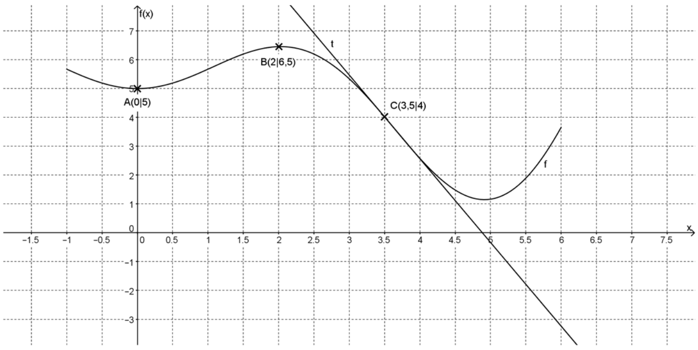
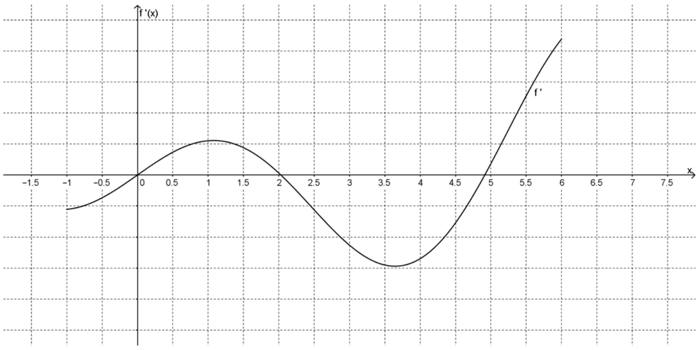
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

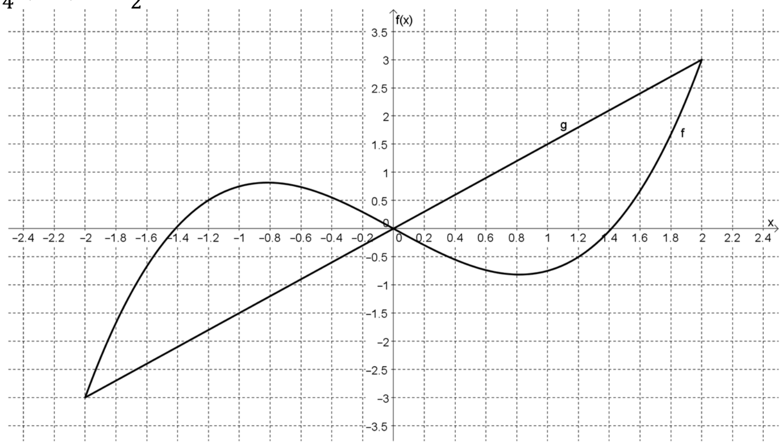
	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	bestimmt näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$, skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f' und beurteilt den Wahrheitsgehalt dieser Aussage.	Ermittlung der Tangentensteigung $m_t \approx -3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.   Diese Aussage muss falsch sein, weil der Wert der zweiten Ableitungsfunktion aufgrund der ersichtlichen Rechtskrümmung an der Stelle $x_2 = 2$ negativ sein muss.	5
1b	zeigt, dass die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ Nullstellen der Funktion f_a sind und berechnet den Inhalt der vorgegebenen Fläche.	$f_a(0) = -0 \cdot (0 - a)^2 = 0$ $f_a(a) = -a \cdot (a - a)^2 = 0$ $A = \left\|\int_0^a f_a(x)\,dx\right\| = \left\|\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}a \cdot x^3 - \frac{1}{2}a^2 \cdot x^2 + c\right]_0^a\right\|$ $A = \left\|-\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a \cdot a^3 - \frac{1}{2}a^2 \cdot a^2\right\| = \left\|-\frac{a^4}{12}\right\| = \frac{a^4}{12}$ [FE]	5
1c	gibt die erste Ableitung der Funktion f an und entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	$f'(x) = 0{,}5^x \cdot \ln(0{,}5)$	5

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f
Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).		X
Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.	X	
Der Graph der Funktion f schneidet niemals den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 1$.	X	

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1d</td><td>ermittelt die Steigung m,
zeichnet den Graphen der Funktion g und

begründet, dass der gegebene Ausdruck wahr ist.</td><td>

$\frac{3}{4}(-2)^3 - \frac{3}{2}(-2) = m \cdot (-2) \Leftrightarrow m = 1{,}5$



Mit der Differenzenfunktion, die durch $f(x) - g(x)$ bestimmt wird, lässt sich die Maßzahl der beiden Flächen, die beide Graphen im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ einschließen, bestimmen. Diese Maßzahl hat im Bereich $-2 \leq x \leq 0$ ein positives Vorzeichen, da in diesem Bereich alle Funktionswerte von f gegenüber denen von g größer bzw. gleich sind. Im Bereich $0 \leq x \leq 2$ gilt Umgekehrtes und die Maßzahl hat somit ein negatives Vorzeichen.
Dadurch, dass der Graph der Funktion f nur ungerade Exponenten aufweist, verläuft dieser punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Folglich müssen Schnittflächen mit einer Ursprungsgeraden im einem Intervall $I = [g_l;\ g_r]$ mit Intervallgrenzen, die jeweils den gleichen Abstand zu null haben, genau gleich groß sein.
Die Bilanz der Schnittflächen beträgt somit null.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Für keinen Wert des Parameters k liegt der Vektor $\vec{a}$ in der x-y-Ebene.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gibt genau zwei Werte des Parameters k, so dass der Vektor $\vec{a}$ ein Einheitsvektor ist.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Es gibt genau einen Wert des Parameters k, so dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Für keinen Wert des Parameters k steht der Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Es gibt keinen Wert des Parameters k, so dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebene aufspannen.</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>berechnet die Koordinaten des Höhenfußpunktes.</td><td>

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

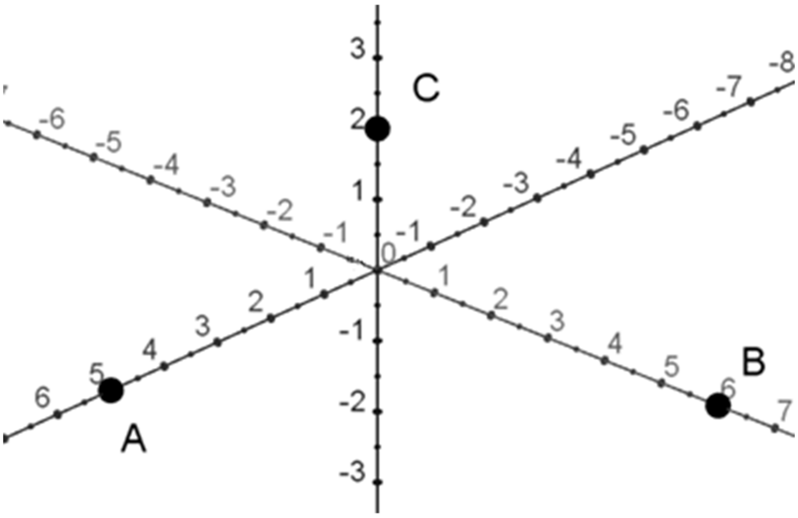
$E: 2x + y - 3z = 18$

$2 \cdot (1 + s \cdot 2) + 1 \cdot (2 + s \cdot 1) - 3 \cdot (-3 \cdot s) = 18$

$4 + 14s = 18$

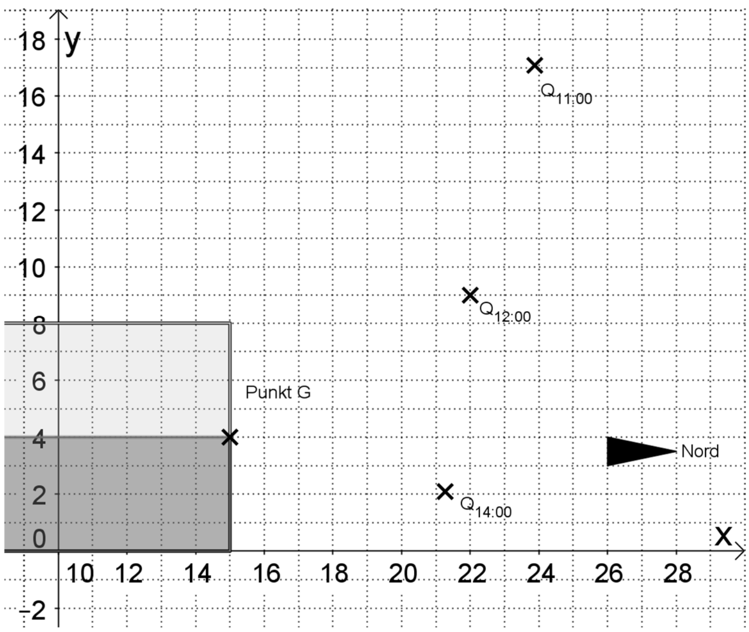
$s = 1$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow P(3|3|-3)$
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1g	gibt eine Gleichung für eine Gerade an, die echt parallel zur Ebene E verläuft,	$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	5
	gibt eine Gleichung für eine Gerade an, die senkrecht zur Ebene E verläuft,	$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	
	gibt eine Gleichung für eine Gerade an, die in der Ebene E liegt und	$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	
	gibt den Parameter k des Punktes $P(k \mid 2 \mid 3k)$ so an, dass der Punkt in der Ebene E liegt.	$5 \cdot k - 3 \cdot k = 10$ $k = 5$	
1h	zeichnet die Achsenschnittpunkte in das Koordinatensystem ein und	 $6x + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 0 = 30$ $x = 5 \Longrightarrow A(5\|0\|0)$ $6 \cdot 0 + 5 \cdot y + 15 \cdot 0 = 30$ $y = 6 \Longrightarrow B(0\|6\|0)$ $6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot z = 30$ $z = 2 \Longrightarrow C(0\|0\|2)$	5
	gibt eine Gleichung der Schnittgeraden an.	$g_{xz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	
			40

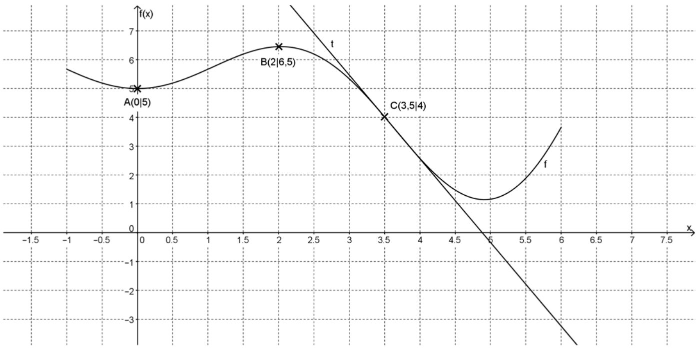
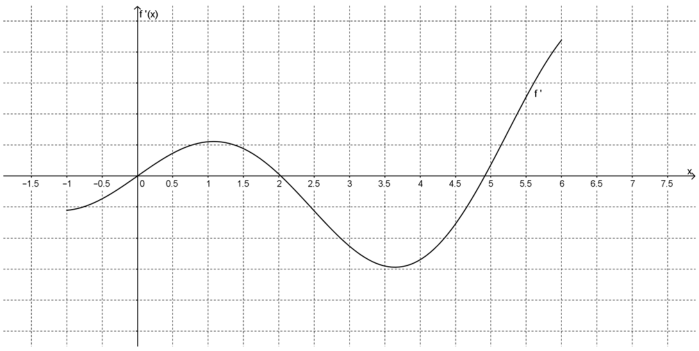
Aufgabe 2: Der Neubau

