) = 0$		x
Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt $\lvert a \rvert$.		x
Für $\lvert d \rvert \leq \lvert a \rvert$ besitzt der Graph von f unendlich viele Nullstellen.	x	
Der Graph von f ist immer punktsymmetrisch zum Ursprung.		x
$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d \cdot x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.	x	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
1c	ordnet begründet den richtigen Graphen zu, gibt die Funktionsgleichung von g an und leitet die 1. Ableitung her.	f_2 ist von den drei zur Auswahl stehenden Graphen von natürlichen Exponentialfunktionen der richtige Graph. Die Punktprobe zeigt, dass die Punkte P_1 und P_3 nicht auf dem Graphen der gegebenen Funktion f liegen, aber der Punkt P_2. Es gilt: $f_2(2) = 0{,}5 \cdot e^{2\cdot 2-4} = 0{,}5$ $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-4}$ $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$ Zwischenschritte sind erforderlich: $k'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^x}_{\text{Produktregel}}$ $= e^x \cdot \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$	5
1d	skizziert den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3 und beurteilt die Aussage.	 Die Stammfunktion F ist eine Funktion 5. Grades, daher hat die Stammfunktion mindestens eine Nullstelle. Aufgrund der drei Extremstellen des Graphen der Funktion f besitzt die Stammfunktion genau drei Wendepunkte. Die Aussage ist also richtig.	5
1e	gibt μ sowie $P(X = \mu)$ an, markiert $P(X > \mu)$ im Säulendiagramm,	Der Erwartungswert beträgt $\mu = 2$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X = \mu)$ beträgt 34,56 %.  *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1e</td><td>zeigt, dass zwei mögliche Trefferwahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 existieren und

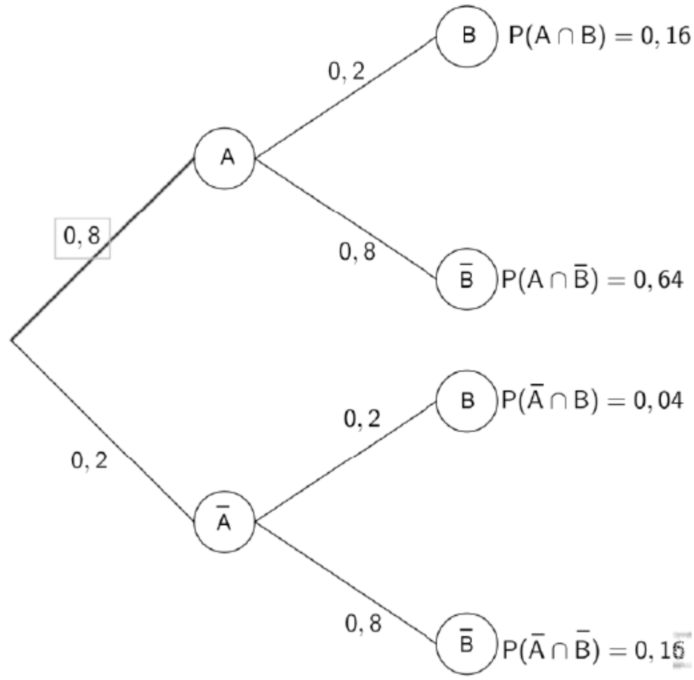
gibt die Werte für p_1 und p_2 an.</td><td>$\sigma = \sqrt{\frac{40}{25}} \Rightarrow \sqrt{\frac{40}{25}} = \sqrt{10 \cdot p \cdot (1-p)}$
$\Leftrightarrow \frac{4}{25} = p - p^2$
$\Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{25}} = \frac{4}{5} \vee p_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{25}} = \frac{1}{5}$
Da $\frac{1}{4} - \frac{4}{25} > 0$ und $\frac{1}{4} - \frac{4}{25} < \frac{1}{2}$ gilt, existieren die zwei positiven Lösungen $p_1 = 0{,}8$ und $p_2 = 0{,}2$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1f</td><td>vergleicht die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse miteinander,

ergänzt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und

ermittelt die Wahrscheinlichkeit.</td><td>Fünf Seiten von sechs möglichen Seiten zeigen maximal ein Pik an. Vier Seiten von sechs möglichen Seiten zeigen ein Herz an. Somit ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von Ereignis A geringer als die von Ereignis B.
$P(A) = \frac{5}{6} > P(B) = \frac{2}{3}$

$P(\text{mindestens ein Pik}) = 1 - P(\text{kein Pik}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Pik zu sehen ist, beträgt $\frac{8}{9}$.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>ergänzt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten,</td><td>

