Deckblatt HT 17 (eA)

Zentrale Abschlussprüfung Mathematik Berufliches Gymnasium
05. April 2017

erhöhtes Anforderungsniveau (**eA**)

Vom Prüfling auszufüllen:		
Name, Vorname:		
Klasse:		
Schule/Zweig:		
Unterschrift:		
Bitte kreuzen Sie die von Ihnen gewählten Aufgaben an:		
Aufgaben 1 und 2:	Analytische Geometrie	
	Lineare Algebra	
	Stochastik	
Von der <u>Lehrkraft</u> anzukreuzen:		
Aufgabe 3:	Analysis (allgemeiner Anwendungsbezug)	
	Analysis (Gesundheit und Soziales, Ernährung)	
	Analysis (Technik)	
	Analysis (Wirtschaft)	

Nicht vom Prüfling auszufüllen!

Punkteverteilung und Bewertung:

Aufgabenteil	A1	A2	A3	Summe	in Prozent
Erreichbar	40	40	40	**120**	**100**
Erstkorrektur					
Zweitkorrektur					

Erstkorrektor/in		Zweitkorrektor/in	
Note (Notenpunkte)		Note (Notenpunkte)	
Datum, Unterschrift		Datum, Unterschrift	

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Im nachfolgenden Koordinatensystem (Abb. 1.1) ist der Graph einer Funktion f dargestellt.

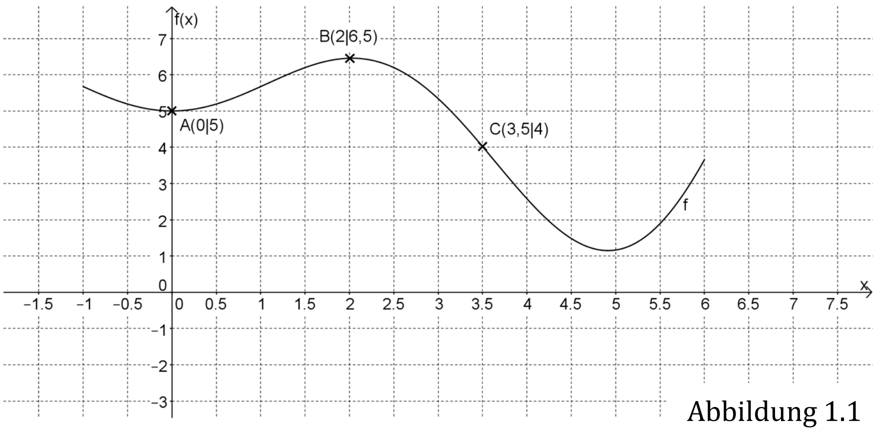


Abbildung 1.1

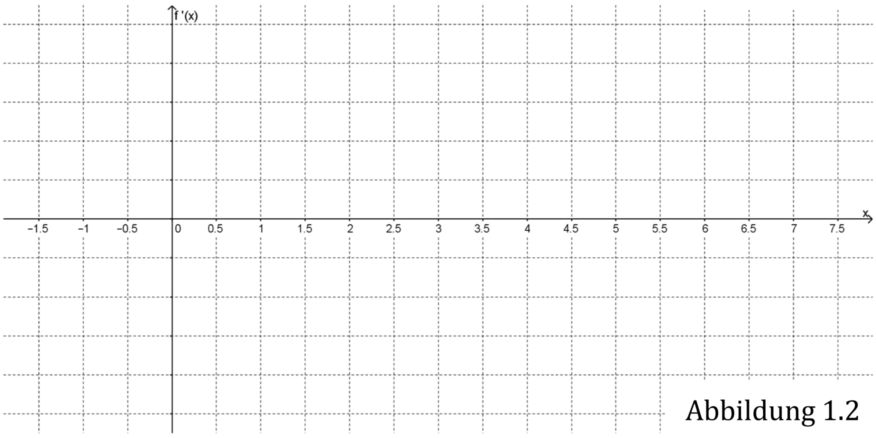


Abbildung 1.2

a1) Bestimmen Sie näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$.

a2) Skizzieren Sie den Verlauf der Ableitungsfunktion f' in das untere Koordinaten–system (Abb. 1.2).

a3) Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: „An der Stelle $x_2 = 2$ muss der Wert der zweiten Ableitung positiv sein."

b) Gegeben ist die Gleichung der Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -x \cdot (x - a)^2 = -x^3 + 2a \cdot x^2 - a^2 \cdot x \text{ mit } a > 0.$$

Nachfolgend (Abb. 1.3) ist ein Graph der Funktionenschar f_a dargestellt.

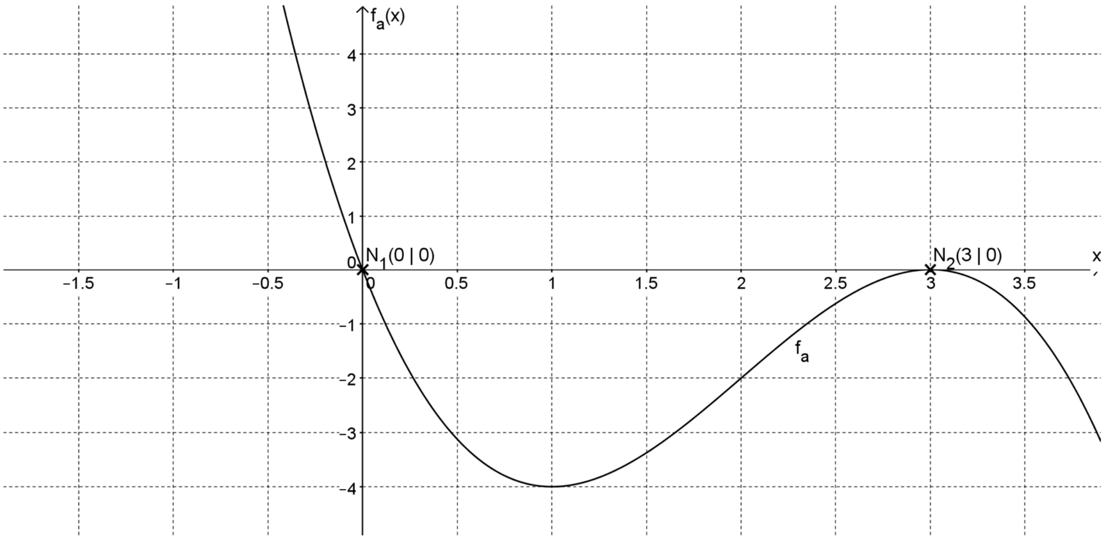


Abbildung 1.3

b1) Zeigen Sie, dass die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ Nullstellen der Funktionenschar f_a sind.

b2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Flächen, die die Graphen der Funktionenschar f_a mit der Abszissenachse (x-Achse) einschließen.

c) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 0{,}5^x + 1.$$

c1) Geben Sie die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an:

c2) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S(0\|1)$.		
Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.		
Der Graph der Funktion f schneidet niemals den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 1$.		

d) Gegeben sind die Gleichungen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x \quad \text{und} \quad g(x) = m \cdot x.$$

Nachfolgend (Abb. 1.4) ist ausschnittsweise der Graph der Funktion f dargestellt.

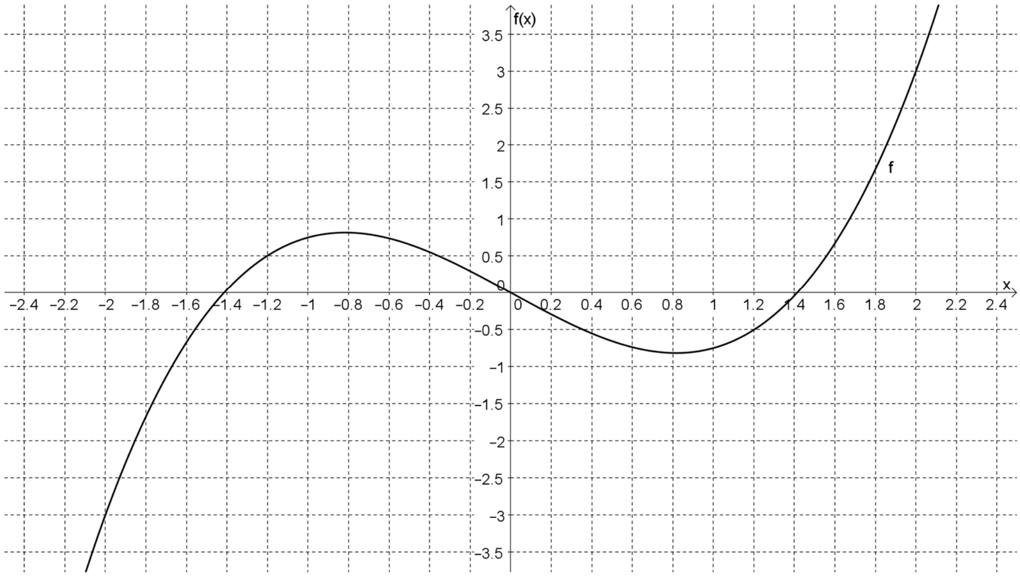


Abbildung 1.4

d1) Ermitteln Sie die Steigung m des Graphen der Funktion g so, dass die Stelle $x_1 = -2$ Schnittstelle beider Funktionsgraphen ist und

zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in das Koordinatensystem (Abb.1.4) ein.

d2) Begründen Sie, dass der Ausdruck $\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))dx = 0$ wahr ist.

e) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Für keinen Wert des Parameters k liegt der Vektor $\vec{a}$ in der x-y-Ebene.		
Es gibt genau zwei Werte des Parameters k, so dass der Vektor $\vec{a}$ ein Einheitsvektor ist.		
Es gibt genau einen Wert des Parameters k, so dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.		
Für keinen Wert des Parameters k steht ein Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.		
Es gibt keinen Wert des Parameters k, so dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebene aufspannen.		

f) Die Grundfläche einer Pyramide liegt in der Ebene E, die mit der Ebenengleichung

$$E\colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 18$$

beschrieben wird, und die Spitze der Pyramide liegt im Punkt S mit den Koordinaten $S(1|2|0)$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Höhenfußpunktes der Pyramide.

g) Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $E\colon 5x_1 - x_3 = 10$ oder auch

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

g1) Geben Sie eine Gleichung für eine Gerade an, die echt parallel zur Ebene E verläuft.

g2) Geben Sie eine Gleichung für eine Gerade an, die senkrecht zur Ebene E verläuft.

g3) Geben Sie eine Gleichung für eine Gerade an, die in der Ebene E liegt.

g4) Geben Sie den Parameter k des Punktes $P(k|2|3k)$ so an, dass der Punkt in der Ebene E liegt.

h) Zeichnen Sie die Achsenschnittpunkte der Ebene E_1 mit der Gleichung

$$E_1\colon 6x + 5y + 15z = 30$$

in das nachfolgende Koordinatensystem (Abbildung 1.5) ein und

geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebene E_1 mit der der x-z-Ebene an.

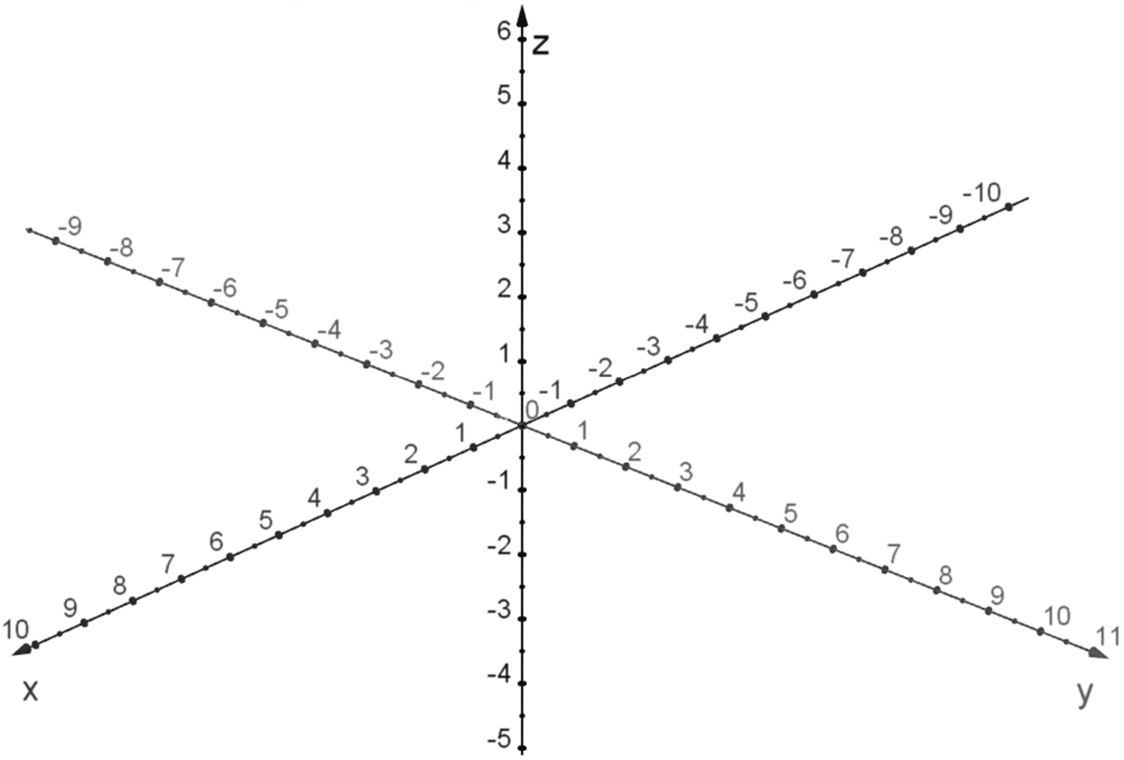


Abbildung 1.5

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Der Neubau**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	3	4	5	4	8	6	6	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Für eine berufliche Schule in Schleswig-Holstein soll ein zusätzliches Unterrichtsgebäude errichtet werden. Die Abbildung 2.1 zeigt das Gebäude als Winkelbau in perspektivischer Ansicht (alle Maße sind in Metern [m] angegeben).