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
2a	gibt die Koordinaten der Punkte A und P an und berechnet den Dachneigungswinkel α.	$A(15\|0\|0)$, $P(-10\|22\|6)$ $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\-4\\4{,}5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\-4\\4{,}5\end{pmatrix}\right\|} \rightarrow \alpha \approx 48{,}37°$	4
2b	berechnet die Materialkosten für die gesamte Dachkehle.	$\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\4{,}5\end{pmatrix}$ $\left\|\overrightarrow{CF}\right\| \approx 7{,}83\text{m}$ Kosten: $7{,}83\text{ m} \cdot 25{,}00\,\frac{\text{Euro}}{\text{m}} = 195{,}75$ Euro.	3
2c	zeigt, dass die Firstlinie $\overline{GF}$ und die Firstlinie $\overline{FE}$ im rechten Winkel zueinander liegen.	$\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix}-5-15\\4-4\\10{,}5-10{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix}-5-(-5)\\22-4\\10{,}5-10{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\18\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GF}\bullet\overrightarrow{FE} = 0$ Somit liegen die Firstlinie $\overline{GF}$ und die Firstlinie $\overline{FE}$ im rechten Winkel zueinander.	4
2d	berechnet, welche Qualitätsstufe der Auftraggeber maximal auswählen kann.	$\left\|\overrightarrow{GB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\4\\-4{,}5\end{pmatrix}\right\| \approx 6{,}02$ $A = \frac{20+15}{2} \cdot 6{,}02 \approx 105{,}364\ [\text{m}^2]$ Gesamtfläche: $(105{,}53 + 378) \cdot 1{,}1 = 531{,}70\ [\text{m}^2]$ Möglicher Preis: $\frac{5800\text{ Euro}}{531{,}88\text{ m}^2} \approx 10{,}91\,\frac{\text{Euro}}{\text{m}^2} > 10{,}21\,\frac{\text{Euro}}{\text{m}^2}$ Es kann maximal der Dachziegel „Odenwälder Dachpfanne, weinrot glasiert“ mit der Qualität mittelmäßig/hochwertig ausgewählt werden.	5
2e	zeigt, dass die Antenne in dem Punkt $H_1(-3\|15\|8{,}7)$ am Dach befestigt werden muss.	$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\15\\13\end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\15\\6\end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}-5\\0\\4{,}5\end{pmatrix}$ $g_1 = g_2$ $s_1 = 4{,}3 \wedge s_2 = 0{,}6$ $\overrightarrow{OH_1} = \begin{pmatrix}-3\\15\\13\end{pmatrix} + 4{,}3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\15\\6\end{pmatrix} + 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix}-5\\0\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\15\\8{,}7\end{pmatrix}$ $H_1(-3\|15\|8{,}7)$	4

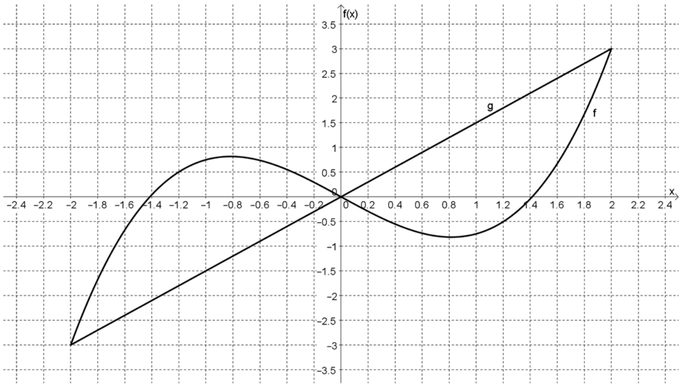
	Anforderungen	Modelllösungen	
2f	zeigt, dass die Ebene E_1 durch die Ebenengleichung beschrieben werden kann,	Punkt B in E_1: $9 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 120$ Punkt C in E_1: $9 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 120$ Punkt F in E_1: $9 \cdot 4 + 8 \cdot 10{,}5 = 120$	8
	gibt eine Ebenengleichung der Ebene E_1 in der Parameterform an,	E_1: $9y + 8z = 120$ Umwandlung in die Parameterform: $x = t_3 \wedge y = t_4 \quad \text{mit } t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$	
	gibt eine Ebenengleichung E_2 an und	$E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$	
	erläutert, warum der Winkel mit Hilfe der Normalenvektoren berechnet werden kann.	Der Normalenvektor einer Ebene ist genau der Vektor, der zu allen denkbaren Spannvektoren einer Ebene orthogonal ist. Somit muss der Schnittwinkel zweier Normalenvektoren zwangsläufig den Schnittwinkel zweier Ebenen und somit den Winkel des Kehlbleches repräsentieren.	
2g	vervollständigt die fehlenden Angaben in der Tabelle und	$\vec{s}_{11:00} = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OQ_{11:00}} = \begin{pmatrix} -15 \\ -\ 4 \\ -10{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23{,}88 \\ 17{,}08 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}88 \\ 13{,}08 \\ -10{,}5 \end{pmatrix}$ Aus der Abbildung 2.2: $Q_{12:00}(22\|9\|0)$ $\vec{s}_{12:00} = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OQ_{12:00}} = \begin{pmatrix} -15 \\ -\ 4 \\ -10{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -10{,}5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10{,}00 \\ -\ 3{,}05 \\ -16{,}74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $x \approx 21{,}27 \wedge\ y \approx 2{,}09\ \wedge\ s \approx 0{,}63 \Rightarrow Q_{14:00}(21{,}27\|2{,}09\|0)$	6
	zeichnet die Schattenpunkte der Giebelspitze G in das Koordinatensystem ein.		

	Anforderungen	Modelllösungen	
2h	berechnet die Koordinaten des Durchstoßpunktes J_1 des Abluftrohres durch das Dach und	$E_1: 9y + 8z = 120$ Umwandlung in die Parameterform: $x = t_3 \land y = t_4$ $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$ $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_1 = g_4 \rightarrow z = 7{,}125 \land t_3 = 0{,}2 \land t_4 = 7$ $P_{\text{Durchtritt}}(0{,}2\|7\|7{,}125)$	6
	bestimmt die Koordinate z des Punktes J_2 so, dass der vorgegebene Mindestabstand von zwei Metern zu den in Ebene E_1 liegenden Solarzellen eingehalten wird.	$g_{\text{Abstand}} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ 1. Bedingung: $g_{\text{Abstand}} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ 2. Bedingung: $g_{\text{Abstand}} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix} = 0$ 3. Bedingung: $\|g_{\text{Abstand}}\| = 2$ $z \approx 4{,}11 \land t_3 = 0{,}2 \land t_4 \approx 8{,}49$ oder $z \approx 10{,}14 \land t_3 = 0{,}2 \land t_4 \approx 5{,}51$ Da die Austrittsöffnung oberhab des Daches liegen muss, ist das zweite Ergebnis $z \approx 10{,}14$ zu wählen.	
			40

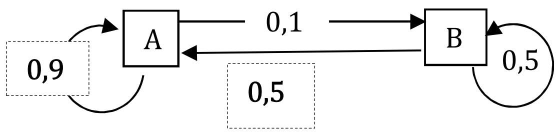
Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	bestimmt näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$, skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f' und beurteilt den Wahrheitsgehalt dieser Aussage.	Ermittlung der Tangentensteigung $m_t \approx -3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.   Diese Aussage muss falsch sein, weil der Wert der zweiten Ableitungsfunktion aufgrund der ersichtlichen Rechtskrümmung an der Stelle $x_2 = 2$ negativ sein muss.	5
1b	zeigt, dass die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ Nullstellen der Funktion f_a sind und berechnet den Inhalt der vorgegebenen Fläche.	$f_a(0) = -0 \cdot (0 - a)^2 = 0$ $f_a(a) = -a \cdot (a - a)^2 = 0$ $A = \left\lvert \int_0^a f_a(x)\,dx \right\rvert = \left\lvert \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}a \cdot x^3 - \frac{1}{2}a^2 \cdot x^2 + c \right]_0^a \right\rvert$ $= \left\lvert -\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a \cdot a^3 - \frac{1}{2}a^2 \cdot a^2 \right\rvert = \left\lvert -\frac{a^4}{12} \right\rvert = \frac{a^4}{12}$ [FE]	5
1c	gibt die erste Ableitung der Funktion f an und entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	$f'(x) = 0{,}5^x \cdot \ln(0{,}5)$	5

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f
Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S(0\|1)$.		X
Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.	X	
Der Graph der Funktion f schneidet niemals den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 1$.	X	

	Anforderungen	Modelllösungen	
1d	ermittelt die Steigung m, zeichnet den Graphen der Funktion g und	$\frac{3}{4}(-2)^3 - \frac{3}{2}(-2) = m \cdot (-2) \Leftrightarrow m = 1{,}5$ 	5
	begründet, dass der gegebene Ausdruck wahr ist.	Mit der Differenzenfunktion, die durch $f(x) - g(x)$ bestimmt wird, lässt sich die Maßzahl der beiden Flächen, die beide Graphen im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ einschließen, bestimmen. Diese Maßzahl hat im Bereich $-2 \leq x \leq 0$ ein positives Vorzeichen, da in diesem Bereich alle Funktionswerte von f gegenüber denen von g größer bzw. gleich sind. Im Bereich $0 \leq x \leq 2$ gilt Umgekehrtes und die Maßzahl hat somit ein negatives Vorzeichen. Dadurch, dass der Graph der Funktion f nur ungerade Exponenten aufweist, verläuft dieser punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Folglich müssen Schnittflächen mit einer Ursprungsgeraden im einem Intervall $I = [g_l;\ g_r]$ mit Intervallgrenzen, die jeweils den gleichen Abstand zu null haben, genau gleich groß sein. Die Bilanz der Schnittflächen beträgt somit null.	
1e	bestimmt alle Matrizen G, für die $F \cdot G = G \cdot F$ gilt und	Aus $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ Aus dem Vergleich der Matrizenelemente folgen: $c = b,\ d = a,\ a = d$ und $b = c$. Somit ergibt sich z. B. für die Matrix $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.	5
	ermittelt die Elemente der Matrix G so, dass $F + 2G^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ gilt.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	
1f	bestimmt für die Matrizen A und B die Werte a und x so, dass $A \cdot B = C$ gilt und	$A \cdot B = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6x \\ 2a+4 & 2a \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ Vergleich der Matrizenelemente: $2a + 4 = 6 \Rightarrow \mathbf{a = 1}$ $2a \cdot x = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$	5
	zeigt, dass die Matrix B nur für $x \neq 0$ invertierbar ist.	Für die inverse Matrix B^{-1} gilt: $B \cdot B^{-1} = E$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1f</td><td></td><td>Daraus folgen die linearen Gleichungssysteme:
$\begin{array}{rcl} 2a & = & 1 \\ 2a + 2x \cdot c & = & 0 \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} 2b & = & 0 \\ 2b + 2x \cdot d & = & 1 \end{array}$
$a = \frac{1}{2}, b = 0$ und außerdem folgen: $2x \cdot c = -1$ und $2x \cdot d = 1$
$\Rightarrow 2x \cdot c + 2x \cdot d = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (c + d) = 0$ mit den möglichen Lösungen $x = 0$ bzw. $c = -d$. Wenn aber $x = 0$, dann sind die Gleichungen $2a + 2x \cdot c = 0$ widersprüchlich zu $2a = 1$ bzw. $2b + 2x \cdot d = 1$ ist widersprüchlich zu $2b = 0$. Das heißt, die beiden LGS sind für $x = 0$ nicht lösbar und somit existiert für $x = 0$ keine zugehörige inverse Matrix B^{-1}.</td><td></td></tr>
<tr><td>1g</td><td>ergänzt die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten,

gibt die Übergangsmatrix M an und
ermittelt die Verteilung nach einem Übergang, wenn $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ gilt.</td><td>
Für die Übergangsmatrix gilt: $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Nach einem Übergang: $M \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_1}$
$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4a \\ 0{,}6a \end{pmatrix}$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table>
<tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>Jede quadratische Matrix ist invertierbar.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Das Produkt aus einer quadratischen Matrix A und der Einheitsmatrix E ergibt die inverse Matrix A^{-1}.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für die Matrizengleichung $A \cdot X + B \cdot X = C$ (alle gegebenen Matrizen sind invertierbar und vom gleichen Typ), lautet die nach Matrix X umgestellte Form der Gleichung: $X = (A + B)^{-1} \cdot C$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ kann die Rechenoperation $A \cdot B$ ausgeführt werden.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Die Matrix in der Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt mit $a \cdot b \cdot c = 1$ einen zyklisch stabilen Prozess der Länge $n = 3$. Wenn aber $a \cdot b \cdot c > 1$ gilt, dann führt dies zu einer Vergrößerung des Bestandes.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Landwirtschaftlich genutzte Flächen