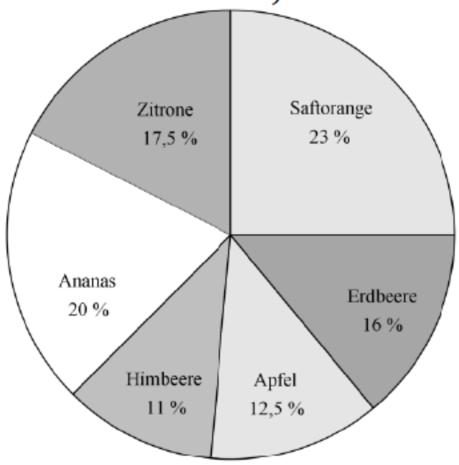
P	A	$\bar{A}$	Summe
B	**16 %**	**4 %**	20 %
$\bar{B}$	64 %	**16 %**	**80 %**
Summe	80 %	**20 %**	100 %

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1g	zeichnet ein vollständiges Baumdiagramm und		
	prüft, ob A und B stochastisch abhängig sind.	Anhand des Baumdiagrammes und der Vierfeldertafel ist ersichtlich, dass: $P_A(B) = P(B) = 0{,}2$ gilt. Damit sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.	
1h	gibt das arithmetische Mittel an,	$\bar{x} = 7$	5
	erstellt eine sortierte Urliste und	Sortierte Urliste: <table><tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th><th>x_5</th><th>x_6</th><th>x_7</th><th>x_8</th></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>10</td></tr></table>	
	prüft, ob dem Boxplot die Urliste zugrunde liegen kann.	Es existieren $n = 8$ Ausprägungen des Merkmals X. Minimum: 3 Maximum: 10 Median: $x_{Med} = \frac{x_4+x_5}{2} = 7{,}5$ Erstes Quartil (Median der ersten Hälfte): $Q_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} = 6$ Drittes Quartil (Median der zweiten Hälfte): $Q_3 = \frac{x_6 + x_7}{2} = 8$ Dem Boxplot kann folglich die Urliste zugrunde liegen. (! Quartile können unterschiedlich berechnet werden.)	
			40

Aufgabe 2: Gummibärchen

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>ergänzt die fehlenden Werte.</td><td>H: Himbeere; Z: Zitrone; Ap: Apfel; E: Erdbeere; So: Saftorange;
An: Ananas
<table><tr><td>x_i</td><td>H</td><td>Z</td><td>Ap</td><td>E</td><td>So</td><td>An</td><td>Σ</td></tr><tr><td>$H(x_i)$</td><td>18</td><td>18</td><td>30</td><td>21</td><td>36</td><td>27</td><td>150</td></tr><tr><td>$h(x_i)$</td><td>12</td><td>12</td><td>20</td><td>14</td><td>24</td><td>18</td><td>100</td></tr></table></td><td>3</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>vervollständigt das Kreisdiagramm und

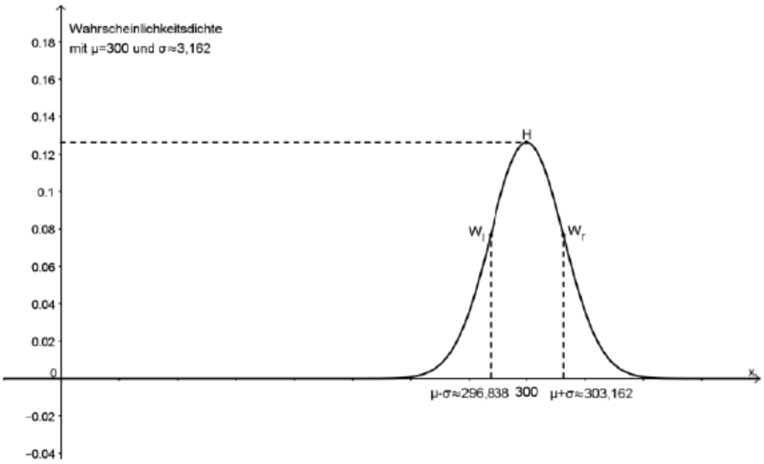
ergänzt die fehlenden relativen Häufigkeiten.</td><td>$100\,\% - 23\,\% - 16\,\% - 11\,\% - 12{,}5\,\% = 37{,}5\,\%$
$200 \cdot 37{,}5\,\% = 75$
Folglich gibt es 75 Zitronen- (Z) und Ananasgummibärchen (An).
Es gilt also: $Z + An = 75$ und $Z + 5 = An$.
$\Rightarrow Z = 35 \wedge An = 40$
(Rechenwege sind nicht erforderlich.)