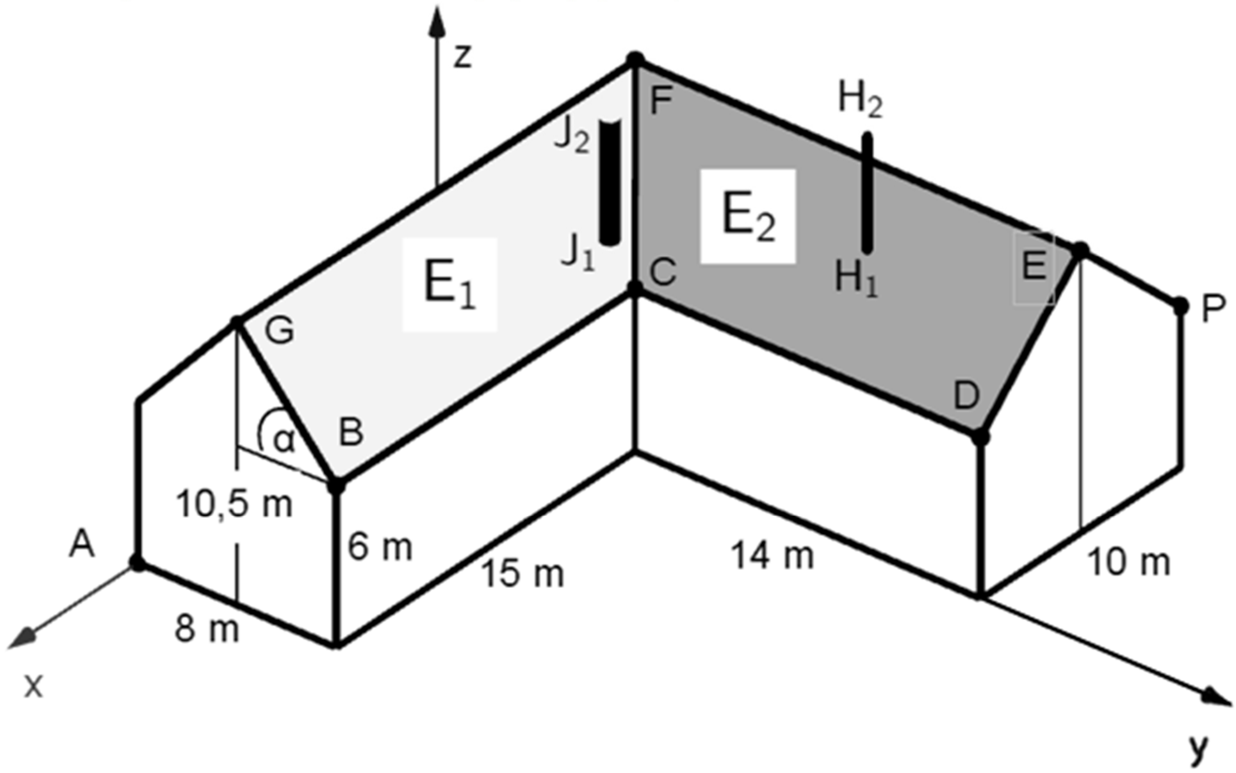


Abbildung 2.1 Darstellung des Gebäudes (nicht maßstäblich)

Für die Darstellung in Abbildung 2.1 sind die Punkte mit den folgenden Koordinaten gegeben:
$B(15|8|6)$, $C(0|8|6)$, $D(0|22|6)$, $E(-5|22|10{,}5)$, $F(-5|4|10{,}5)$, $G(15|4|10{,}5)$.

Es soll sich zunächst an der Darstellung des Gebäudes orientiert werden (die Giebelseiten sind jeweils symmetrisch gestaltet).

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A und P an und

berechnen Sie den Dachneigungswinkel α.

Die Dachkehle $\overline{CF}$ soll mit einem Kupferblech ausgeführt werden. Die Kosten des Rohmaterials für die Kupferkehle belaufen sich auf 25,00 € pro laufendem Meter.

b) Berechnen Sie die Materialkosten für die gesamte Dachkehle.

c) Zeigen Sie, dass die Firstlinie $\overline{GF}$ und die Firstlinie $\overline{FE}$ im rechten Winkel zueinander liegen.

Für die Eindeckung des Daches werden Dachpfannen benötigt. Da es sich um einen Winkelbau handelt, wird bei der Beschaffung der Dachpfannen mit einem Verschnitt von ca. 10 % der gesamten Dachfläche gerechnet. Für das Bedachungsmaterial hat der Bauträger einen Betrag von 5 800,00 Euro vorgesehen. Die in Tabelle 2.1 angegebenen Dachpfannen mit den entsprechenden Preisen pro Quadratmeter stehen für den Bau zur Verfügung. Der gesamte Flächeninhalt von drei der vier Dachflächen ist mit einem Flächeninhalt von ca. 378 m^2 bekannt. Nur der Flächeninhalt der Dachfläche, die in der Ebene E_1 enthalten ist, ist noch nicht bestimmt worden.

Bezeichnung	Qualität	Preis in Euro pro Quadratmeter
Großflächenziegel, naturrot	einfach	5,60
Großflächenziegel, schwarz matt engobiert	mittelmäßig	8,95
Dachziegel Odenwälder Dachpfanne, weinrot glasiert	mittelmäßig/hochwertig	10,21
GALANT FINESSE, weinrot glasiert	sehr hochwertig	18,50

Tabelle 2.1 Auswahl der Dachpfannen

d) Berechnen Sie, welche Qualitätsstufe der Auftraggeber für die gesamte Bedachung maximal auswählen kann.

Auf dem Dach soll eine Antenne (in Abbildung 2.1 dargestellt durch die Strecke $\overline{H_1H_2}$) lotrecht montiert werden. Die Spitze H_2 der Antenne hat die Koordinaten $H_2(-3|15|13)$.

e) Zeigen Sie, dass die Antenne in dem Punkt $H_1(-3|15|8{,}7)$ am Dach befestigt werden muss.

Für die Formung des Kupferbleches in der Dachkehle $\overline{CF}$ werden die Gleichungen der Dachebenen E_1 und E_2 benötigt.

f) Zeigen Sie, dass die Ebene E_1 durch die Ebenengleichung $E_1: 9y + 8z = 120$ beschrieben werden kann und

geben Sie eine Ebenengleichung der Ebene E_1 in der Parameterform an.

Geben Sie eine Ebenengleichung für die Dachebene E_2 an und

erläutern Sie, warum der Winkel des Kehlbleches, das für die Dachkehle $\overline{CF}$ benötigt wird, mit Hilfe der Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 berechnet werden kann.

Eine Projektgruppe der Schule plant, mithilfe der Giebelspitze G des neuen Gebäudes eine Sonnenuhr auf dem Schulhof zu konstruieren. Es sind folgende Werte für den Sonnenverlauf am Tag der Sonnenwende (21.06. eines jeden Jahres) bekannt:

Uhrzeit:	11:00 Uhr	12:00 Uhr	14:00 Uhr
Richtungsvektor der Sonnenstrahlen	$\vec{s}_{11:00} =$	$\vec{s}_{12:00} =$	$\vec{s}_{14:00} = \begin{pmatrix} 10{,}00 \\ -\ 3{,}05 \\ -16{,}74 \end{pmatrix}$
Schattenpunkt der Giebelspitze G auf dem Schulhof	$Q_{11:00}(23{,}88\|17{,}08\|0)$	$Q_{12:00}(\quad\|\quad\|0)$	$Q_{14:00}(\quad\|\quad\|0)$

Tabelle 2.2 Sonnenverlauf

Der Schulhof liegt in der x-y-Ebene und soll als vollständig eben betrachtet werden.

g) Vervollständigen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle 2.2 und

zeichnen Sie die Schattenpunkte der Giebelspitze G in das nachfolgende Koordinatensystem (Abbildung 2.2) ein.

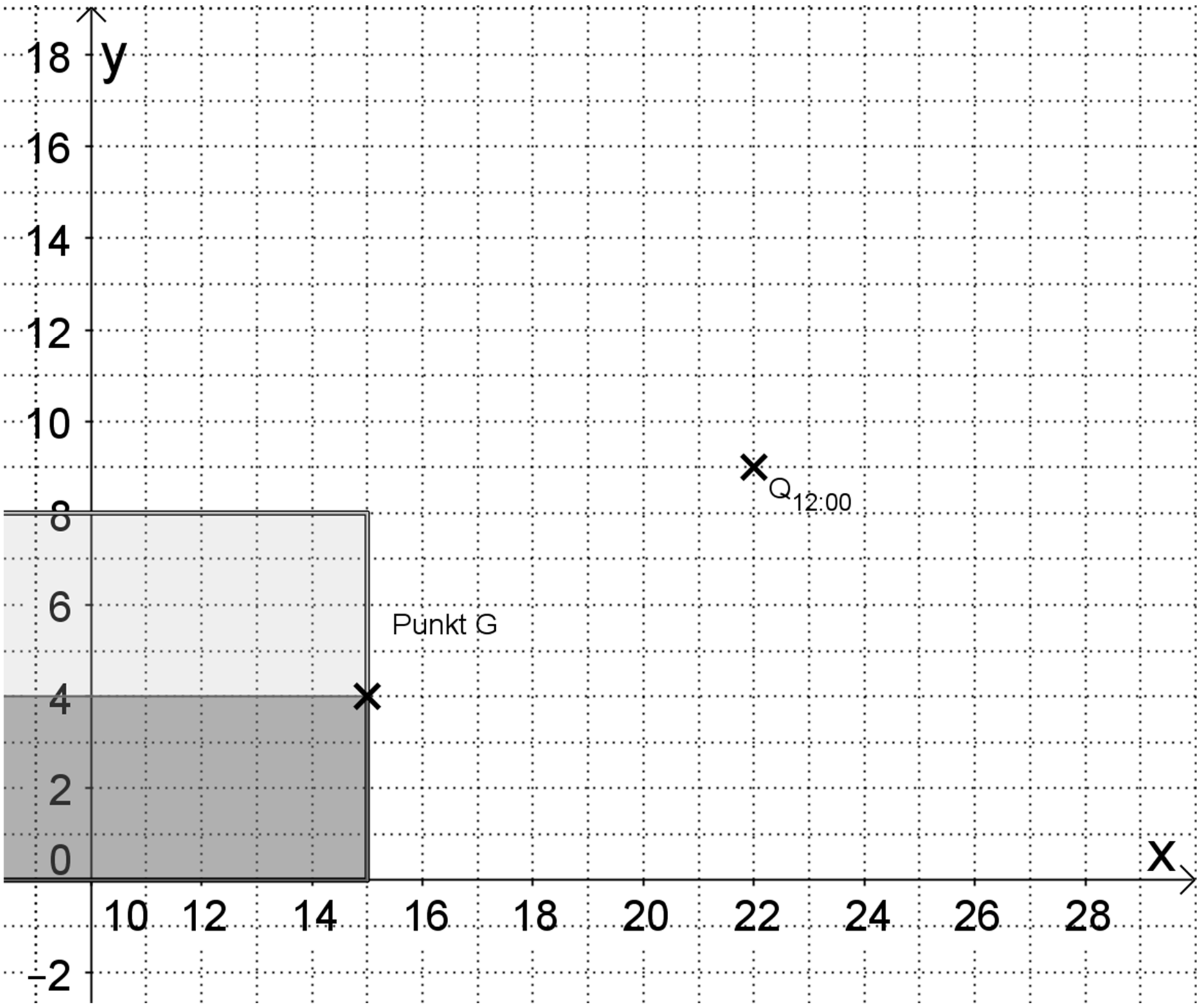


Abbildung 2.2

Die Abluft der Heizung wird durch ein lotrechtes Edelstahlrohr abgeführt, dessen Austrittsöffnung im Punkt $J_2(0{,}2|7|z)$ liegt. Je nach Heizleistung und Abgastemperatur ist ein anderer Abstand d zwischen der Mitte der Austrittsöffnung J_2 und der mit Solarzellen bedeckten Dachfläche in Ebene E_1 einzuhalten. Dieser muss bei der geplanten Heizleistung und der sich daraus ergebenen Abgastemperatur für das Gebäude mindestens zwei Meter betragen.

h) Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes J_1 des Abluftrohres durch das Dach und

bestimmen Sie die Koordinate z des Punktes J_2 so, dass der vorgegebene Mindestabstand von zwei Metern zu den in Ebene E_1 liegenden Solarzellen eingehalten wird.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Im nachfolgenden Koordinatensystem (Abb. 1.1) ist der Graph einer Funktion f dargestellt.