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeigt, dass die anteilige Verteilung für die drei Flächenarten A, G und W durch den Verteilungsvektor $\vec{v}_{2003}$ hinreichend genau beschrieben werden kann.	Die Gesamtfläche der landwirtschaftlich genutzten Flächen beträgt: 2,75 +10,56 +7,82 = 21,13 [km²]. Berechnung der prozentualen Verteilungen: $A = 2{,}75 : 21{,}13 \approx 0{,}13 = 13\%$ $G = 10{,}56 : 21{,}13 \approx 0{,}50 = 50\%$ $W = 7{,}82 : 21{,}13 \approx 0{,}37 = 37\%$ Daraus ergibt sich der Verteilungsvektor $\vec{v}_{2003} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$.	3
2b	erstellt die Übergangsmatrix M, erläutert, dass die Übergangsmatrix eine stochastische Matrix ist und interpretiert die Bedeutung der Spalteneintragungen.	Aus der Tabelle 2.2 lässt sich die Matrix M erstellen: $M = \begin{pmatrix} 0{,}910 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}075 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}015 & 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$. Die Matrix M ist eine stochastische Übergangsmatrix, da alle Matrixelemente zwischen 0 und 1 liegen und die Spaltensummen jeweils 1 ergeben. Am Beispiel der ersten Spalte: Aus der Tabelle 2.2 ist erkennbar, dass 91 % des Ackerlandes als Ackerland auch weiter genutzt werden. 7,5 % des Ackerlandes werden zu Grünland und 1,5 % des Ackerlandes werden zu Waldflächen aufgeforstet.	4
2c	ermittelt die Werte des Verteilungszustands für das Jahr 2013.	Da die jährliche Übergangsverteilung als konstant angenommen wird und für $\vec{v}_{2003} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$ gilt, folgt: $\vec{v}_{2013} = M^{10} \cdot \vec{v}_{2003} = \begin{pmatrix} 0{,}910 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}075 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}015 & 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}110 \\ 0{,}481 \\ 0{,}409 \end{pmatrix}$ Die Werte des Verteilungszustands im Jahr 2013 wären bei konstant bleibenden Übergangswahrscheinlichkeiten: ca. 11 % der landwirtschaftlich genutzten Flächen bestünden aus Ackerland, ca. 48,1 % aus Grünland und ca. 40,9 % aus Wald.	3
2d	prüft, ob diese Datenlage korrekt sein kann, wenn davon auszugehen ist, dass die jährliche Übergangsverteilung konstant geblieben ist und mit Hilfe der Tab. 2.2 beschrieben werden kann.	$t = 2013 - 1980 = 23$ Es gilt für den Fall, dass das Modell die Datenlage korrekt wiedergibt: $\vec{v}_{1980} = M^{-23} \cdot \vec{v}_{2003}$ $\vec{v}_{1980(1)} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}27 \\ 7{,}45 \\ 4{,}41 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0{,}44 \\ 0{,}35 \\ 0{,}21 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_{1980(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}910 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}075 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}015 & 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}^{-23} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}44 \\ 0{,}35 \\ 0{,}21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix}$ Die Werte, die in der Karte aus dem Jahr 1980 angegeben sind, stimmen mit der Berechnung in etwa überein, das Modell gibt die Datenlage somit korrekt wieder.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
2e	erläutert anhand der Matrizengleichung den Zusammenhang zwischen den Begriffen „Fixvektor" und „Grenzmatrix" im Sachkontext und ermittelt die Grenzmatrix M_G.	In der Gleichung beschreibt der Vektor $(A \quad G \quad W)^T$ den Zustand, der nach jedem Übergang wieder erreicht wird. In diesem Falle heißt die Verteilung stationär (stabil). Voraussetzung ist, dass ein Austauschprozess mit der Übergangsmatrix M vorliegt. Die sich langfristig einstellende stabile Grenzverteilung (≙ stationäre Verteilung) hängt nicht von der Anfangsverteilung der Merkmale ab. Eine Grenzmatrix liegt dann vor, wenn die Matrix M oder eine Potenz dieser Matrix M nur von null verschiedene Einträge enthält und es gelten: • Zur Matrix M gibt es einen bis auf skalare Vielfache eindeutigen Fixvektor, in diesem Fall $\begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1000 \\ 0{,}4125 \\ 0{,}4875 \end{pmatrix}$. • Die Potenzen der Matrix M konvergieren gegen eine Grenzmatrix M_G. Für jeden beliebigen Startvektor $\overrightarrow{v_0}$ ist $M_G \cdot \overrightarrow{v_0} = \vec{v}$, das heißt in diesem Fall: $\begin{pmatrix} 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}1000 \\ 0{,}4125 & 0{,}4125 & 0{,}4125 \\ 0{,}4875 & 0{,}4875 & 0{,}4875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1000 \\ 0{,}4125 \\ 0{,}4875 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\vec{v}$ ist somit der Fixvektor. • Die Matrix M_G hat als Spaltenvektoren den auf Spaltensumme 1 normierten Fixvektor. Jede der identischen Spalten der Grenzmatrix verkörpert die zukünftige stabile Verteilung der landwirtschaftlich genutzten Flächen. Langfristig wird sich unabhängig von der Anzahl der Jahre ein stabiler Verteilungszustand in der Verteilung der landwirtschaftlich genutzten Flächen einstellen. In Zukunft werden 10% der Fläche als Ackerland, ca. 41 % als Grünland und ca. 49 % als Waldflächen genutzt. Dieser stabile Verteilungszustand, lässt sich sofort am Fixvektor $\begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1000 \\ 0{,}4125 \\ 0{,}4875 \end{pmatrix}$ ablesen. Im Vergleich lässt sich außerdem erkennen: 2003: $\begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$ zukünftig: : $\begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1000 \\ 0{,}4125 \\ 0{,}4875 \end{pmatrix}$ Die Nutzung der Flächen als Ackerland und Grünland werden leicht zurückgehen und die Nutzung der Waldflächen wird deutlich zunehmen. $M_G = \lim_{n \to \infty} M^n = \begin{pmatrix} 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}1000 \\ 0{,}4125 & 0{,}4125 & 0{,}4125 \\ 0{,}4875 & 0{,}4875 & 0{,}4875 \end{pmatrix}$	6
2f	berechnet die fehlenden fünf Parameter und	Es gilt in diesem Fall: $\begin{pmatrix} m_{11} & 0{,}01 & 0{,}01 \\ m_{21} & m_{22} & 0{,}02 \\ 0{,}01 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}14 \\ 0{,}49 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}14 \\ 0{,}49 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$ Da die Übergangsmatrix stochastisch sein muss, ergibt sich für das Matrixelement m_{33}: $\mathbf{m_{33}} = 1 - 0{,}01 - 0{,}02 = \mathbf{0{,}97}$ *Fortsetzung nächste Seite*	7

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 2f</td><td>

bewertet die Aussage des Politikers.</td><td>

Aufstellen des zugehörigen LGS:

$$\begin{aligned} 0{,}14m_{11} + 0{,}0086 &= 0{,}14 \\ 0{,}14m_{21} + 0{,}49m_{22} + 0{,}0074 &= 0{,}49 \\ 0{,}49m_{32} + 0{,}3603 &= 0{,}37 \end{aligned}$$

Aus $0{,}14m_{11} + 0{,}0086 = 0{,}14$ folgt $\mathbf{m_{11} \approx 0{,}94}$ und somit $\mathbf{m_{21} = 0{,}05}$.
Aus $0{,}49m_{32} + 0{,}3603 = 0{,}37$ folgt: $\mathbf{m_{32} \approx 0{,}02}$ und somit $\mathbf{m_{22} = 0{,}97}$.

Es ergeben sich näherungsweise folgende Übergänge:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb eines Jahres (relative Häufigkeiten)</th><th colspan="3">von</th></tr>
<tr><th>A</th><th>G</th><th>W</th></tr>
<tr><td rowspan="3">zu</td><td>A</td><td>0,94</td><td>0,01</td><td>0,01</td></tr>
<tr><td>G</td><td>0,05</td><td>0,97</td><td>0,02</td></tr>
<tr><td>W</td><td>0,01</td><td>0,02</td><td>0,97</td></tr>
</table>

Langfristig kann das Ziel nur erreicht werden, wenn 94 % der Ackerflächen auch Ackerflächen bleiben, ebenso müssen 97 % der Wald- bzw. 97 % der Grünflächen auch Wald- bzw. Grünflächen bleiben, 5 % der Ackerflächen müssten jährlich zu Grünland werden.

Geprüft wird, nach wie vielen Jahren sich eine stabile Verteilung einstellen kann. Dazu können die vorgegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten in der Tabelle 2.4 als Übergangsmatrix dargestellt werden und anschließend kann diese Matrix beliebig potenziert werden, um eine Grenzmatrix zu ermitteln, dabei gibt der Exponent die Anzahl der Jahre an.

$$\begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}97 & 0{,}02 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}97 \end{pmatrix}^{145} \approx \begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}97 & 0{,}02 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}97 \end{pmatrix}^{150}$$

$$G \approx \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}14 \\ 0{,}49 & 0{,}49 & 0{,}49 \\ 0{,}37 & 0{,}37 & 0{,}37 \end{pmatrix}$$

Das Ziel kann nicht in naher Zukunft erreicht werden, erst in mehr als ca. 145 Jahren könnte bei unverändertern Übergangsverteilungen diese Ziel umgesetzt werden. Das Erreichen des Ziels gilt unter der Voraussetzung gleichbleibender Übergänge somit als unwahrscheinlich, der Politiker hat folglich Recht.
(Auch andere Interpretationen möglich.)