</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>erläutert aus mathematischer Sicht, warum eine Tüte Gummibärchen nicht ausreicht,

bestimmt die Standardabweichung der Datenreihe der Gummibärchen mit Zitronengeschmack,</td><td>Die relative Häufigkeit für das Ziehen eines Gummibärchens mit Zitronengeschmack ist abhängig von der Versuchsanzahl n. Mit steigender, hinreichend großer Versuchsanzahl n, pendelt die relative Häufigkeit der Stichprobe beim Wert der relativen Häufigkeit der Grundgesamtheit ein (empirisches Gesetz der großen Zahlen).

Im Mittel befinden sich $\overline{x} = \frac{17+27+29+22+25+26+30+20+21+23}{10} = 24$ Zitronengummibärchen in einer Tüte.
$\sigma^2 = \frac{(17-24)^2 + (27-24)^2 + \cdots + (23-24)^2}{10} = 15{,}4$
$\sigma \approx 3{,}92$
Die Standardabweichung der Gummibärchen mit Zitronengeschmack in den 10 Tüten beträgt ca. 4.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>6</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2c	gibt den Modalwert an und erläutert dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.	Der Modalwert stellt den häufigsten Wert unter den Gummibärchen in Stück dar und ist somit ablesbar: $x_{Mod} = 152$ Am häufigsten sind unter den 10 Gummibärchentüten Tüten mit 152 Gummibärchen vorzufinden.	
2d	erläutert, unter welchen Bedingungen die Anzahl der Zitronengummibärchen als binomialverteilt betrachtet werden können.	Die Verteilung der Zufallsvariablen X: „Anzahl der Zitronengummibärchen" kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn • nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind (Erfolg: Zitronengummibärchen und Misserfolg: kein Zitronengummibärchen). • die Auswahl der Gummibärchen unabhängig voneinander passiert, d. h. sie müssen vereinzelt zufällig aus einer sehr großen Grundgesamtheit ausgewählt werden und nicht beispielsweise als Gruppe zusammenkleben. • die Zufallsvariable X diskret verteilt ist.	4
2e	beweist oder widerlegt die Behauptung des Mitarbeiters.	Die Zufallsvariable X: „Anzahl der Gummibärchen mit Zitronengeschmack" mit $X \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 300\}$ ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 300$ und die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{1}{6}$. $P(X > 100) = \sum_{i=101}^{300} \binom{300}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{300-i} \approx 0\ \%$. Da $\binom{300}{i} > 0$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{i} > 0$ und $\left(\frac{5}{6}\right)^{300-i} > 0$ gilt, muss die Wahrscheinlichkeit für $P(X > 100)$ folglich größer null sein. Es handelt sich nur um einen sehr kleinen Wert, der näherungsweise null beträgt. Die Behauptung ist somit falsch, die Wahrscheinlichkeit ist zwar sehr gering und beträgt nicht genau, sondern nur näherungsweise null. Mehr als 100 Gummibärchen könnten vorkommen.	4
2f	prüft den Wahrheitsgehalt der Behauptung.	Die Zufallsvariable X: „Anzahl der Gummibärchen mit Zitronengeschmack" ist binomialverteilt mit einer Kettenlänge von $n = 300$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass maximal 54 Zitronengummibärchen in einem Auswurf vorhanden sind, beträgt: $P(X \leq 54) \approx 75{,}99\ \%$. Die Aussage ist wahr, da $75{,}99\ \% < 80\ \%$ ist.	4
2g	gibt die Nullhypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 an,	Es wird die binomialverteilte Zufallsvariable X: „Anzahl der Gummibärchen mit Zitronengeschmack" mit $n = 1\,500$ und $p = \frac{1}{6}$ betrachtet. Da bei diesem Test betrachtet wird, ob sich der Anteil von Gummibärchen mit Zitronengeschmack ändert, egal ob weniger oder mehr, wird ein zweiseitiger Hypothesentest durchgeführt. Nullhypothese $H_0: p = \frac{1}{6}$: Die Abfüllanlage arbeitet genau. *Fortsetzung nächste Seite*	7

