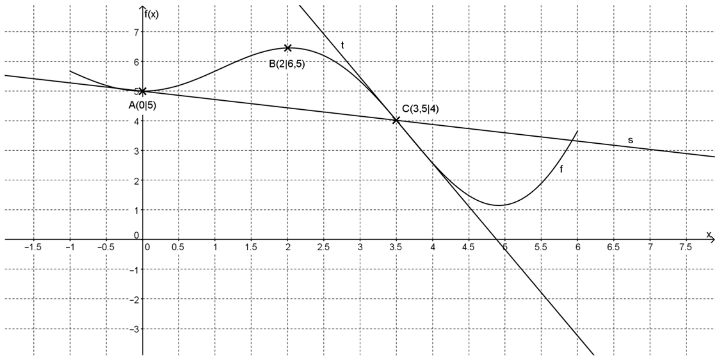
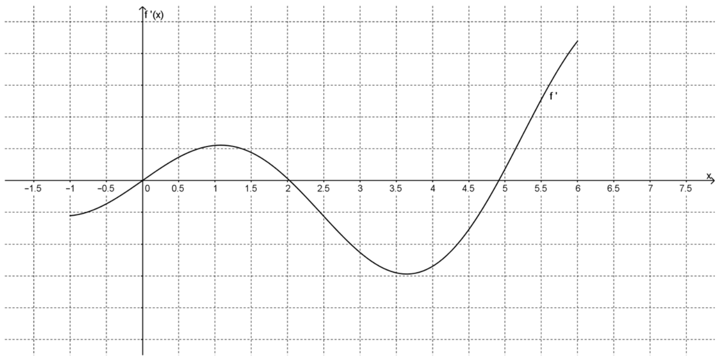
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$,

skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f' und

ermittelt den Wert der durchschnittlichen Steigung.</td><td>Ermittlung der Tangentensteigung $m_t \approx -3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.

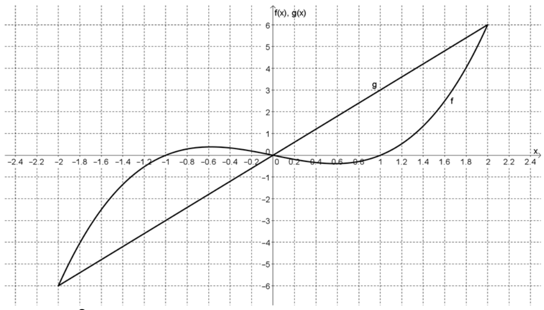




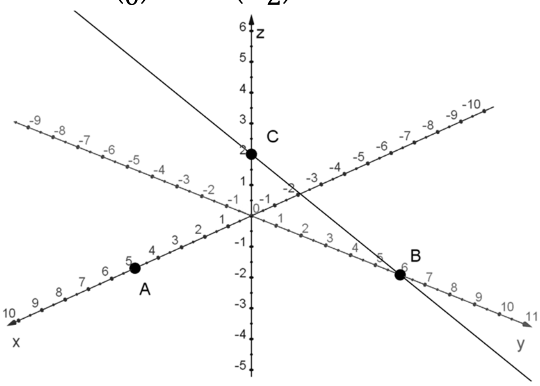
Ermittlung der Sekantensteigung $m_s \approx -0{,}3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>gibt die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an und entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>$f'(x) = 3e^x$

<table>
<tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="3">Begründung: $f(0) = 3e^0 + 1 = 4$.</td></tr>
<tr><td>Verschiebt man den Graphen der Funktion f um eine Einheit nach rechts, so lautet die zugehörige Funktionsgleichung: $g(x) = 3e^{x+1} + 1$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="3">Begründung: Da durch die Veränderung im Exponenten bei Funktion g alle Abszissen gegenüber f um eine Einheit erhöht werden, hat diese Funktion die gleichen Funktionswerte wie die Funktion f nur eine Einheit „früher“. Es handelt sich folglich um eine Verschiebung der Funktion nach links.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1c</td><td>zeichnet den Graphen der Funktion g und

berechnet die Größe der eingeschlossenen Fläche.</td><td>

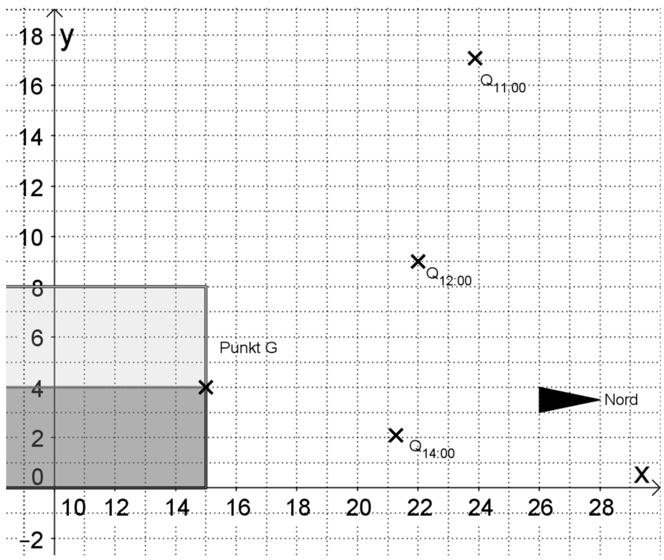
$S = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x) \ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + c\right]_{-2}^{0} = 4 \text{ [FE]}$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td><table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>w</th><th>f</th></tr>
<tr><td>Der Vektor $\vec{a}$ liegt nicht in der x-y-Ebene.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der Vektor $\vec{a}$ ist ein Einheitsvektor.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal zueinander.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear voneinander abhängig.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben die gleiche Länge.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>gibt eine Gleichung für eine Gerade an, …</td><td>die identisch mit der Gerade g ist, aber nicht durch die angegebene Geradengleichung beschrieben wird: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
die senkrecht zur Gerade g verläuft: $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
die Gerade g im Punkt P(0|2|−3) schneidet:
$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>gibt die Geradengleichung der Schnittgeraden an,
zeichnet die Schnittgerade in das Koordinatensystem ein und

zeichnet den Achsenschnittpunkt der Ebene E_1 mit der x-Achse ein.</td><td>$g_{yz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$


$6x + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 0 = 30$
$x = 5 \Rightarrow A(5|0|0)$</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>30</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Neubau