</td><td></td></tr>
<tr><td>2g</td><td>ermittelt, wie man aus den zur Verfügung stehenden Düngemitteln eine Mischung herstellen kann, so dass die zu düngende Fläche ertragsoptimal versorgt wird,</td><td>

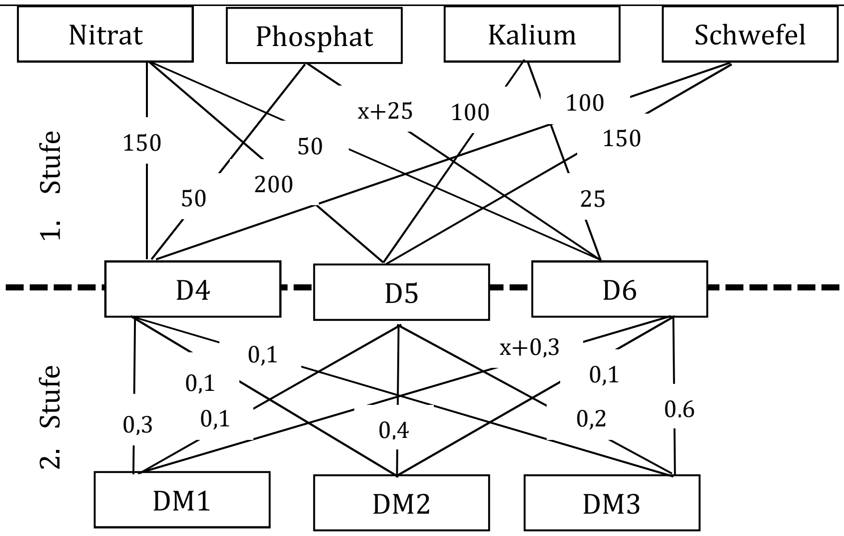
Aufstellen einer zugehörigen Matrizengleichung oder eines LGS:

$$\begin{aligned} 150d_1 + 180d_2 + 120d_3 &= 180 \\ 100d_1 + 120d_2 + 40d_3 &= 100 \\ 25d_1 + 100d_2 + 70d_3 &= 90 \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Lösungen:
$d_1 = 0{,}2$ ($\triangleq$ 20% einer Tonne D1 = 200 kg)
$d_2 = 0{,}5$ ($\triangleq$ 50% einer Tonne D2 = 500 kg)
$d_3 = 0{,}5$ ($\triangleq$ 50% einer Tonne D3 = 500 kg)
Eine optimale Düngemischung müsste aus 200 kg Dünger D1 und jeweils 500 kg Dünger D2 und D3 hergestellt werden.

Fortsetzung nächste Seite

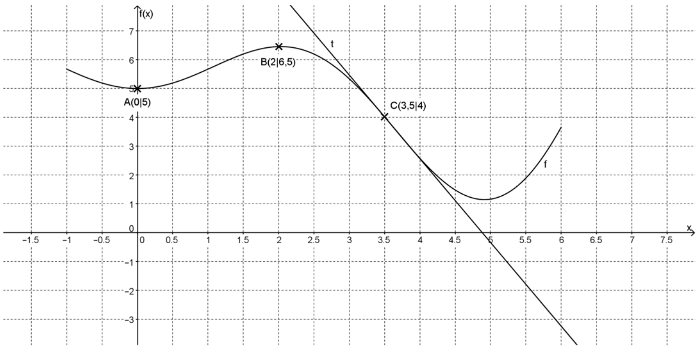
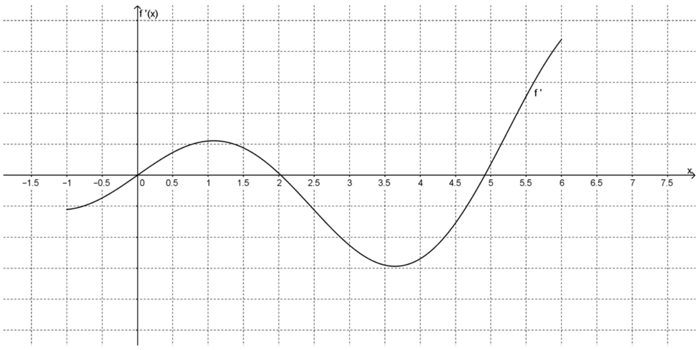
</td><td>6</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g	gibt an, wie viel kg Düngemittelmischung pro Hektar benötigt würden und bestimmt die Kosten pro ha, die für diese Düngmittelmischung anfallen.	$200\text{ kg} + 500\text{ kg} + 500\text{ kg} = 1\,200\text{ kg}$ Es ergibt sich eine Düngemittelmischung von 1 200 kg pro Hektar, in der 180 kg Nitrat, 100 kg Phosphat und 90 kg Kalium enthalten sind. $K = 0{,}2\text{t} \cdot \frac{30{,}00€}{\text{t}} + 0{,}5\text{t} \cdot 40{,}00\frac{€}{\text{t}} + 0{,}5\text{t} \cdot 27{,}50\frac{€}{\text{t}} = \mathbf{39{,}75\ €}$ Die Kosten für einen Hektar Ackerfläche betragen 39,75 €.	
2h	erstellt **eine Stufe** des zugehörigen Verflechtungsdiagramm, das den stufenweisen Herstellungsprozess der Düngemittelmischung darstellt,		8
	bestimmt, in Abhängigkeit vom Parameter x, wie groß der Vorrat an Nährstoffen sein sollte, damit von den Düngemittelmischungen DM1, DM2 und DM3 jeweils 1 000 kg hergestellt werden können,	$\begin{pmatrix} N\\P\\K\\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 50\\ 50 & 0 & x+25\\ 0 & 100 & 25\\ 100 & 150 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2\\ x+0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000\\1000\\1000 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} N\\P\\K\\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50x+80 & 100 & 85\\ x^2+25{,}3x+22{,}5 & 0{,}1x+7{,}5 & 0{,}6x+20\\ 25x+17{,}5 & 42{,}5 & 35\\ 45 & 70 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000\\1000\\1000 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} N\\P\\K\\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000x+265\,000\\ 1\,000x^2+26\,000x+50\,000\\ 25\,000x+95\,000\\ 155\,000 \end{pmatrix}$ (Einheit: g)	
	bestimmt den technologieabhängigen Parameter x und gibt an, wie viele Mengeneinheiten (in kg) für diesen Fall von den anderen Nährstoffen vorgehalten werden müssten.	Für 100 kg Kalium gilt also: $25\,000x + 95\,000 \leq 100\,000$ $x \leq 0{,}2$ $\Rightarrow x \in [0; 0{,}2]$ Für $x_{min} = 0$ gilt: $\begin{pmatrix} N\\P\\K\\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265\,000\\ 50\,000\\ 95\,000\\ 155\,000 \end{pmatrix}$ (Einheit: g) Für $x_{max} = 0{,}2$ gilt: $\begin{pmatrix} N\\P\\K\\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275\,000\\ 55\,240\\ 100\,000\\ 155\,000 \end{pmatrix}$ (Einheit: g) Von den anderen Nährstoffen müssten für diesen Fall 265 kg bis 275 kg Nitrat, 50 kg bis 55,24 kg Phosphat und 155 kg Schwefel vorgehalten werden.	
			40

Aufgabe 1 mit Stochastik:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$,

skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f' und

beurteilt den Wahrheitsgehalt dieser Aussage.</td><td>Ermittlung der Tangentensteigung $m_t \approx -3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.


Diese Aussage muss falsch sein, weil der Wert der zweiten Ableitungsfunktion aufgrund der ersichtlichen Rechtskrümmung an der Stelle $x_2 = 2$ negativ sein muss.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>zeigt, dass die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ Nullstellen der Funktion f_a sind und

berechnet den Inhalt der vorgegebenen Fläche.</td><td>$f_a(0) = -0 \cdot (0 - a)^2 = 0$
$f_a(a) = -a \cdot (a - a)^2 = 0$

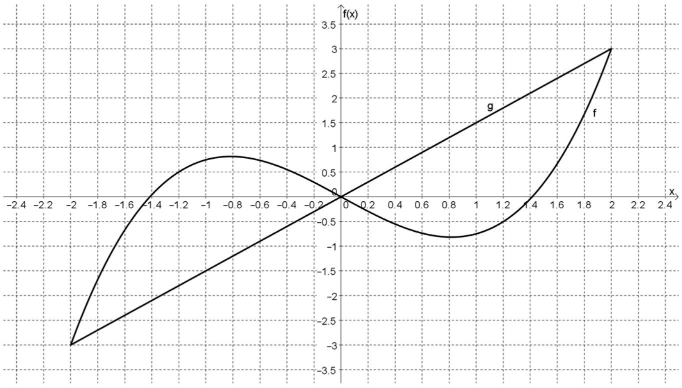
$A = \left|\int_0^a f_a(x)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}a \cdot x^3 - \frac{1}{2}a^2 \cdot x^2 + c\right]_0^a\right|$
$= \left|-\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a \cdot a^3 - \frac{1}{2}a^2 \cdot a^2\right| = \left|-\frac{a^4}{12}\right| = \frac{a^4}{12}$ [FE]</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>gibt die erste Ableitung der Funktion f an und

entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>$f'(x) = 0{,}5^x \cdot \ln(0{,}5)$
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f schneidet niemals den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 1$.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1d</td><td>ermittelt die Steigung m,

zeichnet den Graphen der Funktion g und

begründet, dass der gegebene Ausdruck wahr ist.</td><td>$\frac{3}{4}(-2)^3 - \frac{3}{2}(-2) = m \cdot (-2) \Leftrightarrow m = 1{,}5$

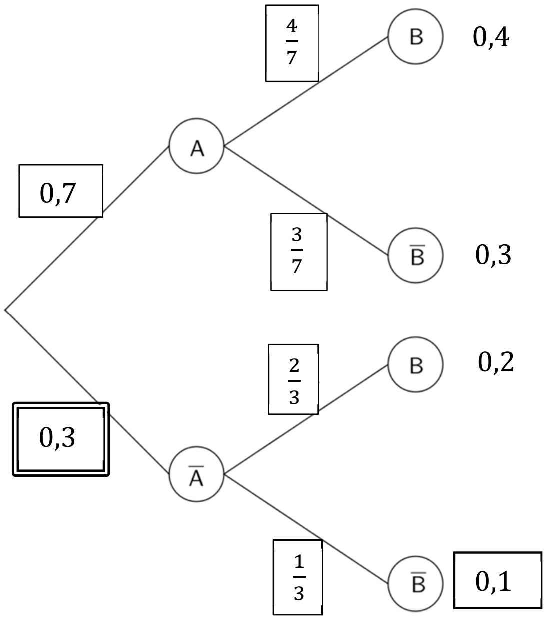


Mit der Differenzenfunktion, die durch $f(x) - g(x)$ bestimmt wird, lässt sich die Maßzahl der beiden Flächen, die beide Graphen im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ einschließen, bestimmen. Diese Maßzahl hat im Bereich $-2 \leq x \leq 0$ ein positives Vorzeichen, da in diesem Bereich alle Funktionswerte von f gegenüber denen von g größer bzw. gleich sind. Im Bereich $0 \leq x \leq 2$ gilt Umgekehrtes und die Maßzahl hat somit ein negatives Vorzeichen.
Dadurch, dass der Graph der Funktion f nur ungerade Exponenten aufweist, verläuft dieser punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Folglich müssen Schnittflächen mit einer Ursprungsgeraden im einem Intervall $I = [g_l;\ g_r]$ mit Intervallgrenzen, die jeweils den gleichen Abstand zu null haben, genau gleich groß sein.
Die Bilanz der Schnittflächen beträgt somit null.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>gibt $P(\overline{B}|\overline{A}) = P_{\overline{A}}(\overline{B})$ an und