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g	prüft, ob eine Neueinstellung der Abfüllanlage notwendig ist, und	Gegenhypothese $H_1: p \neq \frac{1}{6}$: Die Abfüllanlage arbeitet ungenau. Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$ Ermittlung des Ablehnungs- und des Annahmebereichs von H_0: $P(X \leq g_l) \leq 0{,}025$ und $P(X \geq g_r) \leq 0{,}025$ Somit lautet der Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0; 1; \dots; 221\} \cup \{280; \dots; 1500\}$ und der Annahmebereich: $A = \{222; \dots; 279\}$. Da im aktuellen Test 275 Gummibärchen mit Zitronengeschmack gezählt wurden, muss die Automatisierung der Abfüllanlage nicht neu eingestellt werden, da 275 im Annahmebereich der Nullhypothese liegt und die Nullhypothese H_0 weiterhin beibehalten werden kann.	
	bestimmt die Wahrscheinlichkeit des α-Fehlers und	$\alpha_{neu} = P(0 \leq X \leq 221) + P(280 \leq X \leq 1500) \approx 0{,}04449$ $\approx 4{,}45\ \%$	
	vergleicht diesen mit dem Signifikanzniveau.	Der α-Fehler gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist. Da die Zufallsvariable X diskret ist, wird auf ganze Zahlen auf- bzw. abgerundet. Somit beträgt der α-Fehler weniger als 5 %.	
2h	skizziert den Funktionsgraphen und	Die Zufallsgröße Z: „Füllgewicht einer Tüte Gummibärchen in Gramm“ ist normalverteilt mit $\mu = 300$ und $\sigma^2 = 10$. $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 3{,}162$ 	6
	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Mit $\mu = 300$ und $\sigma \approx 3{,}162$ können die folgenden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tüte Gummibärchen… • weniger als 295 Gramm wiegt, liegt bei $P(Z < 295) \approx 5{,}69\ \%$. • zwischen 298 und 303 Gramm wiegt, liegt bei $P(298 < Z < 303) \approx 56{,}51\ \%$.	

	Anforderungen	Modelllösungen	
2i	berechnet, welche Standardabweichung erreicht werden müsste.	Die Zufallsgröße Z: „Füllgewicht einer Tüte Gummibärchen in Gramm“ ist normalverteilt mit $\mu = 300$ und $\sigma = ?$. $P(Z < 295) < 0{,}05$ $\Phi(z) = 0{,}05$ $\frac{x-\mu}{\sigma} = z < -1{,}65$ $-1{,}65 > \frac{295-300}{\sigma}$ $\sigma \approx 3{,}03$ [Gramm] Durch den Einbau der neuen Waage müsste eine Standardabweichung von ca. 3,03 Gramm erreicht werden.	3
			40

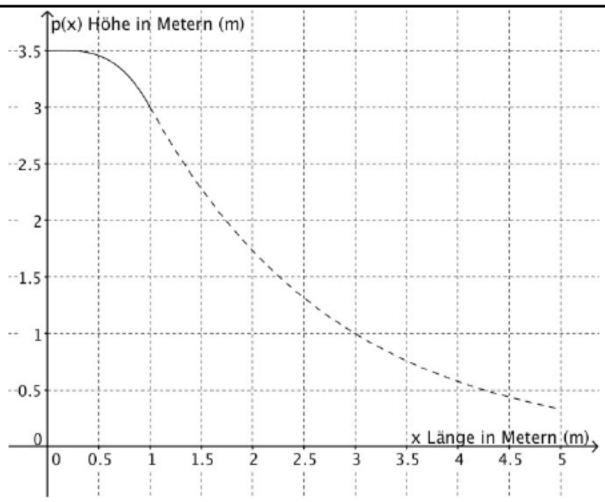
Aufgabe 3: Spielplatz

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>Ergänzt die fehlenden Werte in der Tabelle.</td><td>
<table>
<tr><th>Fläche des Spielplatzes in m^2</th><th>Umfang der Fäche des Spielplatzes in m</th><th>Materialkosten für den Zaun in EUR</th></tr>
<tr><td>2 500</td><td>200</td><td>5 000,00</td></tr>
<tr><td>2 256, 25</td><td>190</td><td>4 750,00</td></tr>
<tr><td>3 025</td><td>220</td><td>5 500,00</td></tr>
</table>
</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>zeigt, dass der Schüler mit seiner Behauptung Recht hat,

berechnet die Abmessungen des Spielplatzes und

prüft, ob die Mindestfläche und die Kostenvorgabe eingehalten werden können.</td><td>Allgemein gilt für den Umfang U einer rechteckigen Fläche:
$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, wobei a und b die verschiedenen Seitenlängen des Rechtecks sind. Für den Umfang des Spielplatzes gilt somit die folgende Nebenbedingung: $240 = 2 \cdot a + 2 \cdot b$.
Allgemein gilt für den Flächeninhalt F einer rechteckigen Fläche:
$F = a \cdot b$. Für die Zielfunktion des Flächeninhalts gilt somit:
$f(a, b) = a \cdot b$
Aus der Nebenbedingung ergibt sich: $b = 120 - a$
Durch Einsetzen von b in die Zielfunktion folgt:
$f(a) = a \cdot (120 - a) = -a^2 + 120a$