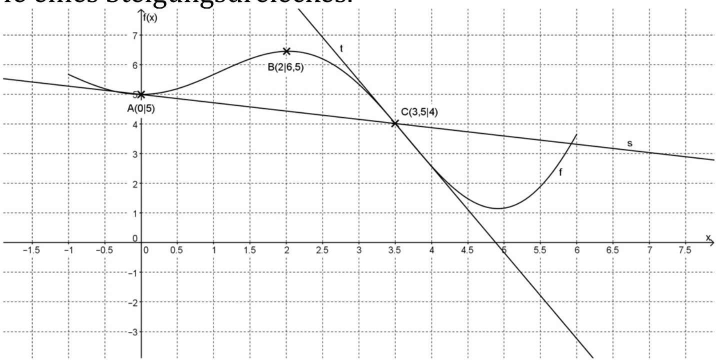
	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	gibt die Koordinaten der Punkte A und P an und berechnet den Dachneigungswinkel α.	$A(15\|0\|0)$, $P(-10\|22\|6)$ $\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\-4\\4{,}5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\-4\\4{,}5\end{pmatrix}\right\|}\rightarrow\alpha\approx 48{,}37°$	4
2b	berechnet die Materialkosten für die gesamte Dachkehle.	$\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\4{,}5\end{pmatrix}$ $\left\|\overrightarrow{CF}\right\|\approx 7{,}83\text{m}$ Kosten: $7{,}83\text{ m}\cdot 25{,}00\,\frac{\text{Euro}}{\text{m}}=195{,}75$ Euro	3
2c	zeigt, dass die Firstlinie $\overline{GF}$ und die Firstlinie $\overline{FE}$ im rechten Winkel zueinander liegen.	$\overrightarrow{GF}=\begin{pmatrix}-5-15\\4-4\\10{,}5-10{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FE}=\begin{pmatrix}-5-(-5)\\22-4\\10{,}5-10{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\18\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GF}\bullet\overrightarrow{FE}=0$ Somit liegen die Firstlinie $\overline{GF}$ und die Firstlinie $\overline{FE}$ im rechten Winkel zueinander.	4
2d	berechnet, welche Qualitätsstufe der Auftraggeber maximal auswählen kann.	$\left\|\overrightarrow{GB}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\4\\-4{,}5\end{pmatrix}\right\|\approx 6{,}02$ $A=\frac{20+15}{2}\cdot 6{,}02\approx 105{,}364\ [\text{m}^2]$ Gesamtfläche: $(105{,}53+378)\cdot 1{,}1=531{,}70\ [\text{m}^2]$ Möglicher Preis: $\frac{5800\text{ Euro}}{531{,}88\text{ m}^2}\approx 10{,}91\,\frac{\text{Euro}}{\text{m}^2}>10{,}21\ [€/\text{m}^2]$ Es kann maximal der Dachziegel „Odenwälder Dachpfanne, weinrot glasiert“, mit der Qualität mittelmäßig/hochwertig ausgewählt werden.	5
2e	zeigt, dass die Antenne in dem Punkt $H_1(-3\|15\|8{,}7)$ am Dach befestigt werden muss.	$g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\15\\13\end{pmatrix}+s_1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\15\\6\end{pmatrix}+s_2\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\4{,}5\end{pmatrix}$ $g_1=g_2$ $s_1=4{,}3\wedge s_2=0{,}6$ $\overrightarrow{OH_1}=\begin{pmatrix}-3\\15\\13\end{pmatrix}+4{,}3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\15\\8{,}7\end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{OH_1}=\begin{pmatrix}0\\15\\6\end{pmatrix}+0{,}6\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\4{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\15\\8{,}7\end{pmatrix}$ $H_1(-3\|15\|8{,}7)$	4

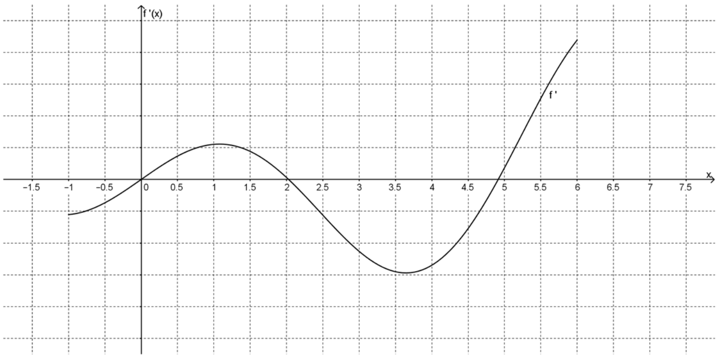
	Anforderungen	Modelllösungen	
2f	zeigt, dass die Ebene E_1 durch die Ebenengleichung beschrieben werden kann und	Punkt B in E_1: $9 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 120$ Punkt C in E_1: $9 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 120$ Punkt F in E_1: $9 \cdot 4 + 8 \cdot 10{,}5 = 120$	5
	gibt eine Ebenengleichung der Ebene E_1 in der Parameterform an.	$E_1: 9y + 8z = 120$ Umwandlung in die Parameterform: $x = t_3 \wedge y = t_4 \quad \text{mit} \quad t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$	
2g	vervollständigt die fehlenden Angaben in der Tabelle und	$\vec{s}_{11:00} = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OQ_{11:00}} = \begin{pmatrix} -15 \\ -\ 4 \\ -10{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23{,}88 \\ 17{,}08 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}88 \\ 13{,}08 \\ -10{,}5 \end{pmatrix}$ Aus der Abbildung 2.2: $Q_{12:00}(22\|9\|0)$ $\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -\ 3{,}05 \\ -16{,}74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $x \approx 21{,}27 \wedge\ y \approx 2{,}09\ \wedge\ s \approx 0{,}63$ $Q_{14:00}(21{,}27\|2{,}09\|0)$	5
	zeichnet die Schattenpunkte der Giebelspitze G in das Koordinatensystem ein.		
			30

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

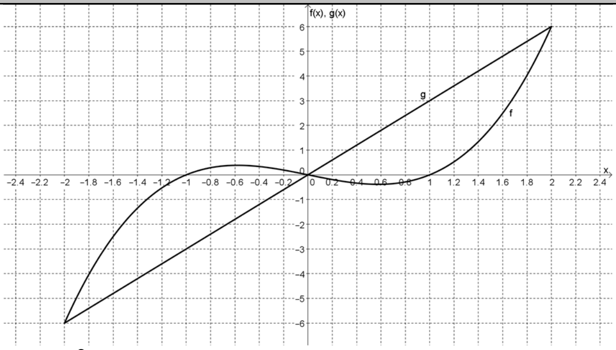
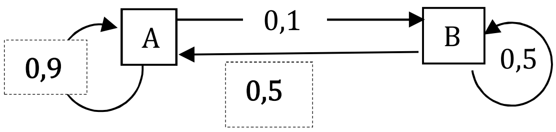
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$,

skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f' und

ermittelt den Wert der durchschnittlichen Steigung.</td><td>Ermittlung der Tangentensteigung $m_t \approx -3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.


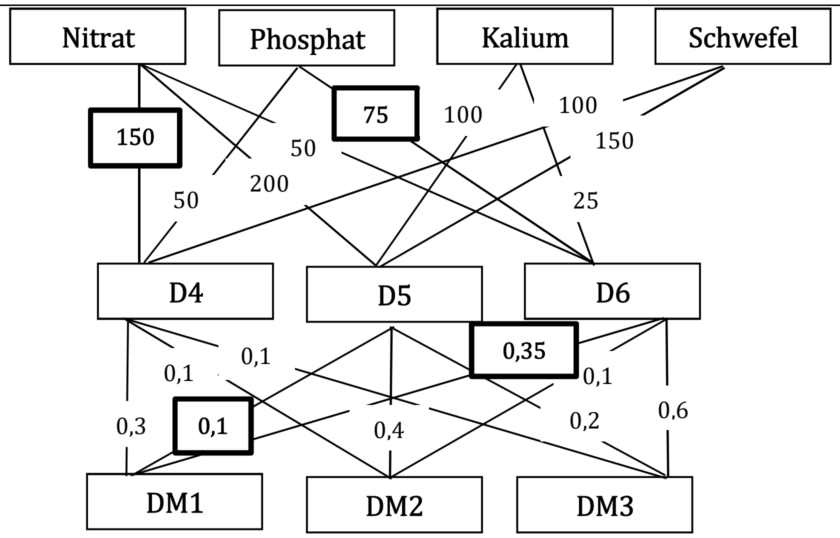


Ermittlung der Sekantensteigung $m_s \approx -0{,}3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>gibt die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an und entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>$f'(x) = 3e^x$
<table><tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td>Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td colspan="3">Begründung: $f(0) = 3e^0 + 1 = 4$.</td></tr><tr><td>Verschiebt man den Graphen der Funktion f um eine Einheit nach rechts, so lautet die zugehörige Funktionsgleichung: $g(x) = 3e^{x+1} + 1$.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td colspan="3">Begründung: Da durch die Veränderung im Exponenten bei Funktion g alle Abszissen gegenüber f um eine Einheit erhöht werden, hat diese Funktion die gleichen Funktionswerte wie die Funktion f nur eine Einheit „früher“. Es handelt sich folglich um eine Verschiebung der Funktion nach links.</td></tr></table></td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1c	zeichnet den Graphen der Funktion g, berechnet die Größe der eingeschlossenen Fläche.	 $S = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\ \ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + c\right]_{-2}^{0} = 4$ [FE]	5
1d	zeigt, dass die Beziehung $F \cdot G = G \cdot F$ gilt und bestimmt die Matrix X in der Matrizengleichung.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Somit gilt $F \cdot G = G \cdot F$. $X \cdot F - G = 2G$ $X \cdot F = 3G$ $X = 3G \cdot F^{-1}$ $X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	5
1e	ergänzt in der Abb. 1.4 die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten im Übergangsdiagramm, gibt die Übergangsmatrix an und ermittelt die Verteilung nach einem Übergang.	 Für die Übergangsmatrix gilt: $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Nach einem Übergang: $\overrightarrow{x_1} = M \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}$	5
1f	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). — w / f Für die Matrizen B und C gilt der Zusammenhang: $B^T = -C$. — w: X Das Produkt aus der Matrix A und der Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt die inverse Matrix A^{-1}. — f: X Es gilt: $A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -10 & -15 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. — f: X Das Produkt aus den Matrizen B und C ist eine 3 x 3–Matrix. — w: X Die Subtraktion der Matrizen B und C^T ist definiert. — w: X	5
			30