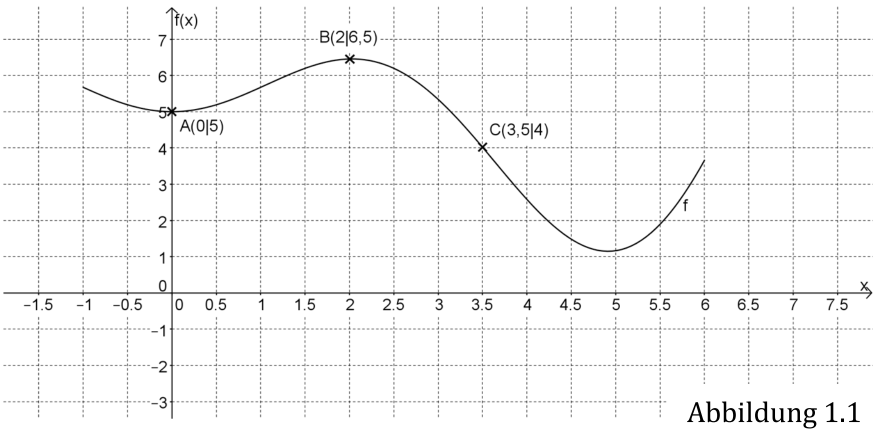


Abbildung 1.1

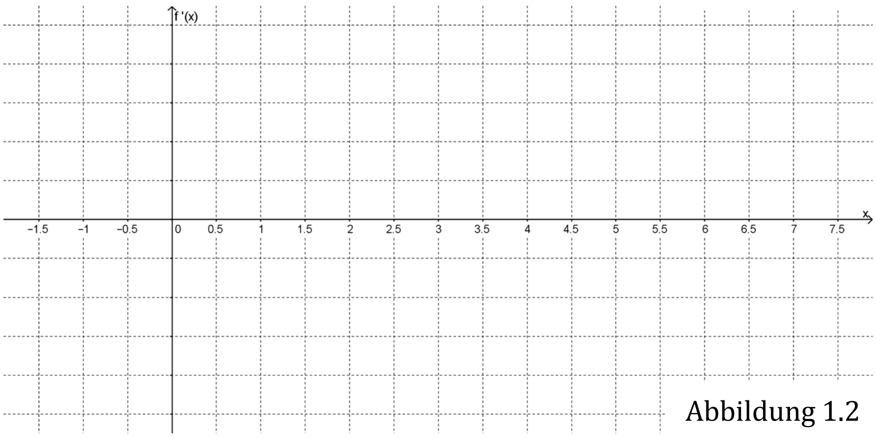


Abbildung 1.2

a1) Bestimmen Sie Sie näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$.

a2) Skizzieren Sie den Verlauf der Ableitungsfunktion f' in das untere Koordinaten–system (Abb. 1.2).

a3) Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: „An der Stelle $x_2 = 2$ muss der Wert der zweiten Ableitung positiv sein.“

b) Gegeben ist die Gleichung der Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -x \cdot (x - a)^2 = -x^3 + 2a \cdot x^2 - a^2 \cdot x \text{ mit } a > 0.$$

Nachfolgend (Abb. 1.3) ist ein Graph der Funktionenschar f_a dargestellt.

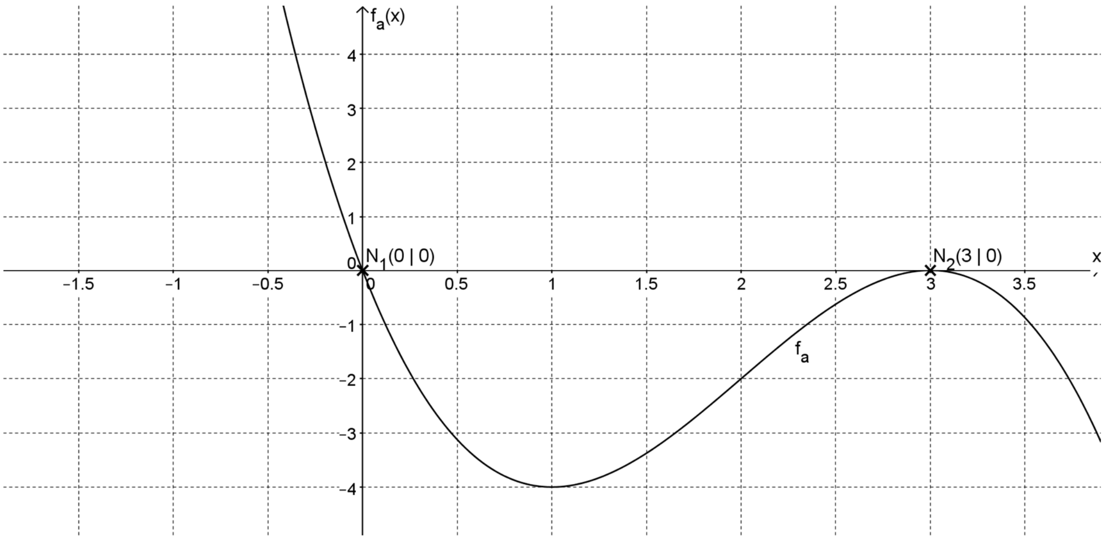


Abbildung 1.3

b1) Zeigen Sie, dass die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ Nullstellen der Funktionenschar f_a sind.

b2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Flächen, die die Graphen der Funktionenschar f_a mit der Abszissenachse (x-Achse) einschließen.

c) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 0{,}5^x + 1.$$

c1) Geben Sie die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an:

c2) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).		
Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.		
Der Graph der Funktion f schneidet niemals den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 1$.		

d) Gegeben sind die Gleichungen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x \quad \text{und} \quad g(x) = m \cdot x.$$

Nachfolgend (Abb. 1.4) ist ausschnittsweise der Graph der Funktion f dargestellt.

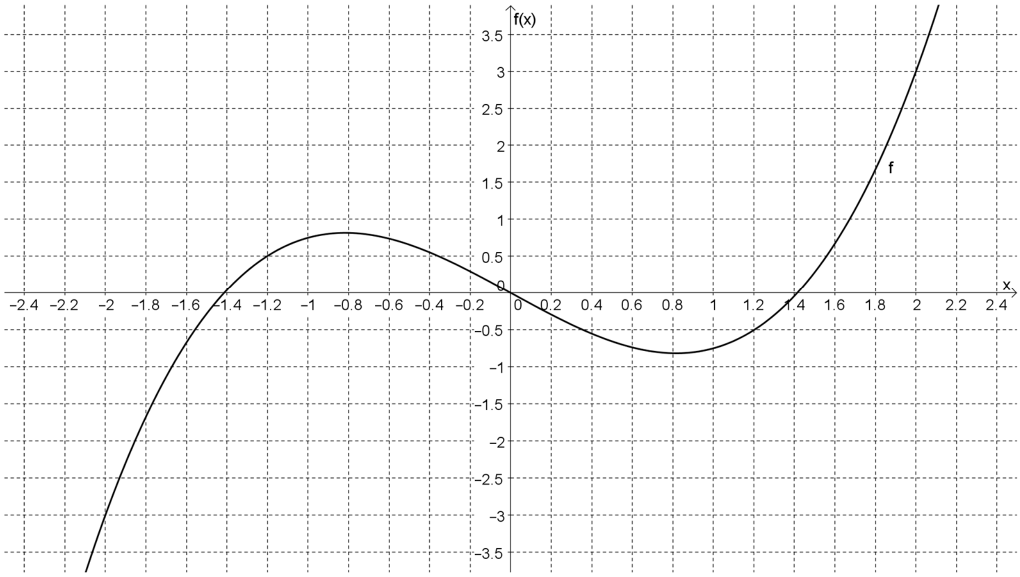


Abbildung 1.4

d1) Ermitteln Sie die Steigung m des Graphen der Funktion g so, dass die Stelle $x_1 = -2$ Schnittstelle beider Funktionsgraphen ist und

zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in das Koordinatensystem (Abb.1.4) ein.

d2) Begründen Sie, dass der Ausdruck $\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))dx = 0$ wahr ist.

e) Gegeben sind die Matrizen $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

e1) Bestimmen Sie alle Matrizen G, für die $F \cdot G = G \cdot F$ gilt.

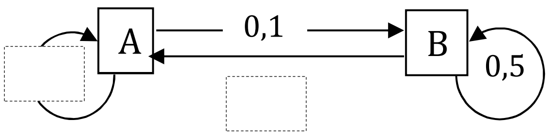
e2) Ermitteln Sie die Elemente der Matrix G so, dass $F + 2G^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ gilt.

f) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2x \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

f1) Bestimmen Sie für die Matrizen A und B die Werte a und x so, dass $A \cdot B = C$ gilt.

f2) Zeigen Sie, dass die Matrix B nur für $x \neq 0$ invertierbar ist.

g) Gegeben ist der unvollständige Übergangsgraph mit der zugehörigen stochastischen Übergangsmatrix in Abbildung 1.5.



$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{von} & A \quad B\end{array} \\ \text{zu} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbildung 1.5

g1) Ergänzen Sie in der Abbildung 1.5 die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten im Übergangsgraphen und

geben Sie die Übergangsmatrix M an.

g2) Ermitteln Sie die Verteilung nach einem Übergang, wenn die Startverteilung $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ beträgt.

h) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Jede quadratische Matrix ist invertierbar.		
Das Produkt aus einer quadratischen Matrix A und der Einheitsmatrix E ergibt die inverse Matrix A^{-1}.		
Für die Matrizengleichung $A \cdot X + B \cdot X = C$ (alle gegebenen Matrizen sind invertierbar und vom gleichen Typ) lautet die nach Matrix X umgestellte Form der Gleichung: $X = (A + B)^{-1} \cdot C$.		
Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ kann die Rechenoperation $A \cdot B$ ausgeführt werden.		
Eine Matrix in der Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt mit $a \cdot b \cdot c = 1$ einen zyklisch stabilen Prozess der Länge $n = 3$. Wenn aber $a \cdot b \cdot c > 1$ gilt, dann führt dies zu einer Vergrößerung des Bestandes.		

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Landwirtschaftlich genutzte Flächen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	3	4	3	3	6	7	6	8	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, … $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, … $\in \mathbb{R}$.

Eine Studie der Universität Flensburg aus dem Jahr 2013 befasst sich mit der Landschaftsentwicklung im Raum Flensburg. Mit Hilfe von Landschaftskarten aus den Jahren 1877, 1953, 1980, 2003, 2004 und 2013 werden Veränderungen der Landschaftsnutzung in einem repräsentativen Gebiet untersucht.
Betrachtet man in dem Jahr 2003 nur die landwirtschaftlich genutzten Flächen in diesem Gebiet, d. h. Ackerland (A), Grünland (G) und Wald (W), so nehmen diese insgesamt eine Fläche von 21,13 km² ein. Die nachfolgende Tabelle 2.1 gibt die Flächenmaße der landwirtschaftlich genutzten Flächen für das Jahr 2003 im untersuchten Gebiet an.

Flächenmaße der landwirtschaftlich genutzten Flächen in km² für das Jahr 2003		
Ackerland (A)	**Grünland (G)**	**Wald (W)**
2,75	10,56	7,82

Tabelle 2.1

a) Zeigen Sie, dass die Verteilung für die drei Flächenarten Ackerland, Grünland und Wald gemäß o. g. Tabelle durch den Verteilungsvektor $\vec{v}_{2003} = (A \quad G \quad W)^T$ $= (0{,}13 \quad 0{,}50 \quad 0{,}37)^T$ hinreichend genau beschrieben werden kann.

Ein zentraler Punkt der Studie ist es zu untersuchen, wie sich der Verteilungszustand der landwirtschaftlich genutzten Flächen im Zeitraum 1877 bis 2013 entwickelt hat. Die Ergebnisse der Untersuchungen haben gezeigt, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten der landwirtschaftlich genutzten Flächen (Angaben immer zum Jahreswechsel) über den betrachteten Zeitraum konstant geblieben sind. Die Tabelle 2.2 beschreibt diese jährlichen Übergänge.

Übergangswahrscheinlichkeiten		von		
		Ackerland	**Grünland**	**Wald**
zu	**Ackerland**	0,910	0,01	0,01
	Grünland	0,075	0,97	0,01
	Wald	0,015	0,02	0,98

Tabelle 2.2

b) Erstellen Sie die Übergangsmatrix M, die die jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten darstellt.

Erläutern Sie, dass die Übergangsmatrix eine stochastische Matrix ist.

Interpretieren Sie die Bedeutung der Spalteneintragungen am Beispiel einer Spalte.

c) Ermitteln Sie mithilfe des Verteilungsvektors $\vec{v}_{2003} = (0{,}13 \quad 0{,}50 \quad 0{,}37)^T$, wie die landwirtschaftlich genutzten Flächen (A, G, W) im Jahr der Studie (2013) verteilt wären, wenn die jährliche Übergangsverteilung konstant geblieben wäre und mit Hilfe der Tabelle 2.2 beschrieben werden könnte.

Ein Student hat im Archiv aus einer Karte für das Jahr 1980 folgenden Verteilungszustand der 21,13 km² landwirtschaftlich genutzten Flächen ermittelt:

Flächenmaße der landwirtschaftlich genutzten Flächen in km² aus dem Jahr 1980		
Ackerland (A)	**Grünland (G)**	**Wald (W)**
9,27	7,45	4,41

Tabelle 2.3

d) Prüfen Sie, ob diese Datenlage korrekt sein kann, wenn davon auszugehen ist, dass die jährliche Übergangsverteilung konstant geblieben ist und mit Hilfe der Tab. 2.2 beschrieben werden kann.

Die langfristige Verteilung der landwirtschaftlich genutzten Flächen kann nach Angaben des Studenten auch mit Hilfe der folgenden Matrizengleichung beschrieben werden.

$$M \cdot \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}910 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}075 & 0{,}97 & 0{,}01 \\ 0{,}015 & 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} A \\ G \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1000 \\ 0{,}4125 \\ 0{,}4875 \end{pmatrix}$$

e) Erläutern Sie anhand der obigen Matrizengleichung den Zusammenhang zwischen den Begriffen „Fixvektor“ und „Grenzmatrix“ im Sachkontext und

ermitteln Sie die Grenzmatrix M_G.

Tatsächlich ist die Entwicklung der landwirtschaftlich genutzten Flächen seit dem Jahr 2003 signifikant gestört worden. Zu diesem Zeitpunkt hielten verstärkt die Biogasanlagen Einzug. Der Ausbau dieser Anlagen hat dazu geführt, dass große Teile des Ackerlandes nur noch für den Maisanbau genutzt werden und folglich immer mehr Grünland dem Ackerland weichen musste. Auf einem großen Teil des Ackerlandes wird nur noch ausschließlich Mais angebaut. Diese Monokultur und das Problem der Bodenerosion im Winter (da auf Maisanbauflächen im Winter keine Bodenbepflanzung erfolgt) führen in der Politik zum Umdenken. Die Landesregierung möchte die Subventionen für Biogasanlagen stufenweise reduzieren. Auf der Basis ihrer langfristig gesetzten stabilen Zielverteilung:

Ackerland = 14 %, Grünland = 49 % und Wald = 37 %

möchte die Landesregierung, dass die Wissenschaftler der Universität Flensburg verschiedene Entwicklungsszenarien für das Erreichen dieses Ziels durchrechnen. Der Zwischenstand einer Studie besagt, dass mit einer jährlichen Übergangsverteilung nach der folgenden Tabelle 2.4 das langfristige Ziel der Landesregierung erreicht werden kann.
Ein Politiker stimmt dem zu, bezweifelt aber, dass das Ziel in absehbarer Zeit erreicht werden kann.

Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb eines Jahres (relative Häufigkeiten)		von		
		Ackerland	**Grünland**	**Wald**
zu	**Ackerland**	m_{11}	0,01	0,01
	Grünland	m_{21}	m_{22}	0,02
	Wald	0,01	m_{32}	m_{33}

Tabelle 2.4

f) Berechnen Sie die in der Tab. 2.4 fehlenden fünf Parameter (zwei Dezimalstellen) und bewerten Sie die Aussage des Politikers.

Ein Landwirt wünscht eine Düngemittelspezialmischung, um den angebauten Mais für eine Biogasanlage optimal mit Dünger zu versorgen. Ein Düngemittelhersteller kann aus verschiedenen Düngern, die zur Verfügung stehen, solche speziellen Düngemittelmischungen herstellen. Dabei sollen für eine ertragsoptimale Düngemittelmischung für einen Hektar zu düngende Fläche genau 180 kg Nitrat, 100 kg Phosphat und 90 kg Kalium enthalten sein, um mit einem maximalen Ertrag rechnen zu können. Der Hersteller beschließt die Spezialmischung durch die Mischung drei bereits vorhandener Dünger (D1, D2 und D3) herzustellen, deren Nährstoffe (Nitrat, Phosphat und Kalium in Kilogramm pro Tonne Dünger) in der folgenden Tabelle 2.5 angegeben sind.

Nährstoffe	Nährstoffe in kg pro Tonne Dünger		
	D1	**D2**	**D3**
Nitrat (N)	150	180	120
Phosphat (P)	100	120	40
Kalium (K)	25	100	70
Preis in Euro pro Tonne	30,00	40,00	27,50

Tabelle 2.5

g) Ermitteln Sie, wie man aus den zur Verfügung stehenden Düngern (D1, D2, D3) eine Düngemittelmischung herstellen kann, so dass die zu düngende Fläche ertragsoptimal versorgt wird.

Geben Sie an, wie viel kg Düngemittelmischung pro Hektar benötigt würden und bestimmen Sie die Kosten pro Hektar, die für diese Düngemittelmischung anfallen.

Der Düngemittelhersteller weiß aus Erfahrung, dass drei Spezialmischungen (DM1, DM2 und DM3) häufiger nachgefragt werden. Er stellt in einer ersten Stufe aus vier verschiedenen Nährstoffen (Nitrat, Phosphat, Kalium und Schwefel in Gramm pro Kilogramm Dünger) die Dünger D4, D5 und D6 her, die dann in einer zweiten Stufe zu den Spezialmischungen gemischt werden können.

Nährstoffe	Nährstoffe in g je kg Dünger:		
	D4	D5	D6
Nitrat (N)	150	200	50
Phosphat (P)	50	0	x+25
Kalium (K)	0	100	25
Schwefel (S)	100	150	0

Tabelle 2.6

Dünger	Dünger in kg je kg Düngemittelmischung		
	DM1	DM2	DM 3
D4	0,3	0,1	0,1
D5	0,1	0,4	0,2
D6	x+0,3	0,1	0,6

Tabelle 2.7

h) Erstellen Sie eine Stufe des zugehörigen Materialverflechtungsdiagrammes, das den stufenweisen Herstellungsprozess der Düngemittelmischung darstellt und

bestimmen Sie, in Abhängigkeit von x ($x \geq 0$), wie groß der Vorrat an Nährstoffen beim Düngemittelhersteller sein sollte, damit von den Düngemittelmischungen DM1, DM2 und DM3 jeweils 1 000 kg hergestellt werden können.

Bestimmen Sie den technologieabhängigen Parameter x, wenn entsprechend der Bevorratungsmöglichkeiten des Düngemittelherstellers maximal 100 kg Kalium gelagert werden können und

geben Sie an, wie viele Mengeneinheiten (in kg) für diesen Fall von den anderen Nährstoffen mindestens bzw. maximal vorgehalten werden müssten.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Im nachfolgenden Koordinatensystem (Abb. 1.1) ist der Graph einer Funktion f dargestellt.

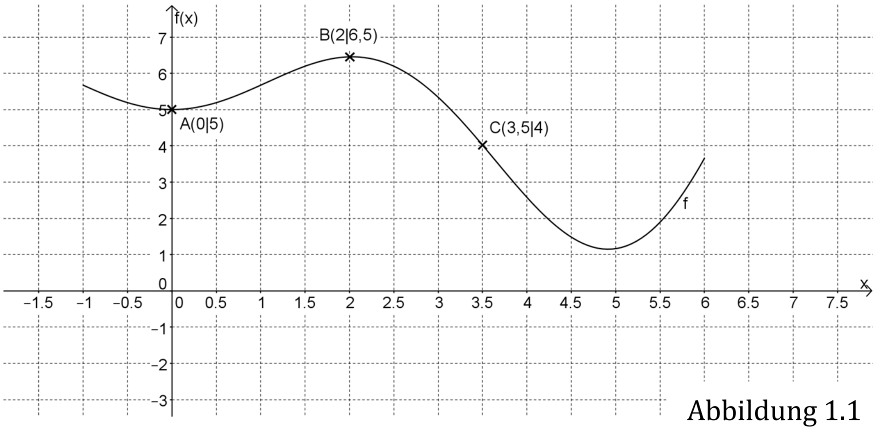


Abbildung 1.1

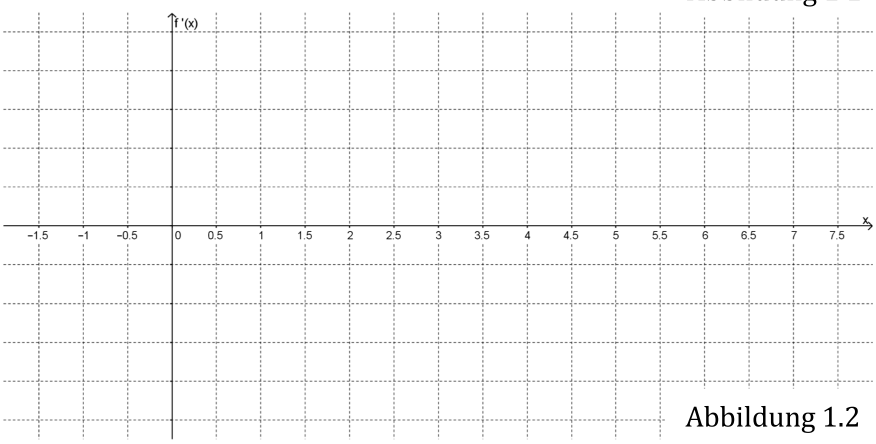


Abbildung 1.2

a1) Bestimmen Sie Sie näherungsweise den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_1 = 3{,}5$.

a2) Skizzieren Sie den Verlauf der Ableitungsfunktion f' in das untere Koordinaten–system (Abb. 1.2).

a3) Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: „An der Stelle $x_2 = 2$ muss der Wert der zweiten Ableitung positiv sein.“

b) Gegeben ist die Gleichung der Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -x \cdot (x - a)^2 = -x^3 + 2a \cdot x^2 - a^2 \cdot x \text{ mit } a > 0.$$

Nachfolgend (Abb. 1.3) ist ein Graph der Funktionenschar f_a dargestellt.

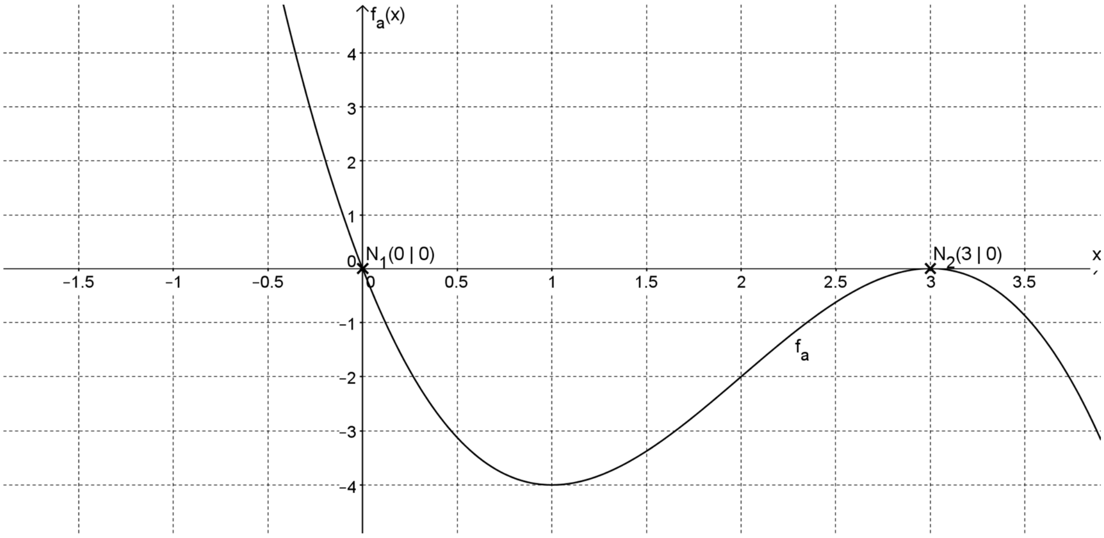


Abbildung 1.3

b1) Zeigen Sie, dass die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ Nullstellen der Funktionenschar f_a sind.

b2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Flächen, die die Graphen der Funktionenschar f_a mit der Abszissenachse (x-Achse) einschließen.

c) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 0{,}5^x + 1.$$

c1) Geben Sie die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an:

c2) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).		
Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.		
Der Graph der Funktion f schneidet niemals den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 1$.		

d) Gegeben sind die Gleichungen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x \quad \text{und} \quad g(x) = m \cdot x.$$

Nachfolgend (Abb. 1.4) ist ausschnittsweise der Graph der Funktion f dargestellt.

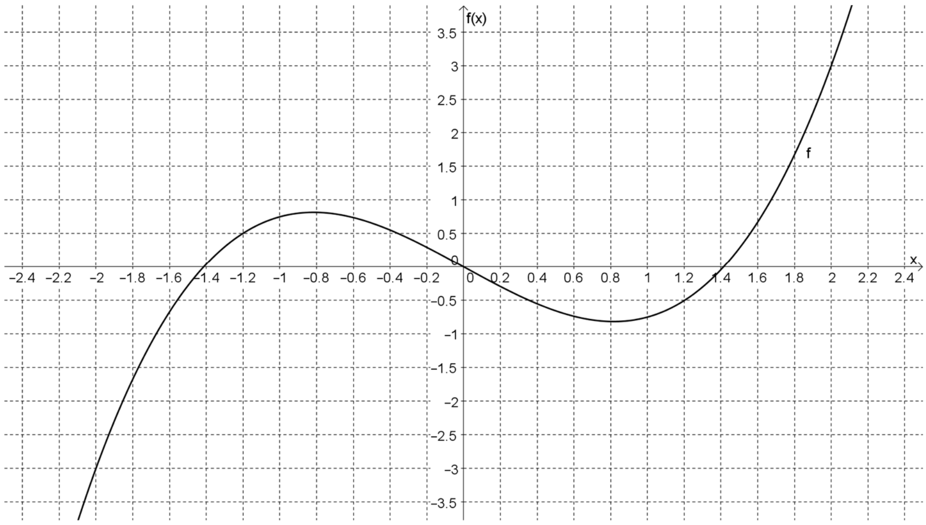


Abbildung 1.4

d1) Ermitteln Sie die Steigung m des Graphen der Funktion g so, dass die Stelle $x_1 = -2$ Schnittstelle beider Funktionsgraphen ist und

zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in das Koordinatensystem (Abb.1.4) ein.

d2) Begründen Sie, dass der Ausdruck $\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))dx = 0$ wahr ist.

e) Nachfolgend sind zwei unvollständige Vierfelderdiagramme mit Wahrscheinlichkeiten gegeben:

P	A	$\overline{A}$	Summen
B			
$\overline{B}$		0,6	
Summen		0,8	

Tabelle 1.1: Fall 1

P	A	$\overline{A}$	Summen
B			
$\overline{B}$		0,6	
Summen		0,8	

Tabelle 1.2: Fall 2

e1) Geben Sie an: $P(\overline{B}|\overline{A}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \boxed{}$

Im ersten Fall (Tab. 1.1) gilt: $P(B|A) = P_A(B) = 0{,}2$.

e2) Ergänzen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten im linken Vierfelderdiagramm (Tab. 1.1).