Notwendige Bedingung: $f'(a) = 0$
$f'(a) = -2 \cdot a + 120$
$0 = -2 \cdot a + 120$
$\Leftrightarrow a_e = 60$
Bei f handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel, somit ist a_e Stelle eines Hochpunkts.
$b = 120 - a_e = 60$
Somit sind die Seiten a und b des Spielplatzes 60 m lang.
$f(60) = 3\,600$
Die Mindestfläche von $2\,500\ m^2$ wird eingehalten.
Die Kosten für einen 200 m langen Zaun betragen 5 000,00 EUR und die Kostenvorgabe wird somit eingehalten.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>prüft, ob die Hecke als Abgrenzung des Kleinkinderbereichs verwendet werden kann.</td><td>Die Fläche, die vom Graphen der Funktion h im Intervall $I = [0; 50]$ und der Abszissenachse eingeschlossen wird, kann mithilfe des folgenden Integrals berechnet werden:
$\int_0^{50} h(x)dx \approx 1\,629{,}32$
Damit ergibt sich für die Fläche des Kleinkinderbereichs:
$2\,500\ m^2 - 1\,629{,}32\ m^2 = 870{,}68\ m^2 \approx \frac{1}{3} \cdot 2\,500\ m^2$
Somit werden die Vorgaben des Grünflächenamtes eingehalten.</td><td>3</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3d	erläutert, wie näherungsweise ohne Integralrechnung die Länge der Hecke bestimmt werden kann, und gibt eine Näherung der Länge der Hecke an.	Mithilfe des Satzes von Pythagoras kann die Länge der Hypotenuse l eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt werden zwischen den Punkten A(0|40), B(0|26,15) und C(50|26,15), wobei A und C näherungsweise auf dem Graphen von h liegen: $\left(l = \sqrt{(40-26{,}15)^2 + 50^2} \approx 51{,}88\right)$. Somit ergibt sich eine erste Näherung der Länge der Hecke von ca. 51,88 m.	4
3e	zeichnet den zweiten Teil des Verlaufs der Rutsche und interpretiert die Aussage im Sachzusammenhang.	 $p_1(1) = p_2(1)$ bedeutet, dass der Graph von p an der Stelle $x = 1$ beim Übergang vom ersten Abschnitt in den zweiten Abschnitt sprungfrei verläuft. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass die Rutsche an dieser Stelle keinen Absatz aufweist, was zur Verhinderung von Verletzungen bei der Benutzung von Rutschen sinnvoll ist. $p'_1(1) = p'_2(1)$ bedeutet, dass der Graph von p an der Stelle $x = 1$ keinen Knick aufweist. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass die Rutsche an dieser Stelle keine Kante hat, was bei Rutschen sehr wichtig ist, weil man ansonsten als Benutzer der Rutsche hängenbleiben könnte oder abheben würde.	6
3f	untersucht, ob im gesamten Rutschenverlauf p die Sicherheitsbestimmungen eingehalten werden.	Untersuchung des durchschnittlichen Gefälles: Für die durchschnittliche Steigung gilt: $m \approx \frac{0{,}33-3{,}5}{5-0} \approx -0{,}63$ Somit liegt das durchschnittliche Gefälle bei ca. 63 %, damit wird der geforderte Höchstwert von 85 % nicht überschritten. Untersuchung des größten Winkels: An der Stelle $x = 1$ geht der Graph der Funktion von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Damit liegt der steilste Punkt der Rutsche an der Stelle $x = 1$. Die Steigung an dieser Stelle beträgt $p'(1) \approx -1{,}65$. Wird dieser Wert in den Steigungswinkel umgerechnet, so ergibt sich $\arctan(-1{,}65) \approx -58{,}78°$. Auch dieser Wert entspricht den Vorgaben, denn an keiner Stelle ist die Rutsche steiler als 60°.	5