Aufgabe 2: Landwirtschaftlich genutzte Flächen

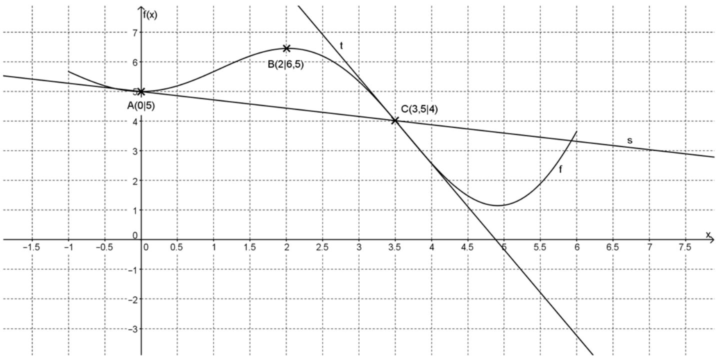
	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeigt, dass die Verteilung für die drei Flächenarten A, G und W hinreichend genau durch den Verteilungsvektor beschrieben werden kann.	Die Gesamtfläche der landwirtschaftlich genutzten Flächen beträgt: 2,75 +10,56 +7,82 = 21,13 [km²]. Berechnung der prozentualen Verteilungen: $A = 2{,}75 : 21{,}13 \approx 0{,}13 = 13\%$ $G = 10{,}56 : 21{,}13 \approx 0{,}50 = 50\%$ $W = 7{,}82 : 21{,}13 \approx 0{,}37 = 37\%$ Daraus ergibt sich der Verteilungsvektor $\vec{v}_{2003} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$.	3
2b	erstellt die Übergangsmatrix M, die diesen jährlichen Übergang darstellt,	Aus der Tabelle 2.2 lässt sich die Matrix M erstellen: $M = \begin{pmatrix} 0{,}910 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}075 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}015 & 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$.	4
	erläutert, dass die Übergangsmatrix eine stochastische Matrix ist und	Die Matrix M ist eine stochastische Übergangsmatrix, da ihre Elemente alle positiv sind, alle Matrixelemente zwischen 0 und 1 liegen und die Spaltensummen jeweils 1 ergeben.	
	interpretiert die Bedeutung am Beispiel einer Spalte.	Am Beispiel der ersten Spalte: Aus der Tabelle 2.2 ist erkennbar, dass 91 % des Ackerlandes als Ackerland auch weiter genutzt werden. 7,5 % des Ackerlandes werden zu Grünland und 1,5 % des Ackerlandes werden zu Waldflächen aufgeforstet.	
2c	ermittelt die Werte des Verteilungszustands für das Jahr 2013.	Da die jährliche Übergangsverteilung konstant bleibt und für $\vec{v}_{2003} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$ gilt, folgt: $\vec{v}_{2013} = M^{10} \cdot \vec{v}_{2003} = \begin{pmatrix} 0{,}910 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}075 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}015 & 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}50 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}110 \\ 0{,}481 \\ 0{,}409 \end{pmatrix}$ Die Werte des Verteilungszustands im Jahr 2013 sind: ca. 11 % der landwirtschaftlich genutzten Flächen bestehen aus Ackerland, ca. 48,1 % aus Grünland und ca. 40,9 % aus Wald.	3
2d	berechnet die fünf fehlenden Matrizenelemente.	Es gilt: $\begin{pmatrix} m_{11} & 0{,}01 & 0{,}01 \\ m_{21} & m_{22} & 0{,}02 \\ 0{,}01 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}14 \\ 0{,}49 \\ 0{,}37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}14 \\ 0{,}49 \\ 0{,}37 \end{pmatrix}$. Da die Übergangsmatrix stochastisch sein muss, ergibt sich für das Matrixelement m_{33}: $\mathbf{m_{33}} = 1 - 0{,}01 - 0{,}02 = \mathbf{0{,}97}$ Aufstellen des zugehörigen LGS: $\begin{aligned} 0{,}14m_{11} + 0{,}0086 &= 0{,}14 \\ 0{,}14m_{21} + 0{,}49m_{22} + 0{,}0074 &= 0{,}49 \\ 0{,}49m_{32} + 0{,}3603 &= 0{,}37 \end{aligned}$ Aus $0{,}14m_{11} + 0{,}0086 = 0{,}14$ folgt $\mathbf{m_{11}} \approx \mathbf{0{,}94} \Rightarrow \mathbf{m_{21}} = \mathbf{0{,}05}$. Aus $0{,}49m_{32} + 0{,}3603 = 0{,}37$ folgt $\mathbf{m_{32}} \approx \mathbf{0{,}02} \Rightarrow \mathbf{m_{22}} = \mathbf{0{,}97}$. Es ergibt sich für die Matrix $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}94} & 0{,}01 & 0{,}01 \\ \mathbf{0{,}05} & \mathbf{0{,}97} & 0{,}02 \\ 0{,}01 & \mathbf{0{,}02} & \mathbf{0{,}97} \end{pmatrix}$.	5

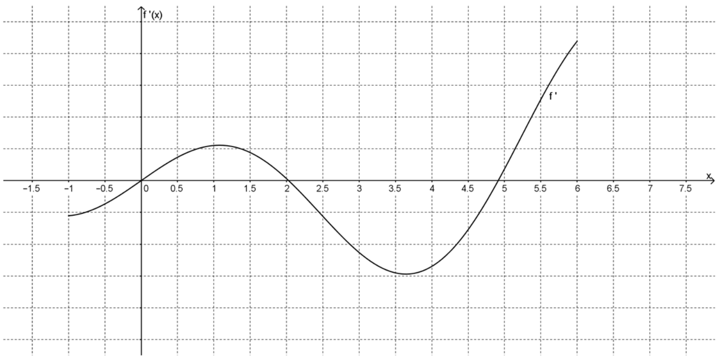
	Anforderungen	Modelllösungen	
2e	erläutert, wie mit Hilfe der Matrix Q die Aussage des Politikers geprüft werden kann.	Geprüft werden soll, nach wie vielen Jahren sich eine stabile Verteilung einstellen kann. Dazu kann die vorgebene Matrix Q zum Beispiel beliebig potenziert werden, um eine Grenzmatrix zu ermitteln, dabei gibt der Exponent die Anzahl der Jahre an.	3
2f	ermittelt, wie man aus den zur Verfügung stehenden Düngern eine Mischung herstellen kann, so dass die zu düngende Fläche ertragsoptimal versorgt wird und gibt an, wie viel kg Düngemittelmischung pro Hektar benötigt würden.	Aufstellen einer zugehörigen Matrizengleichung oder eines LGS: $\begin{aligned} 150d_1 + 180d_2 + 120d_3 &= 180 \\ 100d_1 + 120d_2 + 40d_3 &= 100 \\ 25d_1 + 100d_2 + 70d_3 &= 90 \end{aligned}$ Es ergeben sich die Lösungen: $d_1 = 0{,}2$ (≙ 20% einer Tonne D1 = 200 kg) $d_2 = 0{,}5$ (≙ 50% einer Tonne D2 = 500 kg) $d_3 = 0{,}5$ (≙ 50% einer Tonne D3 = 500 kg) Eine optimale Düngermischung müsste aus 200 kg Dünger D1 und jeweils 500 kg Dünger D2 und D3 hergestellt werden. 200 kg + 500 kg + 500 kg = 1 200 kg Es ergibt sich eine Düngemittelmischung von 1 200 kg pro Hektar.	5
2g	vervollständigt anhand der Daten in den Tabellen 2.4 und 2.5 das Materialverflechtungsdiagramm und bestimmt, wie groß der Vorrat an Nährstoffen beim Düngemittelhersteller sein sollte, damit von den Düngermischungen DM1, DM2 und DM3 jeweils 1 000 kg hergestellt werden können.	 $\begin{pmatrix} 150 & 200 & 50 \\ 50 & 0 & 75 \\ 0 & 100 & 25 \\ 100 & 150 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}20 \\ 0{,}35 & 0{,}10 & 0{,}60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}50 & 100 & 85 \\ 41{,}25 & 12{,}5 & 50 \\ 18{,}75 & 42{,}5 & 35 \\ 45{,}00 & 70{,}0 & 40 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} N \\ P \\ K \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}50 & 100 & 85 \\ 41{,}25 & 12{,}5 & 50 \\ 18{,}75 & 42{,}5 & 35 \\ 45{,}00 & 70{,}0 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 267\,500 \\ 103\,750 \\ 96\,250 \\ 155\,000 \end{pmatrix}$ (Einheit: g) Von den Nährstoffen müssen 267,5 kg Nitrat, 103,75 kg Phosphat, 96,25 kg Kalium und 155,0 kg Schwefel vorgehalten werden, damit von den Düngermischungen DM 1, DM 2 und DM 3 jeweils 1 000 kg hergestellt werden können.	7
			30