Im zweiten Fall (Tab. 1.2) gilt, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig voneinander sind.

e3) Ergänzen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten im rechten Vierfelderdiagramm (Tab. 1.2).

f) Gegeben ist der folgende unvollständige Wahrscheinlichkeitsbaum:

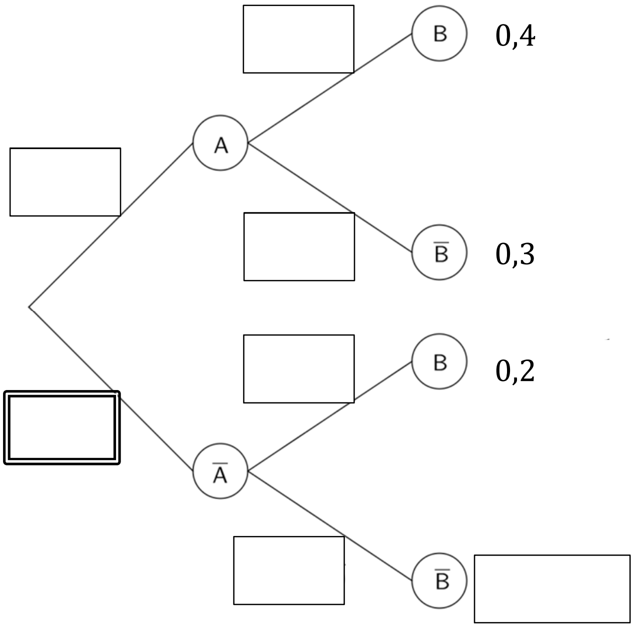


Abbildung 1.5

f1) Erläutern Sie, warum der Wert 0,3 in das doppelt gerahmte Kästchen eingetragen werden muss.

f2) Ergänzen Sie in allen verbleibenden Kästchen in Abb. 1.5 die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

g) Bei einem Hypothesentest, dem eine binomialverteilte Zufallsvariable X zugrunde lag, wurden n Personen befragt. Es galten die beiden Hypothesen:

$$H_0: p \leq 0{,}4$$
$$H_1: p > 0{,}4$$

Der Fehler erster Art (α-Fehler) wurde hierbei wie folgt ermittelt:

$$\alpha\text{-Fehler} = \sum_{k=40}^{80} \binom{80}{k} \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{80-k} \approx 0{,}04445$$

g1) Geben Sie an, wie viele Personen bei diesem Hypothesentest befragt wurden.

g2) Erläutern Sie, was der α-Fehler in diesem Fall misst.

g3) Geben Sie die Gleichung an, mit der der β-Fehler (Fehler 2. Art) berechnet werden kann, wenn man davon ausgeht, dass die reale Eintrittswahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}65$ betrug (die Berechnung selbst ist nicht gefordert).

h) Für das Merkmal x ist die folgende Urliste gegeben:

2, 2, 1, 5, 8, 1, 6, 4, 2, 6, 3, 4, 2, 8, 5, 5

h1) Geben Sie den Modus des Merkmals x an: $x_{Modus} = \boxed{}$

h2) Entscheiden Sie begründet, welches der folgenden drei Boxplotdiagramme in Abb. 1.6 die Häufigkeitsverteilung des Merkmals x korrekt beschreibt.

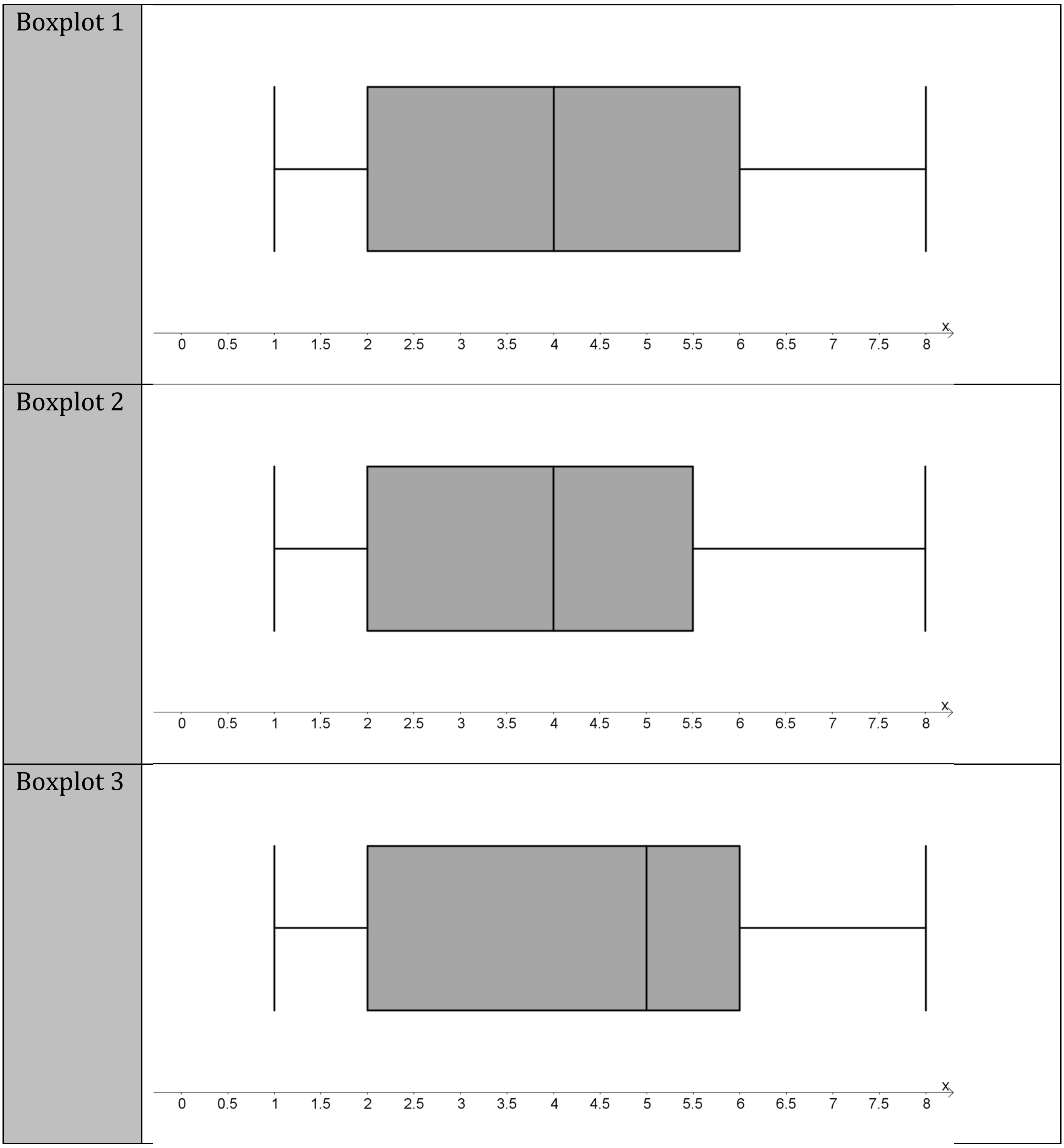


Abbildung 1.6

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Windenergie**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	5	6	4	6	4	4	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

In der Anlage am Ende dieser Aufgabe ist in Abbildung 2.1 ein Ausschnitt der Infografik „Windenergie Factsheet Deutschland“ abgebildet, die auf der Internetseite 1-stromvergleich.com veröffentlicht wurde[1].

Anlässlich eines Schulprojektes zum Thema Windenergie möchte eine Schülergruppe zum Einstieg ein paar Fakten für das Jahr 2015 liefern, die dieser Grafik direkt oder indirekt entnommen werden können.
Angegeben werden sollen:

- das Bundesland mit der höchsten installierten Leistung
- die mittlere installierte Leistung in Megawatt je Windanlage
- der Anteil der in 2015 neu installierten Leistung an der insgesamt installierten Leistung von Windkraftanlagen

a) Geben Sie die gewünschten Fakten aus der Abbildung 2.1 an.

Ein Schüler behauptet, die mittlere Stromproduktion pro Monat durch Windenergie im Jahr 2015 betrage ca. 7,1 Mrd. kWh und sei damit deutlich höher als der Median der Stromproduktion pro Monat im Jahr 2015.

b) Prüfen Sie, ob der Mittelwert richtig berechnet wurde und ob die getroffene Aussage insgesamt richtig ist.

Laut Abb. 2.1 lag die Akzeptanz von Windparks in der direkten Nachbarschaft im Jahr 2015 bei 59 % der deutschen Bevölkerung. Die Schülergruppe will 35 zufällig ausgewählte Passanten in der heimischen Fußgängerzone nach ihrer Akzeptanz von Windparks in der direkten Nachbarschaft befragen.

c) Erläutern Sie kurz, unter welchen Bedingungen die Anzahl der befragten Personen, die einen Windpark in ihrer direkten Nachbarschaft akzeptieren, als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann und

berechnen Sie bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 59 %, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass

- 20 der Befragten,
- mehr als 25 der Befragten

[1] "https://1-stromvergleich.com/windenergie/ #windenergie-2015">Infografik "Windenergie in Deutschland 2015" von 1-stromvergleich, Zugriff am 23.03.2017 um 13:15 Uhr

einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren.

Zur Überraschung der Schüler haben nur 14 der befragten Personen bekundet, dass sie einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren würden. Die Schüler vermuten daher, dass die Akzeptanz in Ihrer Region geringer ist als die 59 % im Bundesdurchschnitt 2015. Selbst ein Hypothesentest mit einer sehr geringen Irrtumswahrscheinlichkeit von maximal 2 % führt bei den vorliegenden Werten zu dieser Annahme.

d) Erläutern Sie, warum für den Hypothesentest in diesem Fall nicht mit einer Approximation (Näherung) der Binomialverteilung mittels der Normalverteilung gearbeitet werden kann.

e) Geben Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich für den benannten Hypothesentest mit 35 befragten Personen an und

bewerten Sie auf dieser Grundlage das Ergebnis von 14 zustimmenden Personen.

Einige Gruppenmitglieder sind der Meinung, dass man aufgrund des Ergebnisses der durchgeführten Befragung im Vortrag sagen sollte, dass in der eigenen Region nur 40 % der Bewohner einen Windpark in der direkten Nachbarschaft akzeptieren würden. Ein Gruppenmitglied widerspricht der Aussage und gibt als Begründung die Berechnung $\binom{35}{14} \cdot 0{,}40^{14} \cdot 0{,}60^{21} \approx 0{,}137$ an.

f) Erklären Sie die Berechnung des Gruppenmitgliedes im Sachzusammenhang und

nehmen Sie begründet zu beiden Meinungen Stellung.

In Schleswig Holstein sind sehr viele Windenergieanlagen installiert, da die hiesigen Küstenlagen viel Wind versprechen. Die Wahrscheinlichkeit der Windgeschwindigkeit an der Küste ist näherungsweise normalverteilt mit einer mittleren Windgeschwindigkeit von $\mu = 6$ Meter pro Sekunde bei einer Standardabweichung von $\sigma = 2{,}5$ Meter pro Sekunde.

g) Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (die typische Glockenkurve der Normalverteilung) für die Windgeschwindigkeit in Küstenlagen unter Berücksichtigung von μ und σ.

Eine Windenergieanlage schaltet erst ab einer für sie wirtschaftlichen Windgeschwindigkeit ein. Die Schüler konnten dem Datenblatt einer kleineren Anlage entnehmen, dass bei dieser die Einschaltwindgeschwindigkeit bei über 4 Metern pro Sekunde liegt.

h) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Windgeschwindigkeit an der Küste über der Einschaltwindgeschwindigkeit liegt.

Ermitteln Sie, wie hoch eine Einschaltwindgeschwindigkeit höchstens sein darf, damit die Anlage an der Küste mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % eingeschaltet ist.

Anlage zu Aufgabe 2 Stochastik

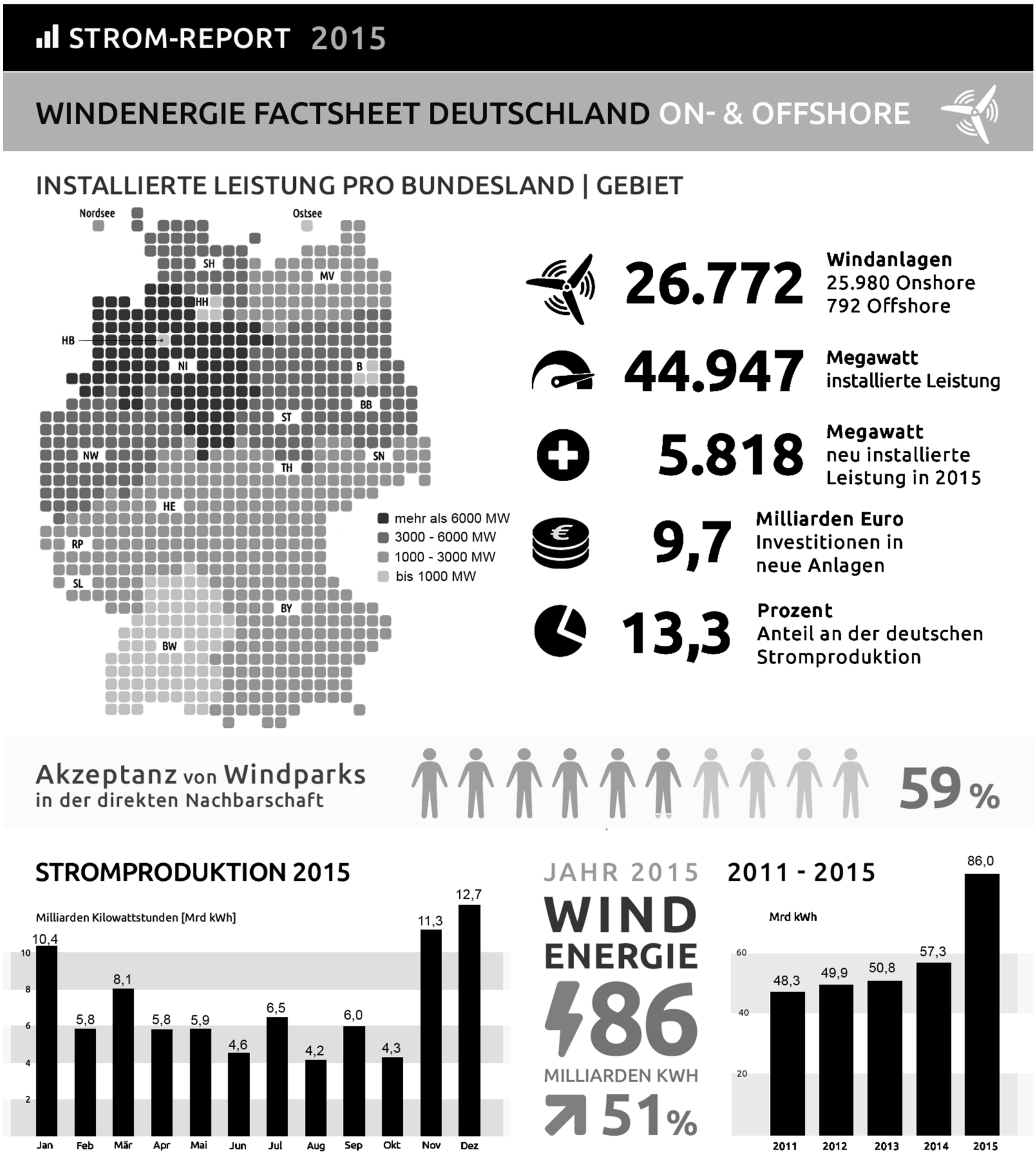


Abbildung 2.1

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Freizeitpark**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	5	6	3	6	4	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

In der Gemeinde Nordhafen wird ein Freizeitpark geplant, dessen Hauptattraktion eine Wasserbahn werden soll. Der Investor betreibt bereits in einer anderen Gemeinde erfolgreich einen vergleichbaren Freizeitpark.
Ein Mitglied der Planungsgruppe weist darauf hin, dass die Besucherzahl im bereits bestehenden Park stark von der Tageshöchsttemperatur abhängt und dies bei der Planung des neuen Parks relevant ist. In der Tabelle 3.1 sind Tageshöchsttemperaturen und Besucherzahlen einer repräsentativen Woche dargestellt.