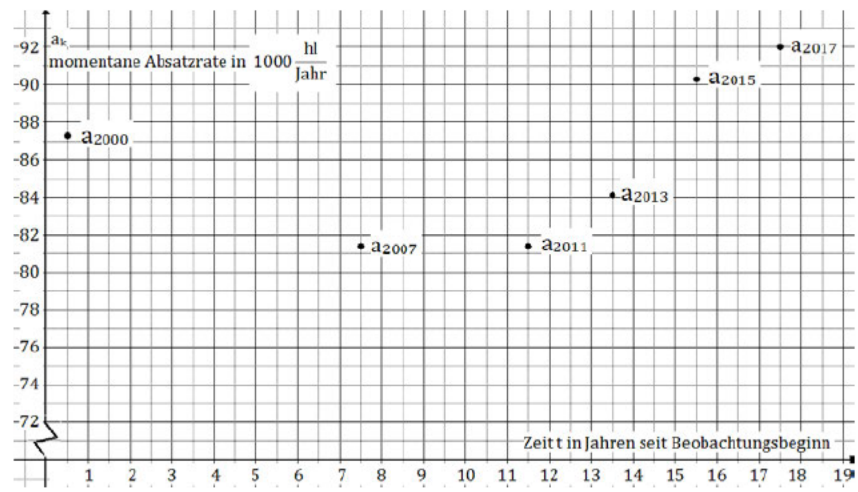
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3g	beweist oder widerlegt die Behauptung des Schülers.	Die Behauptung des Schülers ist falsch. Zur Widerlegung der Behauptung reicht es aus zu zeigen, dass der Steigungswinkel des um den Faktor 0,5 in Ordinatenrichtung gestauchten Graphen an mindestens einer Stelle nicht halbiert ist. Für die Funktionsgleichung des gestauchten Graphen des zweiten Abschnitts gilt: $p_2^*(x) = 0{,}5 \cdot 3 \cdot e^{-0{,}55\cdot(x-1)}$ $p_2^{*\prime}(x) = -0{,}825 \cdot e^{-0{,}55\cdot(x-1)}$ $p_2^{*\prime}(1) = -0{,}825$ und $\arctan(-0{,}825) \approx -39{,}52°$ Wird dieser Winkel mit dem Winkel des nicht gestauchten Graphen an derselben Stelle ($p_2{}'(1) \approx -1{,}65$ und $\arctan(-1{,}65) \approx -58{,}78°$) verglichen, so lässt sich feststellen, dass der Winkel mehr als die geforderte Hälfte beträgt.	4
3h	erläutert, inwieweit der Parameter k die Veränderung des Wetters widerspiegeln könnte, zeigt, dass der Zeitpunkt des größten Besucherstroms unabhängig vom Parameter k ist, und gibt die Uhrzeit des größten Besucherstroms an.	Je größer die Werte von k sind, desto größer sind die Funktionswerte von $b_k(t)$. Da bei besserem Wetter mehr Besucher den Spielplatz betreten, lässt sich daraus schließen, dass, je größer der Wert von k ist, desto besser das Wetter ist und umgekehrt. Je kleiner der Wert von k ist, desto schlechter ist das Wetter. $b_k{}'(t) = 0{,}1k \cdot e^{0{,}1\cdot t} \cdot (t^2 - 8t)^2 + k \cdot e^{0{,}1\cdot t} \cdot (4t^3 - 48t^2 + 128t)$ Notwendige Bedingung: $b_k{}'(t) = 0$ $\Rightarrow\ t_{e1} \approx -36{,}4 \quad t_{e2} = 0 \quad t_{e3} \approx 4{,}4 \quad t_{e4} = 8$ t_{e1} liegt nicht im Definitionsbereich. Hinreichende Bedingung: $b_k{}'(t_e) = 0$ und $b_k{}''(t_e) < 0$ $b_k{}''(t_{e2}) = 128 \cdot k > 0$ und $b_k{}''(t_{e4}) \approx 284{,}87 \cdot k > 0$ t_{e2} und t_{e4} gehören somit zu den Tiefpunkten (morgens bzw. abends, wenn der Spielplatz nicht so stark frequentiert wird). $b_k{}''(t_{e3}) \approx -100{,}31 \cdot k < 0$ Somit ist t_{e3} Stelle eines Hochpunktes, die den Parameter k nicht enthält, also ist der Zeitpunkt des größten Besucherstroms unabhängig vom Parameter k. Der größte Besucherstrom tritt um ca. 14:24 Uhr auf.	4
3i	berechnet den Wert von k so, dass zwischen 10:00 und 18:00 Uhr ca. 100 Besucher den Spielplatz betreten haben.	Folgende Gleichung muss mit dem CAS gelöst werden: $\int_0^8 (k \cdot e^{0{,}1\cdot t} \cdot (t^2 - 8 \cdot t)^2)dt = 100$ $\Rightarrow k \approx 0{,}061$ Ist $k \approx 0{,}061$, so haben ca. 100 Besucher den Spielplatz in der Zeit von 10:00 bis 18:00 Uhr betreten.	3
			40

Aufgabe 3: Gestaltung

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>ergänzt die fehlenden Werte in Tabelle 3.1,

vervollständigt die Abbildung 3.1 um die fehlenden zwei Punkte aus der Tabelle 3.1.</td><td>