Aufgabe 1 Analysis mit Stochastik:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>bestimmt näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$,

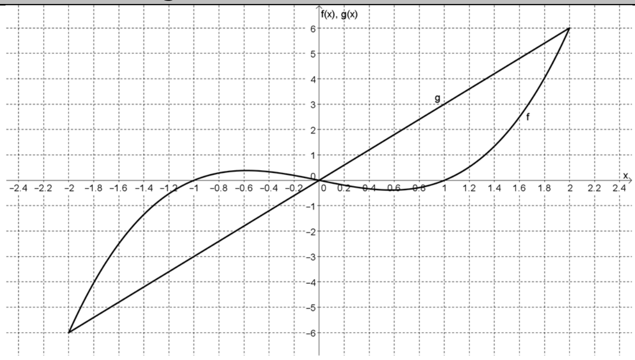
skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f' und

ermittelt den Wert der durchschnittlichen Steigung.</td><td>Ermittlung der Tangentensteigung $m_t \approx -3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.




Ermittlung der Sekantensteigung $m_s \approx -0{,}3$ beispielsweise mithilfe eines Steigungsdreieckes.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>gibt die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an und entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>$f'(x) = 3e^x$
<table>
<tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr>
<tr><td>Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="3">Begründung: $f(0) = 3e^0 + 1 = 4$.</td></tr>
<tr><td>Verschiebt man den Graphen der Funktion f um eine Einheit nach rechts, so lautet die zugehörige Funktionsgleichung: $g(x) = 3e^{x+1} + 1$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="3">Begründung: Da durch die Veränderung im Exponenten bei Funktion g alle Abszissen gegenüber f um eine Einheit erhöht werden, hat diese Funktion die gleichen Funktionswerte wie die Funktion f nur eine Einheit „früher“. Es handelt sich folglich um eine Verschiebung der Funktion nach links.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1c</td><td>zeichnet den Graphen der Funktion g und

berechnet die Größe der eingeschlossenen Fläche.</td><td>

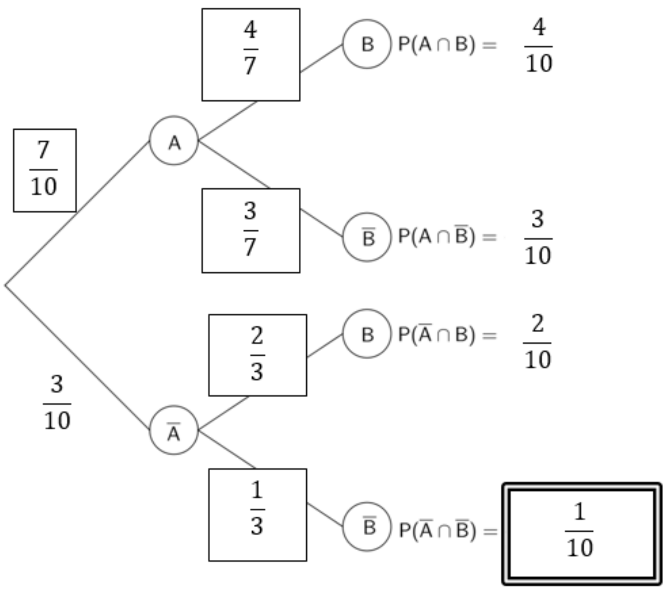
$$S = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\ \ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + c\right]_{-2}^{0} = 4\ [FE]$$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>ergänzt alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Vierfelderdiagramm und

gibt $P(\overline{B}|\overline{A}) = P_{\overline{A}}(\overline{B})$ an und

entscheidet begründet, ob die Ereignisse A und B stochastisch voneinander abhängig sind oder nicht.</td><td>

P	A	$\overline{A}$	Summen
B	0,04	**0,2**	**0,24**
$\overline{B}$	**0,16**	0,6	**0,76**
Summen	**0,2**	0,8	**1**

$P(\overline{B}|\overline{A}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Es gilt $P(\overline{B}) = 0{,}76 \neq 0{,}75 = P(\overline{B}|\overline{A})$
D. h. also, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens vom Ereignis $\overline{B}$ abhängig davon ist, ob wir Kenntnis über das gleichzeitige Eintreten von $\overline{A}$ haben oder nicht. Die beiden Ereignisse sind somit stochastisch voneinander abhängig.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1e</td><td>erläutert, warum der Wert $\frac{1}{10}$ in das doppelt gerahmte Kästchen eingetragen werden muss und
ergänzt in allen verbleibenden Kästchen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.</td><td>Jede Wahrscheinlichkeit am Ende eines Pfades des Wahrscheinlichkeitsbaums gibt die Wahrscheinlichkeit einer der vier möglichen Ereigniskombinationen wieder. Da weitere Ereigniskombinationen nicht möglich sind, müssen sie in der Summe 1 ergeben und somit muss die fehlende Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ betragen.