Tag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Tageshöchsttemperatur in °C	22	26	31	24	19	23	25
Besucherzahl in 100 Personen	53	66	81	59	48	92	105

Tabelle 3.1

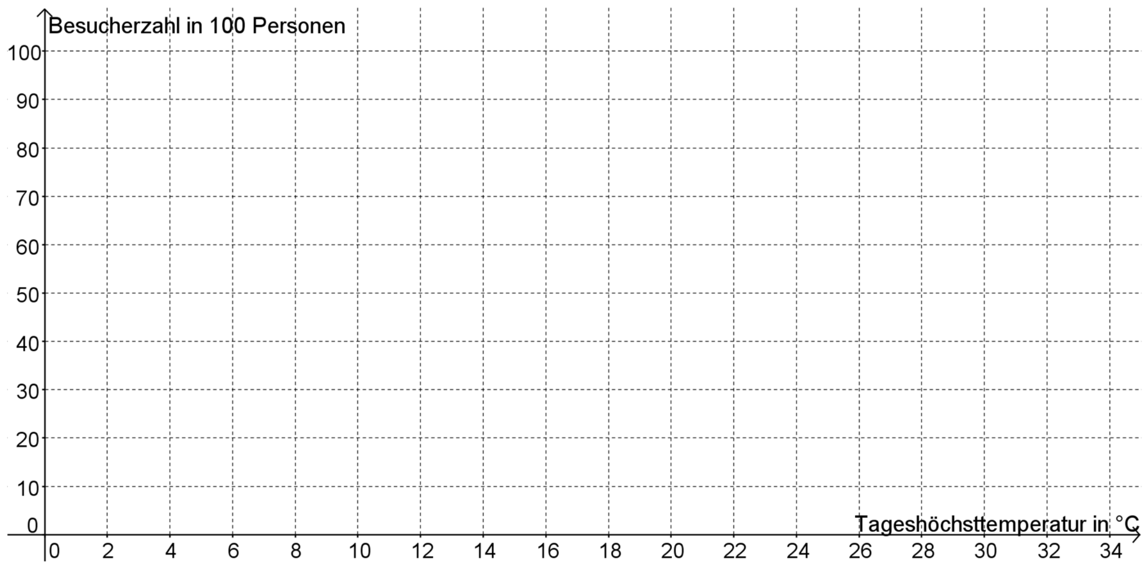


Abbildung 3.1

a) Zeichnen Sie die Wertepaare als Punkte in das Koordinatensystem (Abb. 3.1) ein, skizzieren Sie die Regressionsgerade (ohne Berechnung) und prüfen Sie, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Besucherzahl und Tageshöchsttemperatur besteht.

Neben der Temperatur beeinflusst auch der Eintrittspreis die Besucherströme in den Park. Innerhalb einer Testphase wurden die Auswirkungen verschiedener Eintrittspreise auf die eingehenden Besucherströme im alten Park untersucht. Hierbei wurden nur vollzahlende Besucher während der Einlasszeiten von 08:00 Uhr bis 16:00 Uhr erfasst (der Park schloss um 20:00 Uhr).
Die Funktionenschar h_k mit der Gleichung

$$h_k(t) = -\frac{5}{k} \cdot e^t \cdot (t^2 - 8t) \ \text{ mit } 20 \leq k \leq 50 \text{ und } 0 \leq t \leq 8$$

beschreibt die eingehenden Besucherströme an einem durchschnittlichen Tag in Besuchern pro Stunde in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden ($t = 0$ entspricht 08:00 Uhr). Der Parameter k stellt den Eintrittspreis in Euro je Besucher dar.

b) Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der der eingehende Besucherstrom im Laufe eines Tages sein Maximum annimmt.

Im vergangenen Quartal betrug der Eintrittspreis 32,00 € und die tägliche Besucherzahl lag an einem durchschnittlichen Tag bei 2 796, wobei die meisten Besucher erst in den Nachmittagsstunden in den Park gingen.

c) Zeigen Sie, dass laut Modell im Laufe der Kassenöffnungszeit von acht Stunden ca. 2 796 vollzahlende Besucher den Park täglich besuchten und

   ermitteln Sie, bis zu welcher Uhrzeit die Hälfte der vollzahlenden Besucher den Park betrat.

Für die Preisgestaltung ist nicht nur die Anzahl der vollzahlenden Besucher, sondern auch die Höhe des Umsatzes entscheidend. Der Umsatz ist das Produkt aus der Anzahl der vollzahlenden Besucher und dem Preis k.

d) Begründen Sie mathematisch, warum bei dem alten Park der Preis k keinen Einfluss auf den Umsatz hat.

Die Hauptattraktion des Parks soll eine Wasserbahn werden, in der Mehrpersonenboote aus Holz eine 500 m lange Bahn entlangfahren.
Der innere Querschnitt der Bahn lässt sich durch die Gleichung der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}75 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}(x - 0{,}4)\right) + d \text{ mit } -0{,}8 \leq x \leq 0{,}8$$

beschreiben (1 LE ≙ 1 m). Der absolute Tiefpunkt hat den Funktionswert $f(x_e) = -1{,}5$.

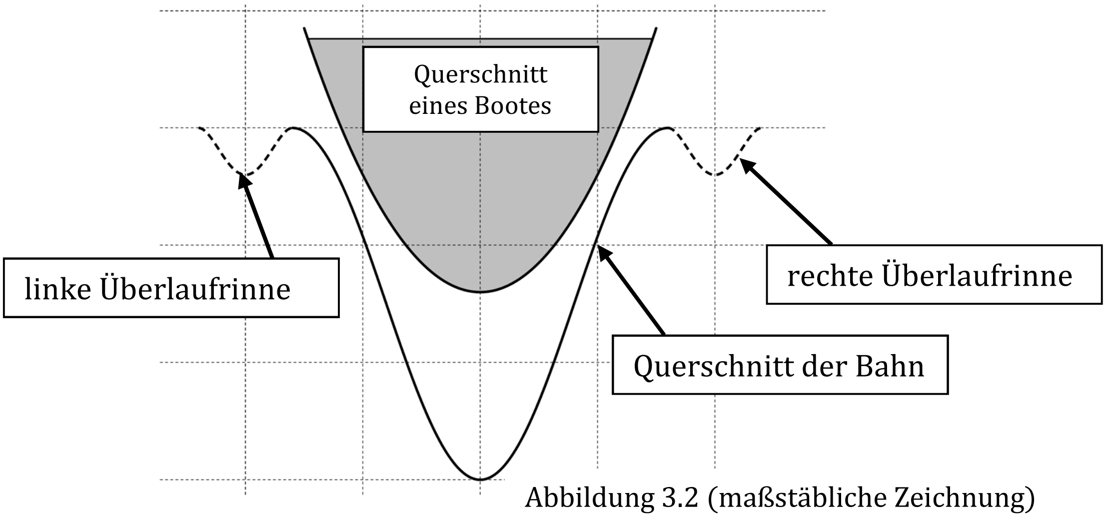


Abbildung 3.2 (maßstäbliche Zeichnung)

e) Erläutern Sie, warum $d = -0{,}75$ gelten muss,
ergänzen Sie die Zeichnung (Abb. 3.2) um ein zum Graphen der Funktion f passendes, skaliertes Koordinatensystem und
ermitteln Sie den horizontalen Abstand beider Hochpunkte.

Die Lage eines Bootsrumpfes lässt sich mithilfe der Gleichung der Funktion g mit

$$g_b(x) = 2x^2 + b \quad \text{mit } -0{,}75 \leq x \leq 0{,}75$$

darstellen (1 Längeneinheit ≙ 1 m). Je schwerer die Ladung des Bootes wird, desto weiter sinkt es vertikal ab und der Wert des Parameters b sinkt.

f) Weisen Sie nach, dass in das Boot aufgrund der Form der Bahn bei einer Überladung kein Wasser laufen könnte.

Im Laufe der Planungsphase ergibt sich, dass sich entlang der Seiten der Bahn Überlaufrinnen befinden sollen. Die Gleichung der abschnittweise definierten Funktion i beschreibt mit

$$i(x) = \begin{cases} i_1(x) & \text{für } -1{,}2 \leq x < -0{,}8 \\ 0{,}75 \cdot \sin\left(\frac{5\cdot\pi}{4}(x - 0{,}4)\right) - 0{,}75 & \text{für } -0{,}8 \leq x \leq 0{,}8 \\ -125x^4 + 500x^3 - 740x^2 + 480x - 115{,}2 & \text{für } 0{,}8 < x \leq 1{,}2 \end{cases}$$

den Querschnitt der Bahn inklusive linker und rechter Überlaufrinne (1 LE ≙ 1 m).

g) Prüfen Sie, ob der Übergang an der Stelle $x = 0{,}8$ sprung- und knickfrei ist.

h) Ermitteln Sie den Term des ersten Funktionsabschnittes i_1, so dass die Ordinatenachse Symmetrieachse des Graphen der Funktion i ist.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Spülschwamm**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	3	5	4	5	6	6	7	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Bakterien der Art Staphylococcus aureus sind verantwortlich für eine Vielzahl von Infektionserkrankungen, anfällig hierfür sind insbesondere Menschen mit schwachem Immunsystem. Da eine Infektion auch über Gegenstände wie z. B. Handtücher oder Küchengeräte erfolgen kann, hat ein Institut die Entwicklung von Bakterien dieser Art auf einem Spülschwamm (feucht im Spülbecken) untersucht.
Der Bestand der Bakterien (Keimen) in Millionen pro cm^2 in Abhängigkeit von der Zeit t kann für die ersten 14 Stunden nach Untersuchungsbeginn durch die Funktion w_a mit der Gleichung

$$w_a(t) = a \cdot e^{0,6t} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 14 \text{ und } 0,01 \leq a \leq 0,03$$

beschrieben werden. Dabei gibt der Parameter a den jeweiligen Anfangsbestand an.

Die Abbildung 3.1 zeigt einen der Graphen der Funktionenschar w_a.

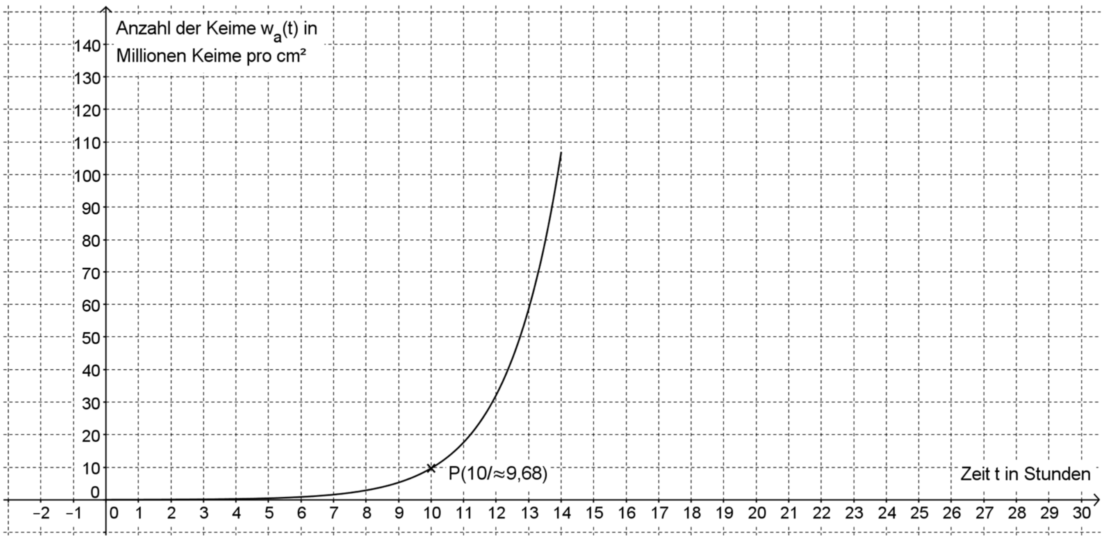


Abbildung 3.1

a) Zeigen Sie anhand des Punktes P, dass Abbildung 3.1 den Verlauf des Graphen der Funktion w_a für $a = 0,024$ wiedergibt und

beschreiben Sie den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang anhand von zwei Aspekten.

Ab einer Anzahl von 50 Millionen Keimen pro cm^2 stuft einer der Mitarbeiter die Spülschwämme als gesundheitsbedenklich ein.

b) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit (in Stunden und Minuten) diese Anzahl laut Modell für $a = 0{,}024$ erreicht wird.