ergänzt alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten im oberen Vierfelderdiagramm und
ergänzt alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten im unteren Vierfelderdiagramm.</td><td>$P(\overline{B}|\overline{A}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Fall 1:<table><tr><th>P</th><th>A</th><th>$\overline{A}$</th><th>Summen</th></tr><tr><td>B</td><td>**0,04**</td><td>**0,2**</td><td>**0,24**</td></tr><tr><td>$\overline{B}$</td><td>**0,16**</td><td>0,6</td><td>**0,76**</td></tr><tr><td>Summen</td><td>**0,2**</td><td>0,8</td><td>**1**</td></tr></table>
Fall 2:<table><tr><th>P</th><th>A</th><th>$\overline{A}$</th><th>Summen</th></tr><tr><td>B</td><td>**0,05**</td><td>**0,2**</td><td>**0,25**</td></tr><tr><td>$\overline{B}$</td><td>**0,15**</td><td>0,6</td><td>**0,75**</td></tr><tr><td>Summen</td><td>**0,2**</td><td>0,8</td><td>**1**</td></tr></table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>erläutert, warum der Wert 0,3 in das doppelt gerahmte Kästchen eingetragen werden muss und</td><td>In das doppelt gerahmte Kästchen wird die Wahrscheinlichkeit von $\overline{A}$ eingetragen. Dies ist die Gegenwahrscheinlichkeit von A. Für die Wahrscheinlichkeit von A gilt: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
Dem Wahrscheinlichkeitsbaum ist zu entnehmen, dass $P(A \cap B) = 0{,}4$ und $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$ ist und somit $P(A) = 0{,}7$ gilt.
Die Gegenwahrscheinlichkeit hierzu ist dann 0,3 und muss als Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\overline{A}$ in das doppelt gerahmte Kästchen eingetragen werden.

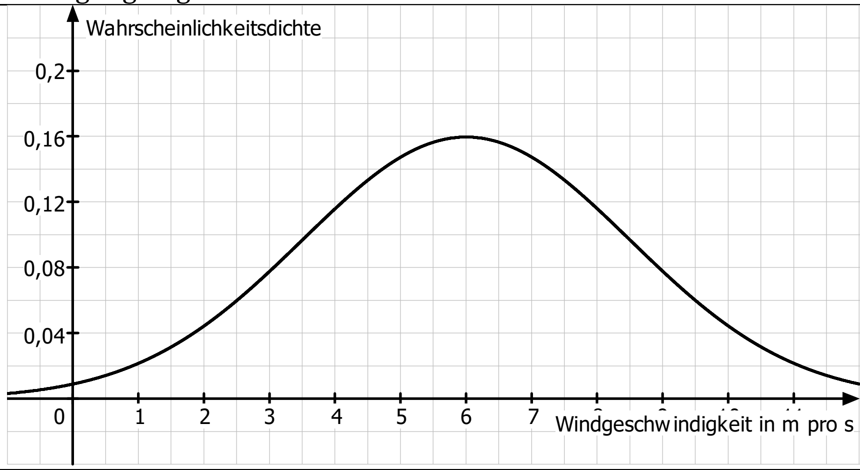
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1f	ergänzt in allen verbleibenden Kästchen in Abb. 1.5 die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.		
1g	gibt an, wie viele Personen befragt wurden, erläutert, was der α-Fehler in diesem Fall misst, und gibt die Gleichung an, mit der der β-Fehler (Fehler 2. Art) berechnet werden kann.	Es wurden 80 Personen bei dem Hypothesentest befragt. Der α-Fehler misst, mit welcher Wahrscheinlichkeit die H_0 Hypothese verworfen wird, obwohl sie zutrifft. In diesem Fall wird man sich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 4,445 % irren, wenn man die Nullhypothese ablehnt, weil mehr als 39 Testergebnisse das untersuchte Ergebnis aufweisen. $\beta - \text{Fehler} = \sum_{k=0}^{39} \binom{80}{k} \cdot 0{,}65^k \cdot 0{,}35^{80-k}$	5
1h	gibt den Modus des Merkmals x an und entscheidet begründet, welches der folgenden drei Boxplotdiagramme in Abb. 1.6 die Häufigkeitsverteilung des Merkmals x korrekt beschreibt.	$x_{Modus} = 2$ Für die angegebene Häufigkeitsverteilung von x lassen sich folgende Parameter ermitteln: Min: 1 Q1: 2 Q2: 4 Q3: 5,5 Max: 8 Beispielsweise liegt der Median bei dem Boxplotdiagramm 3 jedoch bei 5, somit kann dieses die Verteilung nicht korrekt abbilden. Die senkrechten Begrenzungen der Box entsprechen dem ersten und dem dritten Quartil. Beim Boxplotdiagramm 1 stimmt dieses nicht mit dem ermittelten Wert Q3 überein. Das Boxplotdiagramm 2 bildet die Spannweite, den Quartilsabstand und den Median korrekt ab und stellt daher die Häufigkeitsverteilung des Merkmals x korrekt dar.	5
			40

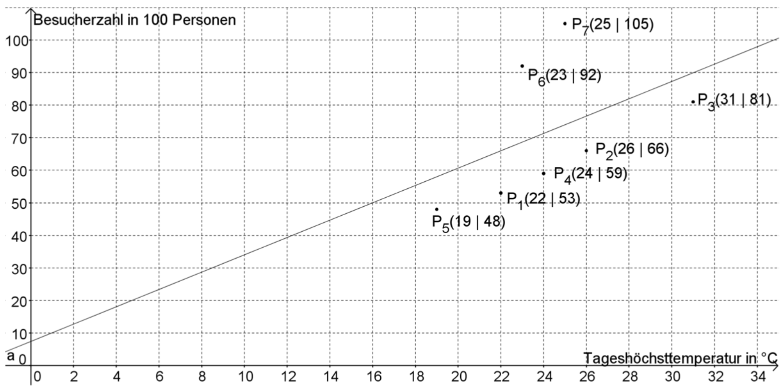
Aufgabe 2: Windenergie

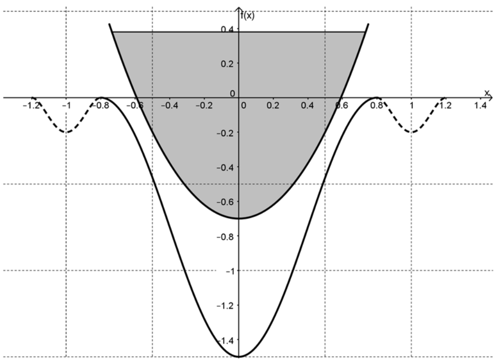
	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	gibt die gewünschten Fakten aus der Abbildung 2.1 an.	Bundesland mit der höchsten installierten Leistung: Niedersachsen. Mittlere installierte Leistung je Windanlage: ca. 1,679 Megawatt. Anteil der neu installierten Leistung an der Gesamtleistung: ca. 12,94 %.	6
2b	prüft, ob der Mittelwert richtig berechnet wurde und ob die getroffene Aussage insgesamt richtig ist.	Zur Berechnung der mittlere Stromproduktion pro Monat durch Windenergie kann die gesamte Windenergie für das Jahr 2015 durch 12 Monate geteilt werden, das ergibt $\frac{85{,}6}{12} \approx 7{,}1$ Mrd. kWh. Die getroffene Aussage ist wahr. Betrachtet man die sechsthöchste und siebthöchste Säule, liegen die Werte der beiden lt. Graphik bei 5,9 und 6 Mrd. kWh, so dass für den Median der Wert 5,95 Mrd. kWh angenommen wird, welcher deutlich unter dem Mittelwert von 7,1 Mrd. kWh liegt.	5
2c	erläutert kurz, warum die Anzahl der befragten Personen, die einen Windpark in ihrer direkten Nachbarschaft akzeptieren, als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann und	Wenn man 35 Passanten dahingehend untersucht, ob sie Windparks in ihrer direkten Nachbarschaft akzeptieren oder nicht, handelt es sich um eine 35-stufige Bernoulli-Kette, da das Einzelexperiment innerhalb einer Stufe nur zwei Ergebnisse haben kann: Erfolg (Passant akzeptiert Windparks in der direkten Nachbarschaft) oder Misserfolg (Passant akzeptiert keine Windparks in der direkten Nachbarschaft). Die Anzahl der Passanten ist ganzzahlig, somit ist die Zufallsvariable abzählbar und mithin diskret. Zuletzt gilt es, die Frage der stochastischen Unabhängigkeit zu klären: Die Tatsache, dass ein einzelner Passant einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptiert, ist vermutlich unabhängig davon, dass ein anderer Passant Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptiert, da dieses jeweils auf der individuellen Meinung der Befragten beruht. X:= Anzahl der Passanten, die Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren.	6
	berechnet, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass • 20 der Befragten …, • mehr als 25 der Befragten einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren.	X ist binomialverteilt mit n = 35 und p = 0,59. $P(X = 20) = \binom{35}{20} \cdot 0{,}59^{20} \cdot 0{,}41^{15} \approx 0{,}1319$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 13,19 % akzeptieren genau 20 der befragten Passanten Windparks in der direkten Nachbarschaft. $P(X > 25) = \sum_{k=26}^{35} \binom{35}{k} \cdot 0{,}59^{k} \cdot 0{,}41^{35-k} \approx 0{,}0451$ Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 25 befragte Passanten Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren beträgt ca. 4,51 %.	