</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1f	gibt den Modus des Merkmals x an und entscheidet begründet, welches der beiden Boxplotdiagramme die Häufigkeitsverteilung des Merkmals x korrekt beschreibt.	$x_{Modus} = 2$ Für die angegebene Häufigkeitsverteilung von x lassen sich folgende Parameter ermitteln: Min: 1 Q1: 2 Q2: 4 Q3: 5,5 Max: 8 Beispielsweise liegt der Median bei dem Boxplotdiagramm 2 jedoch bei 5, somit kann dieses die Verteilung nicht korrekt abbilden. Das Boxplotdiagramm 1 bildet die Spannweite, den Quartilsabstand und den Median korrekt ab und stellt daher die Häufigkeitsverteilung des Merkmals x korrekt dar.	5
			30

Aufgabe 2: Windenergieanlage

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	gibt die gewünschten Fakten aus der Abbildung 2.1 an.	Bundesland mit der höchsten installierten Leistung: Niedersachsen. Mittlere installierte Leistung je Windanlage: ca. 1,679 Megawatt. Anteil der neu installierten Leistung an der Gesamtleistung: ca. 12,94 %.	6
2b	prüft, ob der Mittelwert richtig berechnet wurde und ob die getroffene Aussage insgesamt richtig ist.	Zur Berechnung der mittleren Stromproduktion pro Monat durch Windenergie kann die gesamte Windenergie für das Jahr 2015 durch 12 Monate geteilt werden, dass ergibt $\frac{85{,}4}{12} \approx 7{,}1$ Mrd. kWh. Die getroffene Aussage ist wahr. Betrachtet man die sechsthöchste und siebthöchste Säule, liegen die Werte der beiden lt. Graphik bei 5,9 und 6 Mrd. kWh, so dass für den Median der Wert 5,95 Mrd. kWh angenommen wird, welcher deutlich unter dem Mittelwert von 7,167 Mrd. kWh liegt.	5
2c	gibt eine geeignete Regressionsfunktion an und prognostiziert auf deren Grundlage die Stromproduktion durch Windenergie für das Jahr 2016 und beurteilt, inwieweit er dieses Vorgehen für geeignet hält, um eine Prognose abzugeben.	Aufgrund des zunehmenden Säulenanstiegs eignet hier sich am ehesten eine Funktion mit einem konvexen Kurvenverlauf. Da keine Extrempunkte modelliert werden müssen, wäre der einfachste Typ hierbei eine quadratische Funktion. Legt man für das Jahr 2011 $t = 0$ fest, dann gibt das CAS die folgende Regressionsfunktion f für die Stromproduktion mittels Windenergie in Mrd. kWh: $f(t) = 4{,}27143t^2 - 8{,}80571t + 50{,}4429$ $f(5) \approx 113{,}2$ D. h. auf Grundlage der Regressionsfunktion könnte man eine Stromproduktionsmenge durch Windenergie von ca. 113 Mrd. kWh für das Jahr 2016 prognostizieren. (Auch andere Lösungen möglich.) Diese Prognose ist jedoch aufgrund der geringen Datenmenge sehr unzuverlässig. Zudem wird die Stromproduktionsmenge durch Windenergie nicht unmittelbar durch die Zeit beeinflusst, sondern auch z. B. durch politische und ökonomische Veränderungsprozesse, die sich im Laufe der Zeit verändern. Für eine sicherere Prognose wären daher Daten, die diesen Veränderungsprozess beschreiben, relevant.	6
2d	erläutert, warum die Anzahl der befragten Personen, die einen Windpark in ihrer direkten Nachbarschaft akzeptieren, als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.	Wenn man 35 Passanten dahingehend untersucht, ob sie Windparks in ihrer direkten Nachbarschaft akzeptieren oder nicht, handelt es sich um eine 35-stufige Bernoulli-Kette, da das Einzelexperiment innerhalb einer Stufe nur zwei Ergebnisse haben kann: Erfolg (Passant akzeptiert Windparks in der direkten Nachbarschaft) oder Misserfolg (Passant akzeptiert keine Windparks in der direkten Nachbarschaft). Die Anzahl der Passanten ist ganzzahlig, somit ist die Zufallsvariable abzählbar und mithin diskret. Zuletzt gilt es, die Frage der stochastischen Unabhängigkeit zu klären: Die Tatsache, dass ein einzelner Passant einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptiert, ist vermutlich unabhängig davon, dass ein anderer Passant Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptiert, da dieses jeweils auf der individuellen Meinung der Befragten beruht.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
2e	berechnet, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass • 20 der Befragten …	X:= Anzahl der Passanten, die Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren. X ist binomialverteilt mit $n = 35$ und $p = 0{,}59$. $P(X = 20) = \binom{35}{20} \cdot 0{,}59^{20} \cdot 0{,}41^{15} \approx 0{,}1319$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 13,19 % akzeptieren genau 20 der befragten Passanten Windparks in der direkten Nachbarschaft.	6
	• mehr als 25 der Befragten …	$P(X > 25) = \sum_{k=26}^{35} \binom{35}{k} \cdot 0{,}59^{k} \cdot 0{,}41^{35-k} \approx 0{,}0451$ Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 25 befragte Passanten Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren, beträgt ca. 4,51 %.	
	• höchstens 15 der Befragten … einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren.	$P(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{35}{k} \cdot 0{,}59^{k} \cdot 0{,}41^{35-k} \approx 0{,}0394$ Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 15 befragte Passanten Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptieren, beträgt ca. 3,94 %.	
2f	erklärt die Berechnung des Gruppenmitgliedes im Sachzusammenhang und nimmt begründet zu beiden Meinungen Stellung.	$\binom{35}{14} \cdot 0{,}40^{14} \cdot 0{,}60^{21} \approx 0{,}137$ Es wird bei einer Eintrittswahrscheinlichkeit von 40 % die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass genau 14 von 35 Personen einen Windpark in direkter Nachbarschaft akzeptieren. Die Tatsache, dass 14 von 35 zufällig ausgewählten Passanten Windparks in der direkten Umgebung akzeptieren würden, ist grundsätzlich für jeden relativen Anteil über 0 und unter 1 möglich, da es sich um ein Zufallsexperiment handelt. Am wahrscheinlichsten ist es, dass genau 14 von 35 zustimmen, wenn der Anteil der regionalen Bevölkerung, der Windparks in der direkten Nachbarschaft akzeptiert, tatsächlich bei 40 % liegt, aber letztlich beträgt auch diese Wahrscheinlichkeit nur ca. 14 %. Auch das Konfidenzintervall könnte in die Begründung einfließen: Das Konfidenzintervall bei einem Vertrauensniveau von 95 % liegt bei einem Anteil von 23,77 % – 56,23 % der regionalen Bevölkerung, die einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren. Somit wäre es aus stochastischer Sicht nicht sinnvoll, aufgrund des Befragungsergebnisses auf einen Anteil von 40 % zu schließen.	4
			30

Aufgabe 3: Freizeitpark

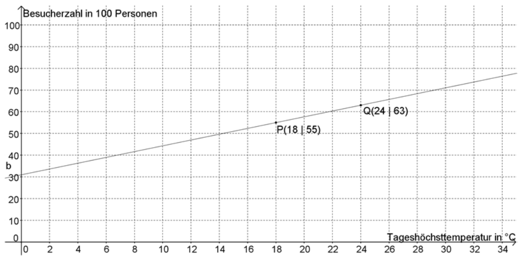
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>ermittelt die Gleichung der linearen Funktion f, die den Zusammenhang zwischen Tageshöchsttemperatur und der Besucherzahl beschreibt, zeichnet den Graphen der Funktion f und

ergänzt die fehlenden Werte in der Tabelle 3.1.</td><td>

$m = \frac{63-55}{24-18} = \frac{4}{3}$

$63 = \frac{4}{3} \cdot 24 + b \Leftrightarrow b = 31$

$f(x) = \frac{4}{3}x + 31$



<table>
<tr><th>Di</th><th>Mi</th><th>Do</th><th>Fr</th></tr>
<tr><td>24</td><td>30</td><td>21</td><td>18</td></tr>
<tr><td>63</td><td>71</td><td>59</td><td>55</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>berechnet die Uhrzeit, zu der der eingehende Besucherstrom im Laufe eines Tages sein Maximum annimmt.</td><td>

$h'(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^t \cdot (t^2 - 6t - 8)$

$h''(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^t \cdot (t^2 - 4t - 14)$

Notwendige Bedingung: $h'(t) = 0$

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t_{e1} = -\sqrt{17} + 3 \vee t_{e2} = \sqrt{17} + 3$.

Hinreichende Bedingung: $h''(t_e) < 0 \wedge h'(t_e) = 0$

$t_{e1} \notin D(h)$

$h''(t_{e2}) \approx -2\,556{,}94 \Rightarrow h''(t_{e2}) < 0$.

Somit ist t_{e2} Stelle eines Hochpunktes.