Die Generationszeit t_g von Bakterien ist der Zeitraum, in dem sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt. Sie ist aufschlussreich im Hinblick auf die Wachstumsbedingungen. Daher wird der Wachstumsprozess von Bakterien auch gerne in Form einer Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 2 beschrieben, in dem hier betrachteten Fall also durch die Funktionsgleichung:

$$w_a(t) = a \cdot 2^{p \cdot t}.$$

c) Berechnen Sie die Generationszeit t_g der Bakterien mithilfe der Modellfunktion $w_a(t) = a \cdot e^{0{,}6 \cdot t}$,

ermitteln Sie den Wert für p in der Gleichung der Funktion w_a als Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 2 und

stellen Sie dar, in welchem Verhältnis die Generationszeit t_g und der Faktor p zueinander stehen.

Da in einem Spülbecken die Nährstoffmenge für die Bakterien begrenzt ist, hält ein Labormitarbeiter es für unmöglich, dass die Wachstumsgeschwindigkeit, also die momentane Änderungsrate, tatsächlich auf mehr als 80 Millionen Keime pro cm^2 pro Stunde anwachsen kann.
(Hinweis: Nutzen Sie hier wieder die anfangs gegebene Funktion w_a mit der Gleichung $w_a(t) = a \cdot e^{0{,}6t}$ mit $0 \le t \le 14$ und $0{,}01 \le a \le 0{,}03$)

d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Anfangsbestand a, nach welcher Zeit laut Modell eine Wachstumsgeschwindigkeit von 80 Millionen Keimen pro cm^2 pro Stunde erreicht wird.

Prüfen Sie, ob dieser Zeitpunkt für die laut Modell zugelassenen Anfangsbestände im Definitionsbereich des Modells liegt.

Um einer Beeinträchtigung der Gesundheit durch keimverseuchte Spülschwämme vorzubeugen, wird ein Forschungsinstitut beauftragt, nach Lösungen zu suchen.
Ein junger Mitarbeiter schlägt vor, Spülschwämme regelmäßig mit einem keimtötenden Mittel zu besprühen, um so die Anzahl der Keime möglichst schnell senken zu können und diesen Wert unterhalb der Gesundheitsbedrohung zu halten. Aus Labordaten entwickelt er als Modell die Gleichung der Funktion m, die die Anzahl der Keime (in Mio. Stück pro cm^2) näherungsweise beschreibt, wenn nach 12 Stunden das keimtötende Mittel eingesetzt wird. Es gilt:

$$m(t) = \begin{cases} 0{,}024 \cdot e^{0{,}6t} & \text{für } 0 \le t \le 12 \\ 1{,}777t^3 - 78t^2 + 1124{,}5t - 5300{,}51 & \text{für } 12 < t \le 17 \end{cases}$$

e) Skizzieren Sie den Verlauf der Keimentwicklung nach Einsatz des keimtötenden Mittels in Abbildung 3.1 und

interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Tatsache, dass die Funktion m im Definitionsbereich keine Nullstellen aufweist.

f) Bestimmen Sie die maximale Keimzahl pro cm^2 nach diesem Modell und

bestimmen Sie den Zeitpunkt nach Untersuchungsbeginn (in Stunden), zu dem die Anzahl der Keime am schnellsten sinkt.

Der Vorschlag des Mitarbeiters findet wegen der Gefahr zunehmender Resistenzen von Keimen letztlich keine Zustimmung.
Eine Alternative ist ein neues Material für Spülschwämme. Ein patentierter Wirkstoff in Verbindung mit Silberionen kann das Wachstum der Bakterien verändern. Aus diesem Material wird das neuartige Produkt, der Spülschwamm „Silver Sponge" hergestellt.
Die Anzahl von Bakterien pro cm^2 in dem neuen Material kann näherungsweise durch eine Funktion s mit der folgenden Gleichung beschrieben werden:

$$s(t) = \begin{cases} 0{,}024 \cdot e^{0{,}6 \cdot t} & \text{für } 0 \leq t \leq 11 \\ 50 - b \cdot e^{k \cdot t} & \text{für } t > 11 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad b > 0, k < 0$$

Dabei gibt t die Zeit in Stunden an und $t = 0$ ist der Zeitpunkt des Untersuchungsbeginns, $s(t)$ gibt die Anzahl der Bakterien im Mio pro cm^2 an.

g) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen einer Funktion, wie sie im 2. Abschnitt von s gegeben ist und

erläutern Sie die Bedeutung des Wertes 50 im Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie die Werte b und k so, dass der Graph von s an der Stelle $t = 11$ näherungsweise sprung- und knickfrei verläuft.

Der Silver Sponge ist 1,5 cm dick und hat ein symmetrisches Design (Abb. 3.2). An seiner breitesten Stelle ($\overline{AB}$) ist er 8 cm breit, bei der „Taille" ($\overline{CD}$) beträgt die Breite 6 cm.
Die nach oben und unten begrenzenden Linien können durch Graphen ganzrationaler Funktionen 3. Grades beschrieben werden.

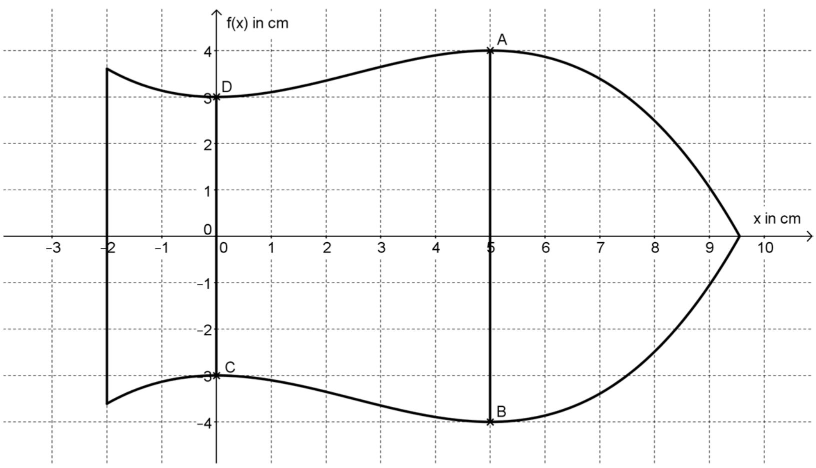


Abbildung 3.2

Die Materialkosten für den Silver Sponge betragen 2 000,00 € pro m^3.

h) Berechnen Sie die Materialkosten für einen Schwamm (Verschnitt wird nicht berücksichtigt).

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Minigolfanlage**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	2	5	5	3	3	6	4	6	6	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Der Besitzer eines Minigolfplatzes möchte eine neue Bahn mit einem neuen Hindernis entwerfen. Der nachfolgende Graph in der Abbildung 3.1 beschreibt die Seitenansicht des Hindernisses, das aus einer Doppelwelle besteht. Das Koordinatensystem ist so festgelegt, dass sich der Abschlagpunkt im Koordinatenursprung befindet. Die waagerechte Linie stellt die Höhe der Seitenbegrenzung der Bahn dar.

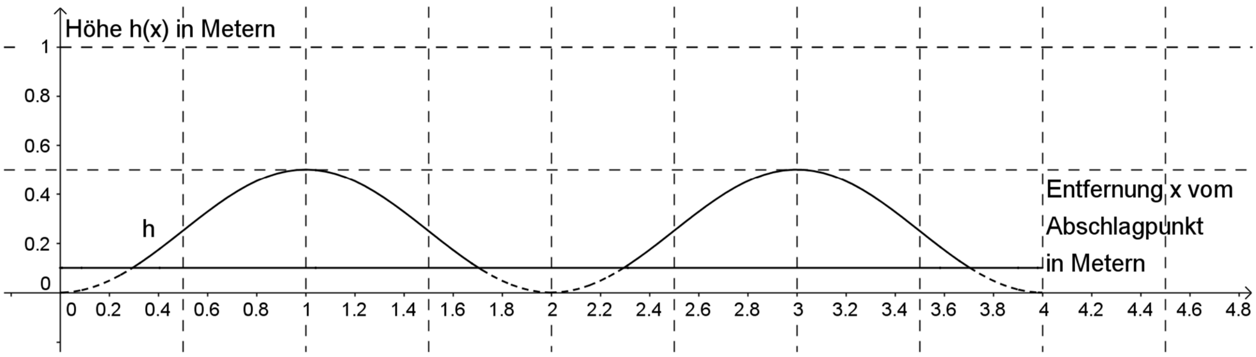


Abbildung 3.1

a) Begründen Sie, warum der Verlauf des Hindernisses in Abb. 3.1 mit Hilfe einer trigonometrischen Funktion beschrieben werden kann.

Der erste Entwurf des Hindernisses wird durch die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x) = 0{,}25 \cdot \sin(\pi \cdot (x - 0{,}5)) + 0{,}25 \quad \text{mit } 0 \le x \le 4$$

beschrieben. Dabei gibt x die Entfernung vom Abschlagpunkt in Metern und $h(x)$ die Höhe in Metern an. Gespielt wird auf der Bahn von links nach rechts.
Die Minigolfbahn ist 95 cm breit und seitlich jeweils durch eine 10 cm hohe Seitenwand begrenzt, damit der Ball nicht aus der Bahn rollen kann (dargestellt durch die waagerechte Linie in Abb. 3.1). Während eines Regengusses sammelt sich zwischen den beiden Wellen Wasser an.

b) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser sich dort nach einem Regenguss maximal ansammeln können.

Diese Bahn wurde beim Hersteller getestet. Der Schlag eines Testspielers verunglückte, da er zu fest schlug. Der Ball hob nach einem halben Meter (bei $x = 0{,}5$) tangential vom Hindernis ab und hatte nach einem Meter (bei $x = 1$) eine Höhe von 61 cm erreicht. Wenn der Ball dabei höher als einen Meter flog, soll um die Bahn herum ein Fangnetz aufgebaut werden.

c) Stellen Sie für die Flugbahn des Balls die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit zugehörigem Definitionsbereich auf und

untersuchen Sie, ob ein Fangnetz aufgebaut werden muss.

Der Hersteller bietet Bahnen mit unterschiedlichen Wellenhöhen an. Der Abschlagpunkt liegt im Nullpunkt des dargestellten Koordinatensystems. Die verschiedenen Bahnverläufe können durch die Funktionenschar $h_{a,d}$ mit der Gleichung

$$h_{a,d}(x) = a \cdot \sin\big(\pi \cdot (x - 0{,}5)\big) + d \text{ mit } 0 \leq x \leq 4 \text{ und } a, d > 0$$

modelliert werden. Dabei gibt x die Entfernung vom Abschlagpunkt in Metern und $h_{a,d}(x)$ die Höhe des Hindernisses in Metern an.

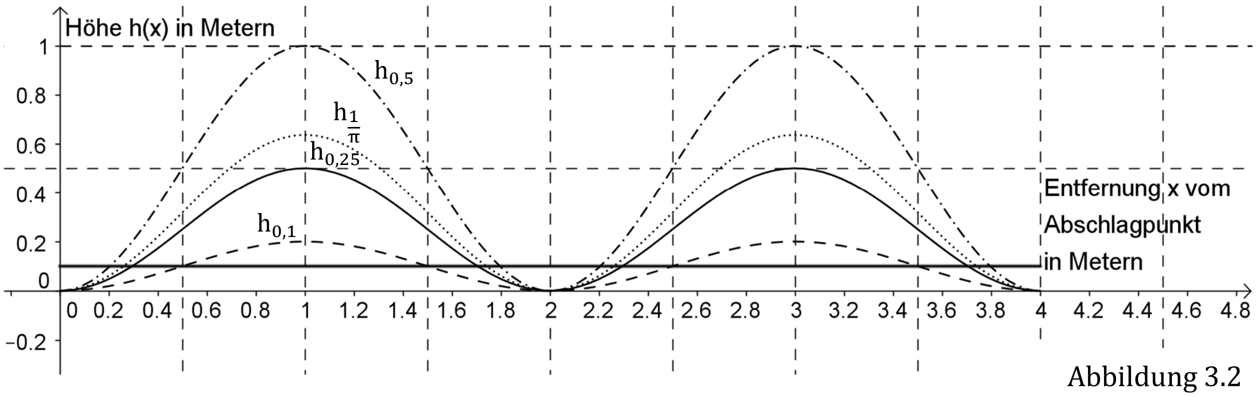


Abbildung 3.2

d) Begründen Sie, dass für die in Abb. 3.2 gezeigten Graphen der Funktionenschar $h_{a,d}$ für die Parameter $a = d$ gilt.

Da für die Parameter $a = d$ gilt, wird im Folgenden die Funktionenschar h_a mit der Gleichung

$$h_a(x) = a \cdot \sin\big(\pi \cdot (x - 0{,}5)\big) + a \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 4 \text{ und } a > 0$$

verwendet. Dabei gibt x die Entfernung vom Abschlagpunkt in Metern und $h_a(x)$ die Höhe in Metern an.

e) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion $h_{0,4}$ in Abb. 3.2.

Die Stellen, an denen der Ball beim Rollen auf der Bahn maximal beschleunigt wird, sollen auf Wunsch des Besitzers auf der Bahn mit einer roten Linie gekennzeichnet werden.

f) Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen der Funktion h_a.

Begründen Sie, warum man auch ohne Berechnung der Wendestellen erkennen kann, dass die Wendestellen vom Parameter a unabhängig sind.

Weiterhin möchte der Besitzer, dass der Steigungswinkel der Bahn an keiner Stelle des Hindernisses einen Wert von 45° übersteigt. Gleichzeitig soll die Bahn aber möglichst hoch sein.

g) Bestimmen Sie den Wert für den Parameter a in der Funktionsgleichung für die Funktion h_a so, dass die Wünsche des Besitzers erfüllt sind.
(Hinweis: Ein Wendepunkt befindet sich an der Stelle $x = 0{,}5$.)