	Anforderungen	Modelllösungen	
2d	erläutert, warum für den Hypothesentest in diesem Fall nicht mit einer Approximation der Binomialverteilung mittels der Normalverteilung gearbeitet werden kann.	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer normalverteilten Zufallsvariablen ist im Gegensatz zu einer binomialverteilten Zufallsvariablen immer symmetrisch um den Erwartungswert. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen ist nur für die Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}5$ symmetrisch. Je weiter p von 0,5 entfernt ist, umso schiefer wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wenn sich die Wahrscheinlichkeiten jedoch auf sehr viele Zufallsvariablen verteilen (n sehr groß ist) fällt diese Asymmetrie zunehmend weniger auf. Daher gilt als Regel für die Approximation: Eine Näherung der Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsvariablen ist dann hinreichend genau, wenn gilt: $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$ (Laplace-Bedingung). Im vorliegenden Fall ist die Standardabweichung zu klein ($\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 2{,}91$). Zwar ist die Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}59$ relativ nah an $p = 0{,}5$, insgesamt werden die Wahrscheinlichkeiten aber auf eher wenige Ausprägungen der Zufallsvariablen verteilt, so dass die Näherungswerte insgesamt zu stark abweichen würden.	4
2e	gibt Annahme- und Ablehnungsbereich für den benannten Hypothesentest mit 35 befragten Personen an und bewertet auf dieser Grundlage das Ergebnis von 14 zustimmenden Personen.	Linksseitiger Hypothesentest: $H_0\colon\ p \geq 0{,}59$ und $H_1\colon\ p < 0{,}59$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha \leq 0{,}02$. X:= Anzahl der Passanten, die Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren. X ist binomialverteilt mit $n = 35$ und $p = 0{,}59$. $P(X \leq 14) \approx 0{,}018 < 0{,}02$ und $P(X \leq 15) \approx 0{,}039 > 0{,}02$ Annahmebereich: $A = [15; 35]$. Ablehnungsbereich: $\overline{A} = [0; 14]$. Das Ergebnis von 14 Passanten, die Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren, liegt im Ablehnungsbereich. D. h. die Wahrscheinlichkeit, dass man ein solches Ergebnis erhält, obwohl tatsächlich 59 % der Bevölkerung in der Region Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren, ist sehr gering, sie liegt bei unter 2 %. Die H_0-Hypothese wird verworfen. Daher wird davon ausgegangen, dass das Ergebnis eher dafür spricht, dass in der Region tatsächlich weniger als 59 % der Bevölkerung Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren.	6
2f	erklärt die Berechnung des Gruppenmitgliedes im Sachzusammenhang und nimmt begründet zu beiden Meinungen Stellung.	$\binom{35}{14} \cdot 0{,}40^{14} \cdot 0{,}60^{21} \approx 0{,}137$ Es wird bei einer Eintrittswahrscheinlichkeit von 40 % die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass genau 14 von 35 Personen einen Windpark in direkter Nachbarschaft akzeptieren. Die Tatsache, dass 14 von 35 zufällig ausgewählten Passanten Windparks in der direkten Umgebung akzeptieren würden, ist grundsätzlich für jeden relativen Anteil über 0 und unter 1 möglich, da es sich um ein Zufallsexperiment handelt. Am wahrscheinlichsten ist es, dass genau 14 von 35 zustimmen, wenn der Anteil der regionalen Bevölkerung, der Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptiert, tatsächlich bei 40 % liegt, aber letztlich beträgt auch diese Wahrscheinlichkeit nur ca. 13,7 %. *Fortsetzung nächste Seite*	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f		Auch das Konfidenzintervall könnte in die Begründung einfließen: Das Konfidenzintervall bei einem Vertrauensniveau von 95 % liegt bei einem Anteil von 23,77 % – 56,23 % der regionalen Bevölkerung, die einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren. Somit wäre es aus stochastischer Sicht nicht sinnvoll, aufgrund des Befragungsergebnisses auf einen Anteil von 40 % zu schließen.	
2g	skizziert den Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Windgeschwindigkeit in Küstenlagen unter Berücksichtigung von μ und σ.		4
2h	berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Windgeschwindigkeit an der Küste über der Einschaltwindgeschwindigkeit liegt und ermittelt, wie hoch eine Einschaltwindgeschwindigkeit höchstens sein darf, damit die Anlage an der Küste mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % eingeschaltet ist.	X:= Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde X ist normalverteilt mit $\mu = 6$ und $\sigma = 2{,}5$: $f(x) = \frac{1}{2{,}5\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{2{,}5}\right)^2}$ $P(X > 4) = \int_4^6 f(x)dx + 0{,}5 \approx 0{,}7881$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Windgeschwindigkeit über der Einschaltgeschwindigkeit von 4 m pro s liegt, beträgt ca. 78,81 %. $P(X > e) = 0{,}9 = 0{,}5 + \int_e^6 f(x)dx \Rightarrow e \approx 2{,}796$ Die Einschaltwindgeschwindigkeit müsste bei unter 2,796 m pro s liegen, damit die Anlage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % eingeschaltet wird.	5
			40

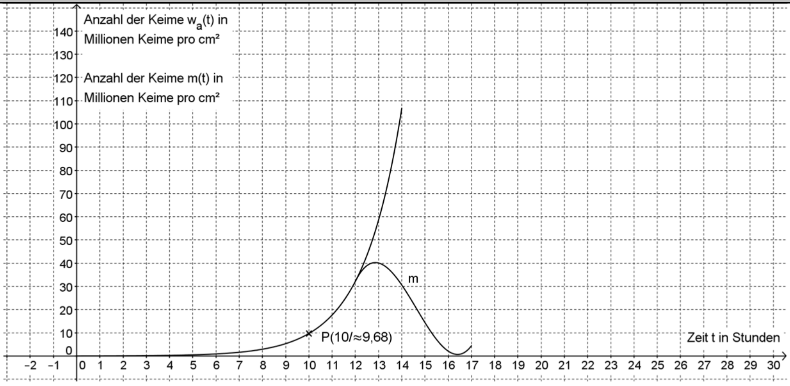
Aufgabe 3: Freizeitpark

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	zeichnet die Wertepaare ins Koordinatensystem ein, skizziert die Regressionsgerade (ohne Berechnung) und prüft, ob ein linearer Zusammenhang besteht.	 Mithilfe des eingeführten CAS kann beispielsweise der Korrelationskoeffizient $r_m \approx 0{,}47$ ermittelt werden, der eine geringe Korrelation von Tageshöchsttemperatur und Besucherzahl zeigt. Folglich besteht über die ganze Woche betrachtet kein linearer Zusammenhang zwischen Besucherzahl und Tageshöchsttemperatur.	6
3b	berechnet die Uhrzeit, zu der der eingehende Besucherstrom im Laufe eines Tages sein Maximum annimmt.	$h_k'(t) = -\frac{5}{k} \cdot e^t \cdot (t^2 - 6t - 8)$ $h_k''(t) = -\frac{5}{k} \cdot e^t \cdot (t^2 - 4t - 14)$ Notwendige Bedingung: $h_k'(t) = 0$ $h_k'(t) = 0 \Leftrightarrow t_{e1} = -\sqrt{17} + 3 \vee t_{e2} = \sqrt{17} + 3$. Hinreichende Bedingung: $h_k''(t_e) < 0 \wedge h_k'(t_e) = 0$ $t_{e1} \notin D(h_k)$ $h_k''(t_{e2}) \approx -\frac{51\,138{,}73}{k} \Rightarrow h_k''(t_{e2}) < 0$, da $20 \leq k \leq 50$ gilt. Somit ist t_{e2} Stelle eines Hochpunktes. Der Besucherstrom nimmt um ca. 15:07 Uhr sein Maximum an.	5
3c	zeigt, dass im Laufe der Kassenöffnungszeit laut Modell 2 796 vollzahlende Besucher den Park besuchten und ermittelt, bis zu welcher Uhrzeit die Hälfte der vollzahlenden Besucher den Park betrat.	$B_k = \int_0^8 h_k(t)dt = \frac{30e^8}{k} + \frac{50}{k}$ Für $k = 32$: $B_{32} \approx 2\,796$ Bei einem Eintrittspreis in Höhe von 32,00 Euro haben an diesem Tag laut Modell etwa 2 796 vollzahlende Besucher den Park besucht. $1\,398 = \int_0^z h_{32}(t)dt \Rightarrow z_1 \approx 6{,}57 \vee z_2 \approx 8{,}67$ $z_2 \notin D(h_{32})$ Bis ca. 14:34 Uhr kam die Hälfte der Besucher in den Park.	6
3d	begründet, warum bei dem alten Park der Preis k keinen Einfluss auf den Umsatz hat.	Aufgrund der Faktorregel bleibt der Faktor $-\frac{5}{k}$ sowohl beim Differenzieren als auch beim Integrieren erhalten. Dadurch, dass der Umsatz das Produkt aus Besucherzahl und Eintrittspreis ist, kürzt sich der Parameter k heraus und beeinflusst somit nicht mehr die Umsatzhöhe.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
3e	erläutert, warum $d = -0{,}75$ gelten muss, ergänzt die Zeichnung um das skalierte Koordinatensystem und ermittelt den horizontalen Abstand beider Hochpunkte.	$d = -0{,}75$ ergibt sich als Summe aus der Amplitude $a = 0{,}75$ und dem Wert des Tiefpunktes $f(x_e) = -1{,}5$: $0{,}75 + (-1{,}5) = -0{,}75$.  Die beiden Hochpunkte sind eine Periodenlänge voneinander entfernt. Hier ist auch ein graphischer Lösungsweg sinnvoll, alternativ lässt sich aus der Funktionsgleichung $\frac{5\pi}{4} = b$ ablesen und da $p = \frac{2\pi}{b}$ gilt, muss die Periodenlänge 1,6 Meter betragen.	6
3f	weist nach, dass in das Boot bei einer Überladung kein Wasser laufen könnte.	$g(x) = 2x^2 + b$ mit $-0{,}75 \leq x \leq 0{,}75$ Wasser droht in das Boot zu laufen, wenn es tiefer als 1,125 Meter ($2 \cdot 0{,}75^2 = 1{,}125$) sinkt. $f(x) = g(x)$ mit $b = -1{,}125$ $\Rightarrow x_1 \approx -0{,}74 \vee x_2 \approx -0{,}36 \vee x_3 \approx 0{,}36 \vee x_4 \approx 0{,}74$ Das Boot kann folglich keine 1,125 Meter tief sinken und somit kann auch kein Wasser ins vertikal sinkende Boot laufen.	4
3g	prüft, ob der Übergang an der Stelle $x = 0{,}8$ sprung- und knickfrei ist.	$i(x) = \begin{cases} i_1(x) & \text{für } -1{,}2 \leq x < -0{,}8 \\ 0{,}75 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{0{,}8}(x - 0{,}4)\right) - 0{,}75 & \text{für } -0{,}8 \leq x \leq 0{,}8 \\ -125x^4 + 500x^3 - 740x^2 + 480x - 115{,}2 & \text{für } 0{,}8 < x \leq 1{,}2 \end{cases}$ $i_2(0{,}8) = 0$ und $i_3(0{,}8) = 0$ Der Übergang beider Abschnitte an der Stelle $x_2 = 0{,}8$ ist sprungfrei. $i'(x) = \begin{cases} i_1'(x) & \text{für } -1{,}2 \leq x < -0{,}8 \\ \frac{15 \cdot \pi}{16} \cdot \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{4}(x - 0{,}4)\right) & \text{für } -0{,}8 \leq x \leq 0{,}8 \\ -500x^3 + 1\,500x^2 - 1480x + 480 & \text{für } 0{,}8 < x \leq 1{,}2 \end{cases}$ $i_2'(0{,}8) = 0$ und $i_3'(0{,}8) = 0$ Der Übergang beider Abschnitte an der Stelle $x_2 = 0{,}8$ ist knickfrei.	5
3h	ermittelt den Term i_1, so dass die Ordinatenachse Symmetrieachse des Graphen der Funktion i ist.	Allgemeine Gleichung: $i_1(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ $i_1'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ Bedingungen: I. $i_1(-0{,}8) = 0$ II. $i_1(-1{,}2) = 0$ III. $i_1'(-0{,}8) = 0$ IV. $i_1'(-1{,}2) = 0$ V. $i_1(-1) = -0{,}2$ (aufgrund von $i_3(1) = -0{,}2$) $\Rightarrow i_1(x) = -125x^4 - 500x^3 - 740x^2 - 480x - 115{,}2$	5
			40