Der Besucherstrom nimmt um ca. 15:07 Uhr sein Maximum an.
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>berechnet die Höhe der Einnahmen.</td><td>

$B = \int_0^8 h(t)dt = \frac{3e^8}{2} + \frac{5}{2} \approx 4\,474$

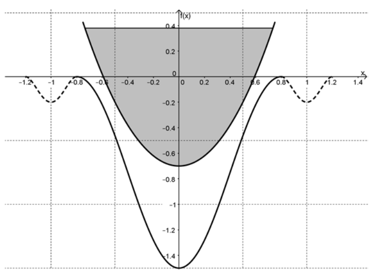
Umsatz = Besucherzahl · Einzeleintrittspreis = 116 324,00 Euro

Die Höhe der Einnahmen durch vollzahlende Besucher an einem durchschnittlichen Tag beträgt somit 116 324,00 Euro.
</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3d</td><td>ermittelt die unbekannte Uhrzeit.</td><td>

$242 = \int_2^z h(t)dt \Rightarrow z_1 \approx 4{,}25 \wedge z_2 \approx 8{,}85$

$z_2 \notin D(h)$

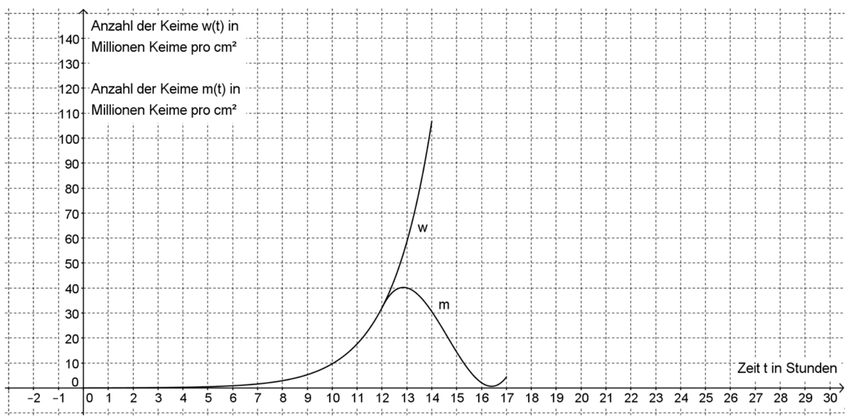
242 Besucher wurden um ca. 12:15 Uhr registriert.
</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3e</td><td>ergänzt die Zeichnung um das skalierte Koordinatensystem und</td><td>



Fortsetzung nächste Seite
</td><td>4</td></tr>
</table>

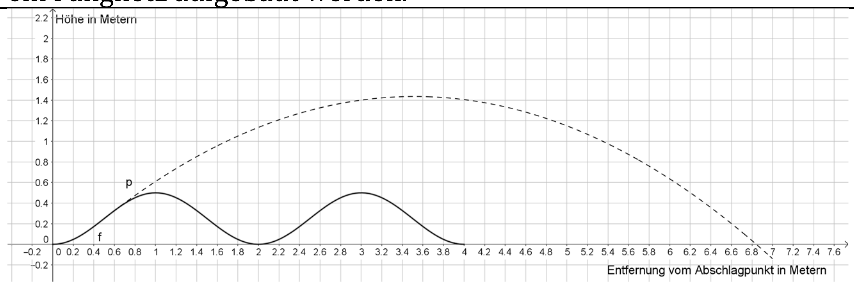
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3e	beschreibt, wie die maximale Breite ermittelt werden kann.	Aus der Funktionsgleichung lässt sich $\frac{5\pi}{4} = \mathrm{b}$ ablesen und da $\mathrm{p} = \frac{2\pi}{\mathrm{b}}$ gilt, muss die Periodenlänge 1,6 Meter betragen. Da die beiden Hochpunkte eine Periodenlänge voneinander entfernt liegen, muss der Querschnitt ohne Überlaufränder eine Breite von 1,6 Meter haben. Die Breite der Bahn beträgt 1,60 Meter.	
3f	prüft, ob der Übergang an der Stelle $x = 0{,}8$ sprung- und knickfrei ist.	$i(x) = \begin{cases} i_1(x) & \text{für } -1{,}2 \leq x < -0{,}8 \\ 0{,}75 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{0{,}8}(x-0{,}4)\right) - 0{,}75 & \text{für } -0{,}8 \leq x \leq 0{,}8 \\ -125x^4 + 500x^3 - 740x^2 + 480x - 115{,}2 & \text{für } 0{,}8 < x \leq 1{,}2 \end{cases}$ $i_2(0{,}8) = 0$ $i_3(0{,}8) = 0$ Der Übergang beider Abschnitte an der Stelle $x_2 = 0{,}8$ ist sprungfrei. $i'(x) = \begin{cases} i_1'(x) & \text{für } -1{,}2 \leq x < -0{,}8 \\ \frac{15\cdot\pi}{16} \cdot \cos\left(\frac{5\cdot\pi}{4}(x-0{,}4)\right) & \text{für } -0{,}8 \leq x \leq 0{,}8 \\ -500x^3 + 1\,500x^2 - 1480x + 480 & \text{für } 0{,}8 < x \leq 1{,}2 \end{cases}$ $i_2'(0{,}8) = 0$ $i_3'(0{,}8) = 0$ Der Übergang beider Abschnitte an der Stelle $x_2 = 0{,}8$ ist knickfrei.	5
3g	ermittelt den Term i_1, so dass die Ordinatenachse Symmetrieachse des Graphen der Funktion i ist.	Allgemeine Gleichung: $i_1(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ $i_1'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ Bedingungen: I. $i_1(-0{,}8) = 0$ II. $i_1(-1{,}2) = 0$ III. $i_1'(-0{,}8) = 0$ IV. $i_1'(-1{,}2) = 0$ V. $i_1(-1) = -0{,}2$ (aufgrund von $i_3(1) = -0{,}2$) $\Rightarrow i_1(x) = -125x^4 - 500x^3 - 740x^2 - 480x - 115{,}2$	5
			30

Aufgabe 3: Spülschwamm

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	erläutert, dass es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handeln könnte, und bestimmt eine Funktionsgleichung der Form $f(t) = a \cdot b^t$.	Ein relativ konstanter Wachstumsfaktor bei den Keimen von Stunde zu Stunde in Höhe von ca. 1,8 deutet auf ein exponentielles Wachstum hin. Eine mögliche Lösung: $f(t) \approx 0{,}024 \cdot 1{,}792^t$	4
3b	beschreibt den Verlauf des Graphen anhand von zwei Aspekten im Sachzusammenhang und berechnet die durchschnittliche Änderungsrate der Bakterienanzahl innerhalb der ersten 14 Stunden.	Eine anfangs sehr geringe, aber progressiv zunehmende Steigung des Graphen $w_{0,024}$ bedeutet, dass die Bakterienanzahl zuerst sehr langsam wächst, die Anzahl bleibt beispielsweise bei $t = 8$ noch unter 3 Mio. Keimen pro cm^2. Die progressive Zunahme bedeutet im Sachzusammenhang, dass sich die Bakterienzahl immer schneller vergrößert, und beispielsweise nach vierzehn Stunden schon auf über 100 Mio. Keime pro cm^2 angewachsen ist. Das durchschnittliche Wachstum wird durch die Steigung m der Sekante zwischen den Punkten $P(0/w(0))$ und $Q(14/w(14))$ beschrieben. Es gilt: $w(14) \approx 106{,}73$ und $w(0) = 0{,}024$. Damit ist $m = \frac{w(14)-w(0)}{14-0} \approx 7{,}62$. Die durchschnittliche Änderungsrate der Bakterienanzahl in den ersten 14 Stunden beträgt also etwa 7,62 Mio. Keime pro cm^2 pro Stunde.	4
3c	ermittelt, nach welcher Zeit die Anzahl erreicht wird.	Die Gleichung $50 = w(t)$ führt zu $t \approx 12{,}74$. Die Anzahl von 50 Millionen Keimen pro cm^2 wird also nach 12 Stunden und etwa 44 Minuten erreicht.	3
3d	skizziert den Verlauf der Keimentwicklung nach dem neuen Modell,	 *Fortsetzung nächste Seite*	7