Der Besitzer hat auf einer anderen Minigolfanlage ein anderes sehr schwieriges Hindernis gesehen (siehe Abb. 3.3), das aus zwei Teilen besteht: dem Anstieg (Punkte A bis F in Abb. 3.4) und dem Zielbereich (schraffierter Bereich in Abb. 3.4). Den Verlauf der oberen Kante des Anstiegs hat der Besitzer alle 20 cm ausgemessen und sowohl in der Tab. 3.1 als auch in Abb. 3.4 eingetragen. Der Zielbereich verläuft an der Oberkante parallel zur Grundfläche der Bahn und ist 20 cm lang.

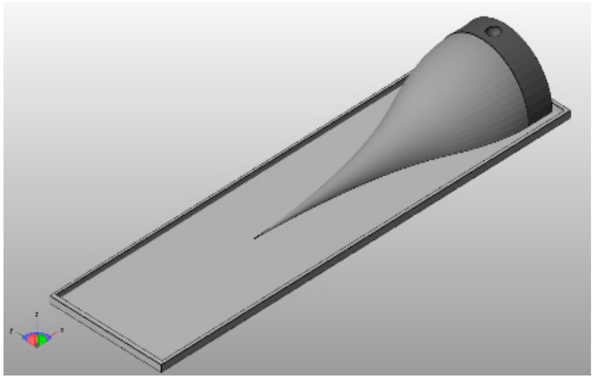


Abbildung 3.3

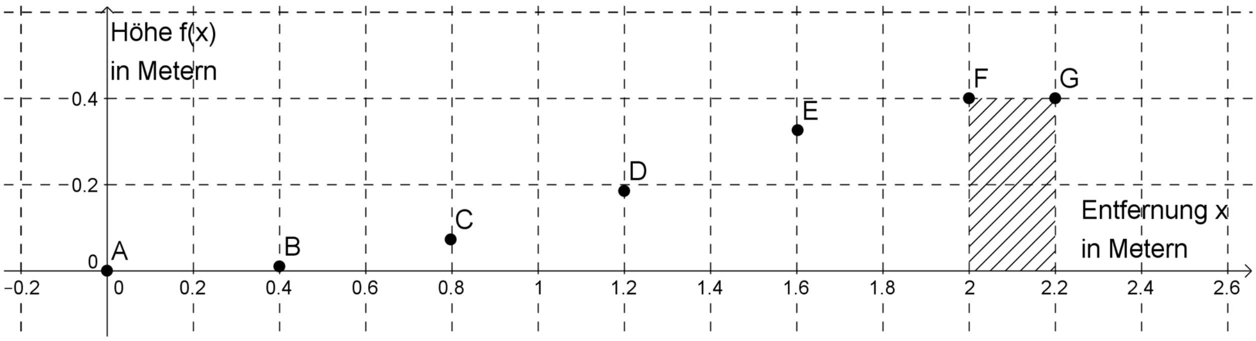


Abbildung 3.4: Seitenansicht

Punkt	A	B	C	D	E	F
Entfernung in m	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
Höhe in m	0	0,009	0,067	0,185	0,326	0,4

Tabelle 3.1

h) Untersuchen Sie mit Hilfe einer Regression, welcher Funktionstyp geeignet ist, den Verlauf des Anstiegs des Hindernisses im Bereich $0 \leq x \leq 2$ möglichst genau zu beschreiben.

Begründen Sie Ihre Wahl des Funktionstyps.

Ein Mitarbeiter des Ingenieurbüros stellt auf Grundlage der Funktion g die folgende Gleichung auf, um die für dieses Hindernis benötigte Menge an Beton zu berechnen. Die Bodenplatte der Bahn und das Zielloch werden bei der Berechnung nicht berücksichtigt.

$$V = \pi \cdot \left(\int_0^2 (g(x))^2 \, dx + 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 \right)$$

i) Entscheiden Sie begründet, ob mit der gegebenen Formel die benötigte Menge Beton berechnet werden kann.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Der Schweinezyklus**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	3	8	8	3	4	6	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Im Jahr 1928 hat Arthur Hanau mit seiner konjunktur-statistischen Analyse des deutschen Schweinemarktes erstmals den Begriff des Schweinezyklus verwendet.
Folgende Graphik wurde dabei von ihm veröffentlicht[2]:

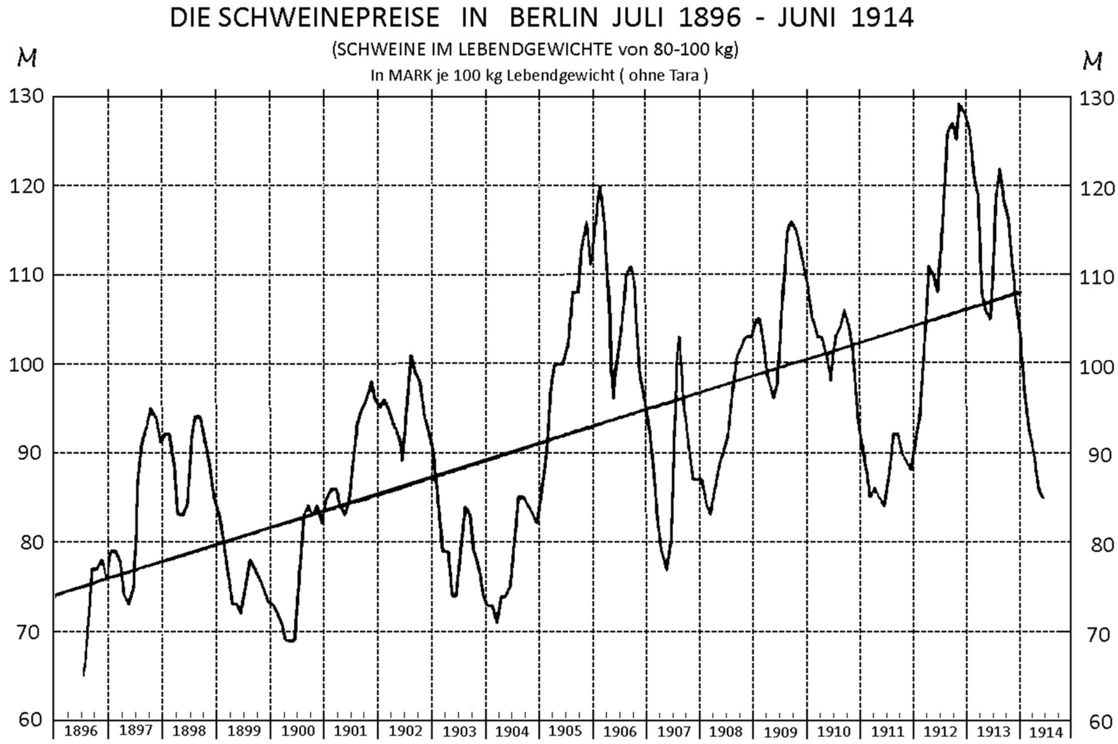


Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie anhand der Graphik in Abb. 3.1 die Entwicklung der Schweinepreise von 1896 bis 1914 anhand von zwei wesentlichen Aspekten.

Über die in der Graphik in Abb. 3.1 eingezeichnete Trendlinie schreibt Hanau, dass ihre Steigung „jährlich etwa 1,87 Mark je 100 kg" beträgt und mittels der Methode „der kleinsten Quadrate" berechnet wurde.

b) Prüfen Sie, ob die Steigung der eingezeichneten Trendlinie gemäß Abb. 3.1 näherungsweise richtig angegeben wurde.

[2] Arthur Hanau: Die Prognose der Schweinepreise (Vierteljahresheft zur Konjunkturforschung, Sonderheft 7), Berlin: Institut für Konjunkturforschung, 1928, S. 10

c) Erläutern Sie in groben Schritten, wie Sie eine solche Regressionsgerade heute mittels eines CAS ermitteln würden.

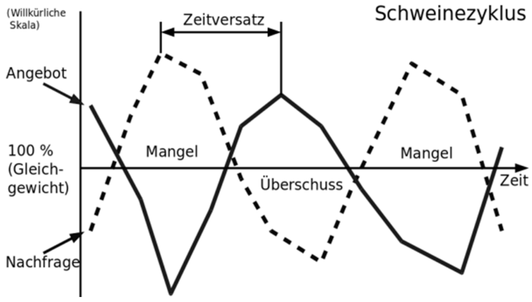


Abbildung 3.2: schematische Darstellung des Schweinezyklus[3]

Bei hohen Preisen kommt es zur verstärkten Schweineaufzucht, die sich wegen der Aufzuchtzeit erst mit einem Verzögerungseffekt auf das Angebot auswirkt, dann aber zu einem Überangebot und Preisverfall führt. Infolgedessen kommt es zur Reduzierung der Produktion, die sich ebenfalls erst zeitverzögert auswirkt – und dann wiederum zu einer höheren Nachfrage gegenüber dem Angebot und dadurch zu steigenden Preisen führt (vgl. Abbildung 3.2[3]).

Dieses Phänomen des Schweinezyklus findet sich überall dort in der Wirtschaft wieder, wo die Angebotsmenge nur mit zeitlicher Verzögerung angepasst werden kann. Ein typisches Beispiel hierfür ist der Arbeitsmarkt bestimmter Berufsgruppen.

Die Anzahl der arbeitslosen Ingenieure im Bereich Maschinen- und Fahrzeugbau (M&F) in Deutschland lässt sich für den Zeitraum vom 01.01.2007 – 01.01.2014 näherungsweise durch die folgende Gleichung der Funktion A beschreiben und wird in Abbildung 3.3 veranschaulicht:

$$A(t) = 1\,230 \cdot \sin(1{,}35t + 1{,}34) + 3\,375 \text{ mit } 0 \le t \le 7$$

A(t) entspricht hierbei der Anzahl der arbeitslosen Ingenieure in Personen und t der vergangenen Zeit in Jahren seit dem 01.01.2007.

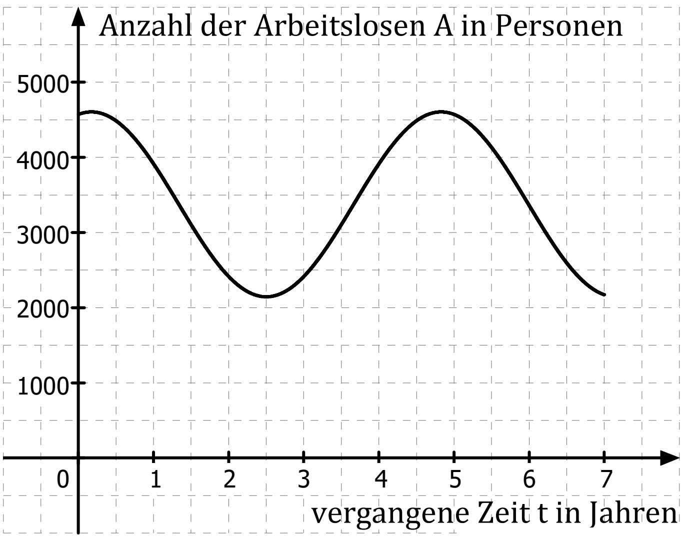


Abbildung 3.3

d) Ermitteln Sie die maximale, die minimale und die mittlere Anzahl an arbeitslosen M&F - Ingenieuren im betrachteten Zeitraum und

berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die größte Zunahme arbeitsloser Ingenieure zu verzeichnen ist.

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/schweinezyklus, Zugriff am 09.03.2017, 15:46 Uhr

Die momentane Änderungsrate der Anzahl offener Stellen für M&F - Ingenieure d pro Jahr kann in der gleichen Zeitspanne mittels der folgenden Gleichung der Funktion d beschrieben werden, wobei auch hier $t = 0$ dem 01.01.2007 entspricht:

$$d(t) = 104t^3 - 1\,008t^2 + 2\,590t - 1\,486 \ \text{ mit } 0 \le t \le 7.$$

Zwei Jahre nach dem 01.01.2007 gab es 3 769 offene Stellen für M&F-Ingenieure.

e) Geben Sie die Gleichung der Funktion D an, die die Anzahl der offenen Stellen in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit t in Jahren beschreibt.

Zeichnen Sie den Graphen von $D(t)$ in die Abb. 3.3 mit ein.

Beurteilen Sie, ob zwischen dem 01.01.2007 und dem 01.01.2014 ein Schweinezyklus auf dem Arbeitsmarkt der M&F - Ingenieure beobachtet werden kann.

Für die zwei folgenden Gleichungen lässt sich jeweils mindestens eine Lösung im Definitionsbereich von $0 \le t \le 7$ finden.

$$(1)\ D(t) = A(t) \quad \text{und}$$

$$(2)\ k'(t) = A'(t) - d(t) = 0$$

Hinweis: Die Differenzenfunktion k ist definiert durch die Gleichung: $k(t) = A(t) - D(t)$.

f) Ermitteln Sie für Gleichung (2) alle Stellen t im Definitionsbereich, an denen die Gleichung erfüllt ist.

g) Interpretieren Sie die Aussagen der beiden Gleichungen im Sachzusammenhang.

Für die langfristige Prognose der Anzahl der arbeitslosen M&F - Ingenieure, ähnlich der langfristigen Preisentwicklung des Schweinepreises (siehe Abb. 3.1), kann eine Funktionsgleichung der folgenden Art verwendet werden:

$$S_w(t) = w \cdot t + 1\,230 \cdot \sin(1{,}35t + 1{,}34) + 3\,375 \text{ mit } t > 0 \text{ und } -1\,660{,}5 < w < 1\,660{,}5$$

wobei S_w die Anzahl der arbeitslosen M&F - Ingenieure in Personen und t die vergangene Zeit in Jahren seit dem 01.01.2007 angibt.

h) Legen Sie die Bedeutung des Parameters w im Sachzusammenhang dar.

Untersuchen Sie, wie stark sich nach diesem Modell die maximalen Anzahlen arbeitsloser M&F - Ingenieure in Abhängigkeit von w innerhalb eines Zyklus (also von einer Stelle eines lokalen Hochpunktes bis zur nächsten) unterscheiden werden.