Aufgabe 3: Spülschwamm

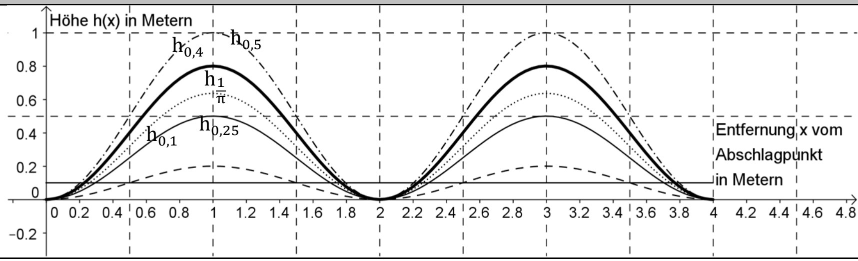
	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	zeigt, dass der Verlauf für $a = 0{,}024$ wiedergegeben wird und beschreibt den Verlauf des Graphen anhand von zwei Aspekten im Sachzusammenhang.	$w_{0,024}(10) = 0{,}024 \cdot e^{0,6\cdot 10} \approx 9{,}68$ Eine anfangs sehr geringe, aber progressiv zunehmende Steigung des Graphen $w_{0,024}$ bedeutet, dass die Bakterienanzahl zuerst sehr langsam wächst, die Anzahl bleibt beispielsweise bei $t = 8$ noch unter 3 Mio. Keimen pro cm^2. Die progressive Zunahme bedeutet im Sachzusammenhang, dass sich die Bakterienzahl immer schneller vergrößert, und beispielsweise nach vierzehn Stunden schon auf über 100 Mio. Keime pro cm^2 angewachsen ist.	4
3b	ermittelt, nach welcher Zeit die Anzahl erreicht wird.	Die Gleichung $50 = 0{,}024 \cdot e^{0,6t}$ ergibt $t \approx 12{,}74$. Die Anzahl von 50 Millionen Keimen pro cm^2 wird also nach 12 Stunden und etwa 44 Minuten erreicht.	3
3c	berechnet die Generationszeit t_g laut Modellfunktion, ermittelt den Wert für p in der Gleichung und stellt dar, in welchem Zusammenhang die Generationszeit und der Faktor p stehen.	Die Gleichung $2a = a \cdot e^{0,6t}$ führt zu $t \approx 1{,}16$. Die Generationszeit beträgt also ca. 1 Stunde und 9 Minuten. Aus $a \cdot e^{0,6\cdot t} = a \cdot 2^{p\cdot t}$ folgt $p = \frac{0{,}6}{\ln(2)} = \frac{3}{5\cdot\ln(2)} \approx 0{,}866$. Eine Verdopplung des Anfangsbestandes tritt ein, wenn $p \cdot t = 1$ ist. Daraus ergibt sich die Generationszeit $t_g = \frac{1}{p}$.	5
3d	bestimmt in Abhängigkeit von a, nach welcher Zeit laut Modell eine Wachstumsgeschwindigkeit von 80 Mio. Keimen/ cm^2 pro Stunde erreicht wird und prüft, ob dieser Zeitpunkt für die zugelassenen Anfangsbestände im Definitionsbereich des Modells liegt.	Es gilt $w_a'(t) = 0{,}6a \cdot e^{0,6t}$. Aus $0{,}6a \cdot e^{0,6t} = 80$ folgt $t = \frac{5\cdot\ln\left(\frac{400}{3a}\right)}{3}$. Der Ansatz $t = \frac{5\cdot\ln\left(\frac{400}{3a}\right)}{3} \leq 14$ führt zu $a \geq \frac{400}{3e^{8,4}} \approx 0{,}02998$. Der Zeitpunkt liegt also nur für $a \geq 0{,}02998 \approx 0{,}03$ innerhalb des Definitionsbereiches von w_a. Geprüft werden kann auch durch die Berechnung einzelner Werte: Für den Anfangswert $a = 0{,}01$ ergibt sich $t \approx 15{,}83 \notin D$, aus $a = 0{,}02$ folgt $t \approx 14{,}67 \notin D$ und aus $a = 0{,}03$ folgt $t \approx 13{,}99$ D. Ergebnis: Der errechnete Zeitpunkt liegt nicht für alle Anfangswerte innerhalb des Definitionsbereiches.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
3e	skizziert den Verlauf der Keimentwicklung nach dem neuen Modell und interpretiert im Sachzusammenhang die Tatsache, dass die Funktion m im Definitionsbereich keine Nullstellen aufweist.	 Die Tatsache, dass die Funktion m im Definitionsbereich keine Nullstellen aufweist, bedeutet im Sachzusammenhang, dass das keimtötende Mittel die Keime nicht vollständig abtötet.	5
3f	bestimmt die maximale Keimanzahl und bestimmt den Zeitpunkt nach Untersuchungsbeginn (in Stunden), zu dem die Keimanzahl am schnellsten sinkt.	Gesucht ist der lokale Hochpunkt der Funktion m. Für den zweiten Teilabschnitt der Funktion m gilt: $m_2'(t) = 5{,}331t^2 - 156t + 1124{,}5$. $m_2'(t_e) = 0$ ergibt $t_{e1} \approx 12{,}86$ und $t_{e2} \approx 16{,}40$. Aus der Skizze ist zu erkennen, dass x_{e1} zum Hochpunkt gehört. $m(t_{e1})$ ergibt ca. 40,242. Die max. Keimanzahl liegt also bei ca. 40,242 Mio. Keimen pro cm^2. Gesucht ist der Wendepunkt der Funktion. Für den zweiten Teilabschnitt der Funktion m gilt: $m_2''(t) = 10{,}662x - 156$. $m_2''(x) = 0$ ergibt $x_w \approx 14{,}63$. An der Skizze lässt sich erkennen, dass sich in diesem Bereich ein fallender Wendepunkt befindet. Nach ca. 14,63 Stunden sinkt die Keimanzahl also am schnellsten.	6
3g	beschreibt den Verlauf des Graphen, erläutert die Bedeutung des Wertes 50 im Sachzusammenhang und ermittelt die Werte für b und k so, dass der Graph von s an der Stelle $t = 11$ sprung- und knickfrei verläuft.	Mit dem zweiten Abschnitt der Funktion s wird ein nach oben beschränktes exponentielles Wachstum beschrieben, d. h. der Graph nähert sich asymptotisch dem Grenzwert 50, der sogenannten oberen Schranke. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass nach diesem Modell die Bakterienkultur eine Größe von 50 Mio. Keimen pro cm^2 nicht überschreitet. Sprungfrei bedeutet, dass die Funktion an der Stelle $t = 11$ stetig ist. Für den ersten und zweiten Teilabschnitt der Funktion muss sich bei $t = 11$ der gleiche Funktionswert ergeben. Knickfrei bedeutet, dass außerdem die Steigung in beiden Funktionsteilen an der Stelle $t = 11$ gleich ist. Mit der oberen Schranke $G = 50$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem: I. $0{,}024 \cdot e^{0{,}6 \cdot 11} = 50 - b \cdot e^{k \cdot 11}$ II. $0{,}0144 \cdot e^{0{,}6 \cdot 11} = -k \cdot b \cdot e^{k \cdot 11}$ mit den Lösungen: $k \approx -0{,}327$ und $b \approx 1182{,}48$. Für $k \approx -0{,}327$ und $b \approx 1182{,}48$ ist der Graph der Funktion s näherungsweise sprung- und knickfrei.	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
3h	berechnet die Materialkosten für einen Schwamm.	Um das Volumen des Schwammes berechnen zu können, muss zunächst die Größe der Fläche des Querschnittes bestimmt werden. Eine Funktion 3. Grades hat folgende allgemeine Gleichung: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ Die gegebenen Informationen enthalten folgende Bedingungen: $f(0) = 3, f'(0) = 0, f(5) = 4, f'(5) = 0$ Die Lösungen des zugehörenden Gleichungssystems lauten: $a = -\frac{2}{125},\ b = \frac{3}{25},\ c = 0,\ d = 3.$ Also: $f(x) = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 + 3.$ Die Nullstelle der zugehörenden Funktion f liegt bei $x \approx 9{,}55$. Der Flächeninhalt ergibt sich wegen der Symmetrie aus $A = 2 \cdot \int_{-2}^{9{,}55} f(x)dx \approx 73{,}20$ FE. Daraus ergibt sich ein Volumen von $V = 73{,}20\ \text{cm}^2 \cdot 1{,}5\text{cm} \approx 109{,}81\ \text{cm}^3$. Bei Materialkosten von 2 000,00 € pro m^3 ergeben sich 0,002 € pro cm^3 und damit etwa 0,22 € pro Schwamm.	7
			40