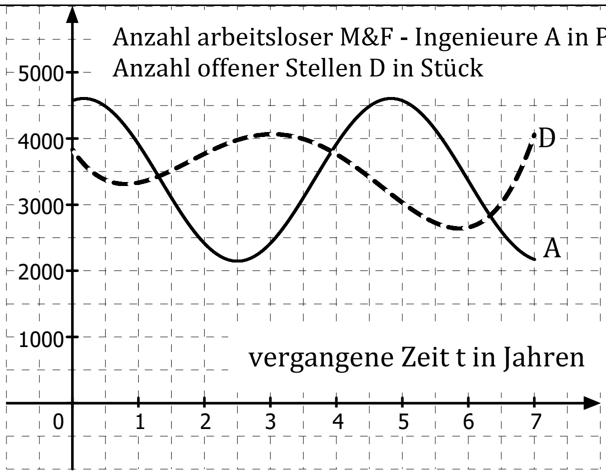
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3d	bestimmt die maximale Keimanzahl und bestimmt den Zeitpunkt, zu dem die Keimanzahl am schnellsten sinkt.	Gesucht ist der lokale Hochpunkt der Funktion m. Für den zweiten Teilabschnitt der Funktion m gilt: $m_2'(t) = 5{,}331t^2 - 156t + 1124{,}5$. $m_2'(t_e) = 0$ ergibt $t_{e1} \approx 12{,}86$ und $t_{e2} \approx 16{,}40$. Aus der Skizze ist zu erkennen, dass x_{e1} zum Hochpunkt gehört. Der Funktionswert $m(t_{e1})$ beträgt ca. 40,242. Die max. Keimanzahl liegt also bei ca. 40,242 Mio. Keimen pro cm^2. Gesucht ist der Wendepunkt der Funktion. Für den zweiten Teilabschnitt der Funktion m gilt: $m_2''(t) = 10{,}662x - 156$. $m_2''(x) = 0$ ergibt $x_w \approx 14{,}63$. An der Skizze lässt sich erkennen, dass sich in diesem Bereich ein fallender Wendepunkt befindet. Nach ca. 14 Stunden und 38 Minuten sinkt die Keimanzahl also am schnellsten.	
3e	beschreibt die Bedeutung des Wertes 50 im Sachzusammenhang und bestimmt näherungsweise die Parameter c und k so, dass der Graph an der Stelle $t = 11$ sprung- und knickfrei verläuft.	Mit dem zweiten Abschnitt der Funktion s wird ein nach oben beschränktes exponentielles Wachstum beschrieben, d. h. der Graph nähert sich asymptotisch dem Grenzwert 50, der sogenannten oberen Schranke. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass nach diesem Modell die Bakterienkultur eine Größe von 50 Mio. Keimen pro cm^2 nicht überschreitet. Sprungfrei bedeutet, dass die Funktion an der Stelle $t = 11$ stetig ist. Für den ersten und zweiten Teilabschnitt der Funktion muss sich bei $t = 11$ der gleiche Funktionswert ergeben. Knickfrei bedeutet, dass außerdem die Steigung in beiden Funktionsteilen an der Stelle $t = 11$ gleich ist. Mit der oberen Schranke $G = 50$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem: I. $0{,}024 \cdot e^{0{,}6\cdot 11} = 50 - c \cdot e^{k\cdot 11}$ II. $0{,}0144 \cdot e^{0{,}6\cdot 11} = -k \cdot c \cdot e^{k\cdot 11}$ mit den Lösungen: $k \approx -0{,}327$ und $c \approx 1182{,}48$. Für $k \approx -0{,}327$ und $c \approx 1182{,}48$ ist der Graph der Funktion s näherungsweise sprung- und knickfrei.	5
3f	bestimmt die Gleichung der Funktion h.	Der Graph der Funktion h ist der an der Abszissenachse gespiegelte Graph der Funktion g. Es gilt also: $h(x) = -g(x) = 0{,}016x^3 - 0{,}12x^2 - 3$.	2
3g	berechnet die Materialkosten für einen Schwamm.	Um das Volumen des Schwammes berechnen zu können, muss zunächst die Größe der Fläche des Querschnittes bestimmt werden. Die Nullstelle der zugehörenden Funktion g liegt bei $x \approx 9{,}55$. Der Flächeninhalt ergibt sich aufgrund der Symmetrie aus $A = 2 \cdot \int_{-2}^{9{,}55} g(x)dx \approx 73{,}20$ FE. Daraus ergibt sich ein Volumen von $V = 73{,}20\ cm^2 \cdot 1{,}5cm \approx 109{,}81\ cm^3$ Bei Materialkosten von 2 000,00 € pro m^3 ergeben sich 0,002 € pro cm^3 und damit etwa 0,22 € pro Schwamm.	5
			30