Jahr	2000	2007	2011	2013	2015	2017
durchschnittlicher Jahresabsatz a_k in 1 000 Hektoliter pro Jahr	$\approx$ **87,3**	**81,4**	$\approx$81,4	$\approx$84,1	$\approx$90,3	$\approx$92,0



</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>begründet, inwieweit aufgrund der gesamten Datenlage zur Modellierung der Entwicklung der Absatzrate der letzten 18 Jahre eine aus drei unterschiedlichen Funktionstypen abschnittsweise definierte Funktion geeignet sein könnte.</td><td>Der Verlauf der momentanen Absatzraten kann aufgrund des beschriebenen Verlaufs bis zum Jahr 2007 annähernd durch einen exponentiellen Zerfall beschrieben werden. Bis 2011 bleibt die Absatzrate annähernd konstant, so dass eine lineare Funktion (ohne Steigung) geeignet erscheint, ab dem Jahr 2011 wächst die Absatzrate zunächst schnell und dann langsamer an. Hier könnte ein weiterer Funktionstyp z. B. eine ganzrationale Funktion verwendet werden. Es handelt sich also um drei sehr unterschiedliche Verläufe, die durch drei verschiedene Funktionstypen beschrieben werden können, nämlich zunächst mittels einer Exponentialfunktion, dann mittels einer linearen Funktion und im letzten Abschnitt mittels einer ganzrationalen 3. Grades.</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>prüft die Schlussfolgerung.</td><td>Die durchschnittliche Absatzrate beträgt:
$\frac{92-81{,}4}{6} \approx 1{,}77$
Der mittlere jährliche Zuwachs beträgt also ca. 1 770 $\frac{\textbf{hl}}{\textbf{Jahr}}$.</td><td>3</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3c	vergleicht die beiden Ansätze miteinander.	Im ersten Ansatz wird der Flächeninhalt von Streifen mit der Breite 1 (einem Jahr) und der Höhe a_k der Jahre 2011 bis einschließlich 2017 addiert, die fehlenden Werte der Jahre 2012, 2014 und 2016 müssten geschätzt oder noch mit Hilfe von g ermittelt werden. Diese Berechnung liefert eine gute Näherung der Gesamtgetränkeabsatzmenge. Im zweiten Ansatz wird über die Modellfunktion g integriert, also die Fläche unter dem Graphen der Funktion g bestimmt, der Wert des Integrals gibt die Gesamtgetränkeabsatzmenge an, das ist hier zulässig, da diese Funktion stetig ist. Der Wert ist aber auch nur eine gute Näherung, da die Randfunktion eine Näherung der Absatzraten über den Zeitverlauf angibt. Beide Ansätze liefern für diesen Zeitraum fast identische Gesamtabsatzmengen in Litern.	4
3d	bestimmt näherungsweise die Anzahl, der im Zeitraum von 2011 bis einschließlich 2017 verkauften 20-er und 24-er Kisten.	Die gesuchte Anzahl a der 20-er Kisten und b der 24-er Kisten ergibt sich aus folgendem LGS: I $\quad a \cdot 20 \cdot 0{,}5 + b \cdot 24 \cdot 0{,}33 = 61\,000\,000$ II $\quad 2 \cdot a = b$ $\Rightarrow a \approx 2\,360\,681$ und $b \approx 4\,721\,362$ Es wurden in diesem Zeitraum ca. 2,4 Millionen 20-er Kisten und 4,7 Millionen 24-er Kisten verkauft.	4
3e	beurteilt unter Berücksichtigung der Wanddicke von 2 mm, ob die neue Flasche die Anforderungen erfüllt, und	Es ist zu beurteilen, ob der maximale Außendurchmesser $D \leq 61$ mm ist. Aufgrund der Abbildung 3.1 kann man erkennen, dass der maximale Außendurchmesser im unteren Bereich der Flasche liegt. $D = 2 \cdot 27{,}2 + 2 \cdot 2 = 58{,}4$ [mm] Der maximale Außendurchmesser beträgt 58,4 mm und erfüllt damit die Anforderungen. Es ist zu beurteilen, ob für den minimaler Innendurchmesser d gilt, dass : $\;10 \text{ mm} \leq d \leq 20 \text{ mm}$ Der minimale Innendurchmesser d liegt im mittleren Bereich der Flasche. Es ist also das Minimum des zweiten Funktionsabschnittes zu bestimmen: Notwendige Bedingung: $f_2{}'(x) = 0$ für $x \in [10; 23]$ $f_2'(x) = -\frac{8}{65}\pi \cdot \sin\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right) - 0{,}14$ $\Rightarrow x_{e1} \approx 13{,}63\,;\; x_{e2} \approx 16{,}12\,;\; x_{e3} \approx 20{,}13\,;\; x_{e4} \approx 22{,}62$ Aufgrund der Abbildung 3.1 ergibt sich, dass das absolute Minimum des Innendurchmessers bei einer (Innen-)Höhe von ca. 20,13 cm erreicht wird. Für d gilt daher: $d = 2 \cdot f_2(x_{e3}) \approx 1{,}06$[cm] Daher beträgt der minimale Innendurchmesser ca. 10,6 mm und erfüllt damit die Anforderungen knapp. *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3e	gibt den tatsächlichen Außendurchmesser und den minimalen Innendurchmesser an.	Der maximale Außendurchmesser beträgt 58,4 mm und der minimale Innendurchmesser ca. 10,6 mm.	
3f	leitet den Faktor und den ersten Summenden her und	$\boxed{\frac{1}{1000}}\left(\boxed{74{,}794\cdot\pi}+\pi\cdot\int_{10}^{23}\left(0{,}4\cdot\cos\left(\frac{4}{13}\pi\cdot(x-10)\right)-0{,}14x+3{,}72\right)^2dx\right)$ Durch den Faktor $\frac{1}{1000}$ wird das Volumen von der Einheit Kubikzentimeter in Liter umgerechnet. Der Summand $74{,}794\cdot\pi$ ergibt sich durch die Addition der Volumina des ersten und des dritten zylinderförmigen Abschnitts der Flasche. Die Formel für die Volumenberechnung lautet: $V=\pi\cdot r^2\cdot h$. Im unteren Abschnitt ist der Radius 2,72 cm und die Höhe beträgt 10 cm. Im Hals der Flasche beträgt der Radius 0,9 cm und die Höhe dieses Zylinders beträgt 1 cm. Es ergibt sich somit: $(2{,}72^2\cdot 10+0{,}9^2\cdot 1)\cdot\pi=74{,}794\cdot\pi$	4
3g	untersucht den Graphen an der Stelle $x=10$ auf Knickfreiheit (Sprungfreiheit wird vorausgesetzt).	$f_2'(x)=-\frac{8}{65}\pi\cdot\sin\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right)-0{,}14$ Es ist zu prüfen, ob $f_2'(10)=0$ gilt, da die Steigung des ersten Abschnittes Null beträgt. $f_2'(10)=-0{,}14\neq 0$ $\Rightarrow$Der Übergang an der Stelle $x=10$ ist nicht knickfrei.	3
3h	zeigt, dass die Lage der Wendestellen unabhängig vom Parameter k ist, berechnet alle Wendestellen für $10\leq x\leq 23$ und gibt die Innenradien an.	$h_k''(x)=-\frac{32}{845}\pi^2\cdot\cos\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right)$ Die zweite Ableitung enthält den Parameter k nicht mehr, also hängt die Lage der Wendestellen nicht vom Parameter k ab. Notwendige Bedingung für die Wendestellen : $h_k''(x)=0$ $-\frac{32}{845}\pi^2\cdot\cos\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right)=0$ (auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung kann bei Bezug auf die Abbildung 3.1 verzichtet werden) $\Rightarrow x_{w1}=11{,}625\,;\ x_{w2}\approx 14{,}875;\ x_{w3}\approx 18{,}125\,;\ x_{w4}\approx 21{,}375$ Die Innenradien betragen ca. 2,09 cm, ca. 1,64 cm, ca. 1,18 cm und ca. 0,73 cm.	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3i	ermittelt die Tangentengleichung an der Stelle $x = 16{,}5$ und	$h_k(x) = 0{,}4 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi \cdot (x-10)\right) - k \cdot x + 3{,}72$ $h_k(16{,}5) = 4{,}12 - 16{,}5k$ $h'_k(x) = -\frac{8}{65}\pi \cdot \sin\left(\frac{4}{13}\pi(x-10)\right) - k$ $\Rightarrow h'_k(16{,}5) = -k$ Für die Tangentengleichung t_k gilt: $t_k(x) = h'_k(16{,}5) \cdot (x - 16{,}5) + h_k(16{,}5)$ $\Rightarrow t_k(x) = -k \cdot (x - 16{,}5) + 4{,}12 - 16{,}5k$ $= -k \cdot x + 4{,}12$	5
	weist nach, dass sich alle Tangenten t_k in genau einem Punkt schneiden.	Alle Tangenten t_k an die Graphen der Funktionen h_k im Punkt $Q(16{,}5 \mid 4{,}12 - 16{,}5k)$ haben den gleichen Ordinatenabschnitt, sie schneiden sich also im Punkt $P(0 \mid 4{,}12)$.	
			40