Aufgabe 3: Minigolfanlage

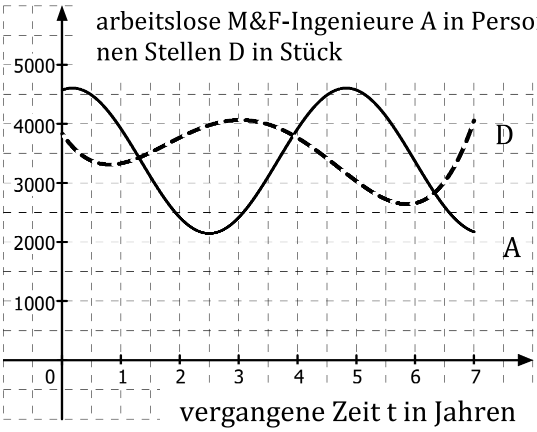
	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	begründet, warum der Verlauf des Hindernisses in Abb. 3.1 mit Hilfe einer trigonometrischen Funktion beschrieben werden kann.	Eine trigonometrische Funktion verläuft periodisch. Das Hindernis besteht aus zwei aufeinanderfolgenden gleichen Wellen, die durch einen Abschnitt einer trigonometrischen Funktion, der zwei Perioden umfasst, dargestellt werden können.	2
3b	berechnet, wie viele Kubikmeter Wasser sich dort nach einem Regenguss maximal ansammeln können.	Berechnung der Intervallgrenzen: $0{,}1 = 0{,}25 \cdot \sin(\pi \cdot (x - 0{,}5)) + 0{,}25$ $\Rightarrow\ x_1 \approx 0.295, x_2 \approx 1{,}705, x_3 \approx 2{,}295$ und $x_4 \approx 3{,}705$. Die relevanten Stellen für die Berechnung der anfallenden Wassermenge sind x_2 und x_3. $V = 0{,}95 \cdot \int_{x_2}^{x_3} \left(0{,}1 - h(x)\right) dx \approx 0{,}0368\ [m^3]$ Zwischen den beiden Hügeln können sich maximal ca. $0{,}0368\ m^3$ Wasser ansammeln.	5
3c	stellt für die Flugbahn des Balls die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit zugehörigem Definitionsbereich auf und	Flugbahnen können durch Funktionen zweiten Grades modelliert werden. $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Bedingungen: $A(0{,}5\ \vert h(0{,}5))$: $p(0{,}5) = h(0{,}5) = 0{,}25$ Steigung bei $x = 0{,}5$ ist tangential: $p'(0{,}5) = h'(0{,}5) \approx 0{,}785$ Punkt $B(1\ \vert 0{,}61)$: $p(1) = 0{,}61$ Daraus folgt: $a = -0{,}130, b = 0{,}915$ und $c = -0{,}175$. Also: $p(x) = -0{,}13x^2 + 0{,}915x - 0{,}175$. Bestimmung der Nullstellen: $x_1 \approx 0{,}20$ und $x_2 \approx 6{,}84$ Da der Ball bei $x = 0{,}5$ die Bahn verlässt und bei ca. 6,84 landet, ist das Intervall $I\ [0{,}5; 6{,}84]$ der Definitionsbereich der Funktion p.	5
	untersucht, ob ein Fangnetz aufgebaut werden muss.	Bestimmung der maximalen Höhe durch ein CAS ergibt: $x_e \approx 3{,}52$ $p(3{,}52) \approx 1{,}44$ Der Ball erreicht nach ca. 3,52 m seine maximale Flughöhe von ca. 1,44 m und somit muss ein Fangnetz aufgebaut werden.	
3d	begründet, dass für die in Abb. 3.2 gezeigten Graphen der Funktionenschar $h_{a,d}$ für die Parameter gilt: $a = d$.	Der Parameter a entspricht der Amplitude. Durch den Parameter d wird die Sinuskurve so um den Wert von d nach oben verschoben, dass die Minima der Graphen jeweils auf der Abszissenachse liegen. Da die Minima bei allen Graphen der Funktionsschar auf der Abszissenachse liegen, muss $a = d$ gelten.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
3e	skizziert den Verlauf des Graphen der Funktion $h_{0,4}$ in Abb 3.2.		3
3f	berechnet die Wendepunkte des Graphen der Funktion h_a und	$h_a'(x) = \pi \cdot a \cdot \cos\big(\pi \cdot (x-0{,}5)\big)$ $h_a''(x) = -\pi^2 \cdot a \cdot \sin(\pi \cdot (x-0{,}5))$ $h_a'''(x) = -\pi^3 \cdot a \cdot \cos\big(\pi \cdot (x-0{,}5)\big)$ Notwendige Bedingung, mit $a > 0$: $h_a''(x) = 0 \Rightarrow x_W = k + 0{,}5$ mit $k \in \mathbb{N}$ Hinreichende Bedingung: $h_a'''(k+0{,}5) = -\pi^3 \cdot a \cdot \cos\big(\pi \cdot (k+0{,}5-0{,}5)\big)$ $h_a'''(k+0{,}5) = -\pi^3 \cdot a \cdot \cos(\pi \cdot k) \neq 0$, da $k \in \mathbb{N}$ $h_a(k+0{,}5) = a \cdot \sin\big(\pi \cdot (k+0{,}5-0{,}5)\big) + a = a$ $\Rightarrow$WP $(k+0{,}5 \vert a)$ mit $k \in [0; 3]$	6
	begründet, warum die Wendestellen vom Parameter a unabhängig sind.	Zum einen verschiebt der Parameter a den Graphen nach oben. Das beeinflusst die Höhe des Wendepunktes, aber nicht die Stelle des Wendepunktes. Zum anderen verändert der Parameter a die Amplitude. Dies verschiebt die Extremwerte und verändert die Steigung im Wendepunkt, aber ebenfalls nicht die Stelle des Wendepunktes. Daher sind die Wendestellen vom Parameter a unabhängig.	
3g	bestimmt den Wert für den Parameter a in der Funktionsgleichung für die Funktion h_a so, dass die Wünsche des Besitzers erfüllt sind.	Das Hindernis hat die maximale Höhe, wenn die Steigung im Wendepunkt 45° beträgt. Maximale Steigung (im Wendepunkt) $m = h_a'(x) = a \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot (x-0{,}5))$ Der Steigungswinkel von 45° entspricht einer Steigung von $m = \tan 45° = 1$. Für die Steigung $m = 1$ und $a > 0$ muss gelten: $m = f'(0{,}5) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$ Der Wert für a beträgt ca. 0,318, damit der maximale Steigungswinkel 45° beträgt.	4
3h	untersucht mit Hilfe einer Regression, welcher Funktionstyp geeignet ist, den Verlauf des Anstiegs des Hindernisses im Bereich $0 \leq x \leq 2$ möglichst genau zu beschreiben und begründet die Wahl des Funktionstyps.	Die Regressionen für ganzrationale Funktionen dritten und vierten Grades sowie die trigonometrische Regression ergeben folgende mögliche Funktionsgleichungen: $g_3(x) \approx -0.1x^3 + 0{,}37x^2 - 0{,}15x$ $g_4(x) \approx -0{,}08x^4 + 0.23x^3 - 0{,}03x^2$ $g_{sin}(x) \approx 0{,}21 \cdot \sin(1{,}53x - 1{,}9) + 0{,}21$ Da der Verlauf des Anstiegs einen Wendepunkt hat, kommt die Regression zweiten Grades nicht in Frage. Die Regressionen g_3 und g_{sin} haben bei $x = 0$ eine negative Steigung und sind deshalb weniger geeignet. Aus diesem Grund ist g_4 am besten geeignet.	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
3i	entscheidet begründet, ob mit der gegebenen Formel die benötigte Menge Beton berechnet werden kann.	$V = \pi \cdot \left(\int_0^2 \left(g(x)\right)^2 \,dx + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 \right)$ $V = \pi \cdot \int_0^2 \left(g(x)\right)^2 \,dx + \pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}2$ $V_1 = \pi \cdot \int_0^2 (g(x))^2 \,dx$ ist das Volumen des ersten Abschnitts, der das Rotationsvolumens der Funktion g im Intervall [0; 2] beschreibt. $V_2 = \pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}2$ ist das Volumen des zweiten Abschnitts, betrachtet als Zylinder. Radius des Zylinders: $r_Z = 0{,}4$, Höhe: h=0,2. Da nur jeweils die obere Hälfte aus Beton gegossen werden muss, fehlt in der gegebenen Formel der Faktor $\frac{1}{2}$. Mit der gegebenen Formel kann die benötigte Menge Beton nicht berechnet werden.	6
			40

Aufgabe 3: Der Schweinezyklus

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt die Entwicklung der Schweinepreise anhand von zwei wesentlichen Aspekten.	Der Schweinepreis schwankt in der Zeit von 1896 – 1914 sehr stark. Hoch- und Tiefpreisphasen wechseln sich in einem Rhythmus von ca. 4 Jahren regelmäßig ab. Insgesamt jedoch hat der Preis im Trend zugenommen.	4
3b	prüft, ob die Steigung der eingezeichneten Trendlinie gemäß Abb. 3.1 näherungsweise richtig angegeben wurde.	Zwei Punkte auf der Geraden aus der Graphik ablesen: z. B. $P_1(3\|80)$ und $P_2(14\|100)$ $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{100-80}{14-3} = \frac{20}{11} \approx 1{,}82$ Der Unterschied zwischen der angegebenen Steigung und der berechneten lässt sich durch Ungenauigkeit beim Ablesen aus der Graphik erklären.	4
3c	erläutert in groben Schritten, wie er eine solche Regressionsgerade heute mittels CAS ermitteln würde.	Heute würde man die Wertepaare (Zeit| Preis) in eine Tabelle eintragen und mittels CAS-Befehl eine Regression durch einen vorher geeignet ausgewählten Funktionstyp (in diesem Fall eine lineare Funktion, da es um eine Trendbetrachtung geht) durchführen lassen.	3
3d	ermittelt die maximale, die minimale und die mittlere Anzahl an arbeitslosen M&F-Ingenieuren im betrachteten Zeitraum und berechnet, nach wie vielen Jahren die größte Zunahme arbeitsloser Ingenieure zu verzeichnen ist	Für die maximale Anzahl wird der Funktionswert des Hochpunktes, für die minimale Anzahl der Funktionswert des Tiefpunktes benötigt. Diese können z. B. mittels des CAS durch die Kurvenanalyse bestimmt werden: Maximale Anzahl: 4 605 Minimale Anzahl: 2 145 Mittlere Anzahl: $\frac{1}{7}\int_0^7 A(t)dt \approx 3\,431$ Im betrachteten Zeitraum waren maximal 4 605, minimal 2 145 und im Mittel ca. 3 431 M&F Ingenieure arbeitslos. $A(t) = 1\,230 \cdot \sin(1{,}35t + 1{,}34) + 3\,375$ $A''(t) = -2\,241{,}68 \cdot \sin(1{,}35t + 1{,}34)$ $A'''(t) = -3\,026{,}26 \cdot \cos(1{,}35t + 1{,}34)$ notwendige Bedingung: $A''(t) = 0$ $t_{W1} \approx 1{,}33$, $t_{W2} \approx 3{,}66$, $t_{W3} \approx 5{,}99$ Hinreichende Bedingung: $A''(t_W) = 0$ und $A'''(t_W) \neq 0$ $A'''(3{,}66) \neq 0$ Nach etwa 3,66 Jahren ist laut Abbildung 3.3 die größte Zunahme arbeitsloser Ingenieure zu verzeichnen.	8
3e	gibt die Gleichung der Funktion D an,	$D(t) = 26t^4 - 336t^3 + 1\,295t^2 - 1\,486t + C$ mit $0 \leq t \leq 7$ $D(2) = 3\,769 \Longrightarrow C = 3\,833$ $D(t) = 26t^4 - 336t^3 + 1\,295t^2 - 1\,486t + 3\,833$ mit $0 \leq t \leq 7$ *Fortsetzung nächste Seite*	8

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3e	zeichnet den Graphen von D(t) in die Abb. 3.3 mit ein und		
	beurteilt, ob zwischen 2007 und 2014 ein „Schweinezyklus“ auf dem Arbeitsmarkt der M&F-Ingenieure beobachtet werden kann.	Im Großen und Ganzen entspricht der Verlauf einem Schweinezyklus, (wobei der Hochpunkt des Angebotes und der Tiefpunkt der Nachfrage bzw. anders herum nicht exakt zeitgleich eintreten). Es ist erkennbar, dass die verzögerte Mengenanpassung zum für den Schweinezyklus typischen Auseinanderfall von Angebot und Nachfrage führt.	
3f	ermittelt für Gleichung (2) alle Stellen t im Definitionsbereich, an denen die Gleichung erfüllt ist.	$0 = A'(t) - d(t)$ gilt z. B. an der Stelle $t_1 \approx 0{,}43$ ($t_2 \approx 2{,}61$; $t_3 \approx 5{,}14$)	3
3g	interpretiert die Aussagen der beiden Gleichungen im Sachzusammenhang.	(1) Die Bestandswerte beider Funktionen sind identisch, d. h. die Anzahl der offenen Stellen entspricht exakt der Anzahl der arbeitslosen M&F Ingenieure. (2) Die Änderung der Differenzenfunktion ist null, d. h. an dieser Stelle nimmt die Differenzenfunktion einen lokalen Extrempunkt an, der Unterschied zwischen der Anzahl der offenen Stellen und der Anzahl der Arbeitslosen ist maximal.	4
3h	legt die Bedeutung des Parameters w im Sachkontext dar und untersucht, wie stark sich die maximalen Anzahlen arbeitsloser M&F-Ingenieure in Abhängigkeit von w innerhalb eines Zyklus unterscheiden werden.	Die Funktion $S_w(t)$ ist die additive Verknüpfung der trigonometrischen Funktion A(t) mit einer linearen Funktion, die die Steigung w hat. Der Parameter w entspricht somit dem langfristigen Trend, er gibt an, wie stark sich die mittlere Anzahl an arbeitslosen Ingenieuren im langfristigen Trend jährlich ändert. Die benachbarten lokalen Hochpunkte haben immer den gleichen Abstand zueinander, da der Graph der Ableitungsfunktion einer um w verschobenen Kosinusfunktion entspricht. Der Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt ist von w abhängig, zwischen zwei Hochpunkten liegt jedoch stets eine Periodenlänge. Periodenlänge: $\frac{2\pi}{1{,}35} \approx 4{,}65$ Innerhalb einer Periodenlänge ändert sich der Funktionswert um $p \cdot w \approx 4{,}65w$. Daher werden sich die maximalen Anzahlen der arbeitslosen M&F Ingenieure um das 4,65fache von w unterscheiden.	6
			40