Aufgabe 3: Minigolfanlage

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	begründet, warum der Verlauf des Hindernisses in Abb. 3.1 mit Hilfe einer trigonometrischen Funktion beschrieben werden kann.	Eine trigonometrische Funktion verläuft periodisch. Das Hindernis besteht aus zwei aufeinanderfolgenden gleichen Wellen, die durch einen Abschnitt einer trigonometrischen Funktion, der zwei Perioden umfasst, dargestellt werden können.	2
3b	bestimmt, an welchen Stellen die Montage zusätzlicher Hindernisse erfolgen könnte.	$h(x) = 0{,}20$ $0{,}25 \cdot \sin\big(\pi \cdot (x - 0{,}5)\big) + 0{,}25 = 0{,}2$ $\Rightarrow x_i \approx 2 \cdot (i - 0{,}218)$ oder $x_i \approx 2 \cdot (i + 0{,}218)$ mit $i \in \mathbb{Z}$ Im Definitionsbereich der Funktion h liegen dann: $x_1 \approx 0{,}436, x_2 \approx 1{,}564, x_3 \approx 2{,}436$ u und $x_4 \approx 3{,}564$ An diesen Stellen kann die Montage zusätzlicher Hindernisse (in einer Höhe von 20 cm) vorgesehen werden.	3
3c	zeigt, dass sich die Flugbahn näherungsweise durch die Funktion p beschreiben lässt.	Flugbahnen können durch Funktionen zweiten Grades modelliert werden. $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Bedingungen: $A(0{,}5\,\vert h(0{,}5))$: $p(0{,}5) = h(0{,}5) = 0{,}25$ Steigung bei $x = 0{,}5$ ist tangential: $p'(0{,}5) = h'(0{,}5) \approx 0{,}785$ Punkt $B(1\,\vert 0{,}61)$: $p(1) = 0{,}61$ Daraus folgt: $a = -0{,}130, b = 0{,}915$ und $c = -0{,}175$. Also: $p(x) = -0{,}13x^2 + 0{,}915x - 0{,}175$.	4
3d	untersucht, ob ein Fangnetz aufgebaut werden muss.	Berechnung der maximalen Höhe der Funktion p: $p'(x) = -0{,}26x + 0{,}915$ $p''(x) = -0{,}26$ Notwendige Bedingung: $p'(x) = 0 \Rightarrow\ x_e \approx 3{,}52$ Hinreichende Bedingung: $p'(x_e) = 0 \wedge p''(x_e) \neq 0$ $p''(3{,}6) = -0{,}26 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_e \approx 3{,}52$ $p(3{,}52) \approx 1{,}44$ Der Ball erreicht nach ca. 3,52 m seine maximale Flughöhe von 1,44 m. Da dies höher ist als die vorgegebene Höhe von 1 m, muss ein Fangnetz aufgebaut werden.	4
3e	skizziert den Verlauf des Graphen der Funktion p in Abb 3.2 und	 *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3e	bestimmt den maximalen vertikalen Abstand zwischen dem Ball und der Bahn.	Vertikaler Abstand zwischen der Flugbahn des Balls und der Minigolfbahn: $d(x) = p(x) - f(x)$ mit $0{,}5 \leq x \leq 4$ Bestimmung der lokalen Hochpunkte ergibt mit dem CAS und/oder Zeichnung ca.: $P_{H1}(2{,}15\|1{,}16)$ und $P_{H2}(3{,}95\|1{,}41)$ Somit beträgt der maximale vertikale Abstand zwischen Ball und Bahn ca. 1,41 m.	
3f	berechnet die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion h.	Die Stellen der maximalen Beschleunigung sind die Wendestellen mit negativer Steigung. $h'(x) = \pi \cdot 0{,}25 \cdot \cos\big(\pi \cdot (x - 0{,}5)\big)$ $h''(x) = -\pi^2 \cdot 0{,}25 \cdot \sin(\pi \cdot (x - 0{,}5)$ $h'''(x) = -\pi^3 \cdot 0{,}25 \cdot \cos\big(\pi \cdot (x - 0{,}5)\big)$ Notwendige Bedingung: $h''(x) = 0 \Rightarrow x_W = k - 0{,}5$ mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ Hinreichende Bedingung: $h'''(k + 0{,}5) = -\pi^3 \cdot 0{,}25 \cdot \cos\big(\pi \cdot (k - 0{,}5 - 0{,}5)\big)$ $h'''(k + 0{,}5) = -\pi^3 \cdot 0{,}25 \cdot \cos(\pi \cdot (k - 1)) \neq 0$, da $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ $h(0{,}5) = h(1{,}5) = h(2{,}5) = h(3{,}5) = 0{,}25$ Die Wendepunkte befinden sich bei $W_1(0{,}5\|0{,}25)$, $W_2(1{,}5\|0{,}25)$, $W_3(2{,}5\|0{,}25)$, und $W_4(3{,}5\|0{,}25)$,	4
3g	prüft, ob die Bahn an der Stelle $x = 2{,}5$ den gewünschten Steigungswinkel erreicht.	Steigung (im Wendepunkt): $m = h_a'(2{,}5) \approx 0{,}785$ $\tan\alpha = 0{,}785 \Rightarrow \alpha \approx 38{,}1° < 45°$ Der Steigungswinkel erreicht damit nicht den gewünschten Steigungswinkel von 45°.	3
3h	berechnet, wie viele Kubikmeter Wasser sich nach einem Regenguss maximal ansammeln können.	Berechnung der Intervallgrenzen: $0{,}1 = 0{,}25 \cdot \sin(\pi \cdot (x - 0{,}5)) + 0{,}25$ $\Rightarrow\ x_1 \approx 0{,}295, x_2 \approx 1{,}705, x_3 \approx 2{,}295$ und $x_4 \approx 3{,}705$. Die relevanten Stellen für die Berechnung der anfallenden Wassermenge sind x_2 und x_3. $V = 0{,}95 \cdot \int_{x_2}^{x_3} \big(0{,}1 - f(x)\big)\,dx \approx 0{,}0368\ [m^3]$ Zwischen den beiden Hügeln können sich maximal $0{,}0368\ m^3$ Wasser ansammeln.	5
			30

Aufgabe 3: Der Schweinezyklus

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt den Kurvenverlauf anhand von drei Aspekten im Sachkontext.	Die Anzahl der offenen Stellen für M&F Ingenieure schwankt zwischen dem 01.01.2007 und dem 01.01.2014 zwischen ca. 2600 und ca. 4100 Stück. Die höchsten Werte werden dabei nach ca. 3 Jahren und nach ca. 7 Jahren erreicht. Die allerniedrigste Anzahl offener Stellen wird nach fast 6 Jahren erreicht.	3
3b	ermittelt die minimale und die maximale Anzahl an offenen Stellen für M&F-Ingenieure im betrachteten Zeitraum mit Hilfe der Funktion D.	Mittels Funktionsanalyse des CAS werden die Extrema innerhalb des Definitionsbereiches ermittelt: maximale Anzahl: ca. 4 064 minimale Anzahl: ca. 2 641 Die minimale Anzahl der offenen Stellen beträgt ca. 2 641 Stück, die maximale Anzahl offener Stellen beträgt ca. 4 064 Stück.	5
3c	berechnet, wie viele Stellen für M&F Ingenieure im Zeitraum von 2007 bis 2014 im Mittel offen waren.	mittlere Anzahl: $\frac{1}{7}\int_0^7 D(t)dt \approx 3\,457$ Im Mittel gab es im Zeitraum vom 01.01.2007 bis 01.01.2014 ca. 3 457 offene Stellen für M&F Ingenieure.	3
3d	zeigt, dass die Anzahl der arbeitslosen M&F-Ingenieure in Personen mittels der folgenden Gleichung der Funktion A angegeben werden kann.	Es gilt: $A'(t) = 1\,660{,}5 \cdot \cos(1{,}35t + 1{,}34) = a(t)$ daraus folgt, dass A(t) eine Stammfunktion von a(t) ist. Des Weiteren ist ein Bestandspunkt gegeben: $P(0{,}25 \mid 4\,598)$ $A(0{,}25) = 4\,598$ Daraus folgt, dass A(t) die zur momentanen Änderungsfunktion a(t) zugehörige Bestandsfunktion ist, auf der der angegebene Bestandspunkt liegt.	4
3e	zeichnet den Graphen von A(t) in die Abb. 3.2 mit ein und	 *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3e	beurteilt, ob zwischen 2007 und 2014 ein „Schweinezyklus“ auf dem Arbeitsmarkt der M&F-Ingenieure beobachtet werden kann.	Im Großen und Ganzen entspricht der Verlauf einem Schweinezyklus (wobei der Hochpunkt des Angebotes und der Tiefpunkt der Nachfrage bzw. andersrum nicht exakt zeitgleich eintreten). Es ist erkennbar, dass die verzögerte Mengenanpassung zum für den Schweinezyklus typischen Auseinanderfall von Angebot und Nachfrage führt.	
3f	ermittelt alle Stellen im Definitionsbereich, an denen die Gleichung gilt und	Lt. CAS gilt $D(t) = A(t)$ an den Stellen $t_1 \approx 1{,}30$; $t_2 \approx 3{,}93$ und $t_3 \approx 6{,}33$.	4
	interpretiert die Gleichung im Sachzusammenhang.	Die Bestandswerte beider Funktionen sind identisch, d. h. die Anzahl der offenen Stellen entspricht an jeder dieser Stellen exakt der Anzahl der arbeitslosen M&F- Ingenieure.	
3g	zeigt, dass diese Aussage falsch ist und	Mittels Graphik oder Wertetabellenvergleich oder den Verweis auf die folgende Rechnung lässt sich nachweisen, dass die Aussage nicht stimmt.	5
	ermitteln Sie, wie viel Zeit (in Tagen) seit dem 01.01.2007 tatsächlich vergangen war, als der Unterschied zwischen der Anzahl der arbeitslosen M&F- Ingenieure und der Anzahl der offenen Stellen für M&F- Ingenieure am größten war.	Differenzenfunktion $M(t) = A(t) - D(t)$ Extremstellen der Differenzenfunktion: notwendige Bedingung: $M'(t) = 0 \Rightarrow t_1 \approx 0{,}425246;\ t_2 \approx 2{,}61232$ und $t_3 \approx 5{,}13873$ hinreichende Bedingung: $M''(t_1) \neq 0$, $M''(t_2) \neq 0$, $M''(t_3) \neq 0$, $M(0{,}425246) \approx 1\,123$ $M(2{,}61232) \approx -1\,850$ $M(5{,}13873) \approx 1\,567$ Da beim Unterschied nur der Betrag relevant ist, ist t_2 der exakte Zeitpunkt, an dem der Unterschied zwischen der Anzahl der Arbeitslosen und der Anzahl der offenen Stellen für M&F Ingenieure am größten ist, es waren also ca. 2,61 Jahre seit dem 01.01.2007 vergangen, also ca. 953 Tage.	
			30